

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. В.Ф.УТКИНА

В.С.ПАРШИН

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ
В РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ**

Рязань 2021

УДК 621.37

Моделирование случайных сигналов в радиоэлектронных системах: учеб. пособие /В.С. Паршин; Рязан. гос. радиотехн. университет. Рязань, 2021. 100 с.

Изложены основные положения математической статистики и методы моделирования случайных величин и случайных процессов. Подробно изложены стандартный метод моделирования, методы Неймана и кусочной аппроксимации. Проведены основные алгоритмы, используемые для моделирования случайных векторов, и основные положения, лежащие в основе моделирования гауссовских и негауссовских случайных процессов.

Ил. 25. Библиогр.: 20 назв.

Предназначено для студентов дневного отделения, обучающихся по программе специалитета 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы» и магистрантов, обучающихся по специальности 11.04.02 - «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

Моделирование, случайная величина, случайный процесс, цифровая модель, закон распределения, функция распределения, корреляционная функция, стандартный метод, метод Неймана, метод скользящего суммирования, моделирование в спектральной области

Печатается по решению научно - методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра РУС Рязанского государственного радиотехнического университета (и.о. зав. кафедрой Дмитриев В.Т.)

П а р ш и н Валерий Степанович

Моделирование случайных сигналов в радиоэлектронных системах

Редактор Н.А. Орлова

Корректор С.В.Макушина

Подписано в печать . Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 6,25

Тираж 100 экз. Заказ

Рязанская государственная радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ISBN

© Рязанский государственный радиотехнический университет, 2021

Оглавление

Введение	5
Часть 1. Постановка задачи моделирования сигналов в радиозлектронных системах	6
1.1. Вводные замечания	6
1.2. Особенности радиосигналов как объекта моделирования	8
Часть 2. Вероятностное описание случайных величин	10
2.1. Понятие случайной величины	10
2.2. Функция распределения вероятностей случайной величины	10
2.3. Закон распределения вероятностей случайной величины	11
2.4. Числовые характеристики одномерных случайных величин	13
2.5. Примеры законов распределения вероятностей	15
2.6. Дискретные случайные величины	19
2.7. Коэффициенты асимметрии и эксцесса	22
2.8. Двумерные случайные величины	24
2.9. Двумерная функция распределения	24
2.10. Двумерный закон распределения вероятностей	25
2.11. Числовые характеристики двумерной случайной величины	25
2.12. Примеры двумерных законов распределения случайных величин	27
2.13. Многомерные случайные величины	28
2.14. Числовые характеристики многомерной случайной величины	29
2.15. Примеры n -мерных законов распределения	31
2.16. Числовые характеристик суммы, произведения и отношения случайных величин	32
2.17. Центральная предельная теорема	38
Часть 3. Случайные процессы	41
3.1. Понятие случайного процесса. Виды случайных процессов	41
3.2. Описание случайных процессов	44
3.3. Корреляционная функция случайного процесса.	48
3.4. Классификация случайных процессов по вероятностным характеристикам	49
3.5. Стационарные случайные процессы	49
3.6. Эргодические случайные процессы	51
Часть 4. Моделирование случайных величин	52
4.1. Вводные замечания	52
4.2. Статистические тесты для проверки «качества» псевдослучайных величин	53
4.3. Моделирование непрерывных случайных величин с заданным законом распределения	55

4.4. Моделирование случайных величин методом нелинейного преобразования, обратной функции распределения	56
4.5. Моделирование непрерывных случайных величин методом исключения (методом Неймана)	59
4.6. Моделирование дискретных случайных величин	61
4.7. Моделирование непрерывных случайных величин методом кусочной аппроксимации	62
4.8. Моделирование нормальных случайных величин	64
4.9. Моделирование случайной величины с бета-распределением	67
4.10. Моделирование случайных величин с гамма-распределением	70
4.11. Моделирование с помощью нелинейного преобразования нормально распределенной случайной величины	72
Часть 5. Моделирование случайных векторов	74
5.1. Моделирование случайных векторов в рамках корреляционной теории	75
5.2. Моделирование методом линейного преобразования	76
5.3. Моделирование случайных векторов, распределенных по многомерному закону Дирихле	78
Часть 6. Моделирование случайных процессов	79
6.1. Моделирование гауссовских стационарных случайных процессов	80
6.2. Моделирование гауссовских стационарных случайных процессов методом скользящего суммирования	82
6.3. Определение весовых коэффициентов	84
6.4. Моделирование узкополосных гауссовских случайных процессов	85
6.5. Моделирование негауссовских стационарных случайных процессов	86
6.6. Моделирование случайного процесса с равномерным распределением	90
6.7. Моделирование случайного процесса с релейским распределением	92
Часть 7. Моделирование сигналов в спектральной области	93
7.1. Вычисление спектральной плотности сигнала	94
7.2. Моделирование спектральной плотности случайного сигнала, вычисленной по одной реализации	95
7.3. Моделирование оценки спектральной плотности мощности	98
Библиографический список	99

Введение

Для последних десятилетий характерно существенное усложнение систем радиоуправления, радиолокационных и радионавигационных комплексов, систем передачи информации. Усложнение таких систем поставило новые задачи при проектировании, изготовлении, испытании образцов новой техники. Уникальность и дороговизна радиоэлектронных систем зачастую исключают традиционные эмпирические методы проектирования путем «доводки» аппаратуры на серии опытных образцов. В ряде случаев многофункциональную радиоэлектронную систему невозможно полностью исследовать в натуральных условиях в течение всего времени эксплуатации. Анализ поведения некоторых радиоэлектронных систем в аварийных ситуациях также часто невозможен, если для такого анализа использовать действующую в полевых условиях систему [1-3].

Одним из эффективных и экономичных способов исследования и проектирования радиоэлектронных систем является моделирование на ЭВМ. Любая радиотехническая система, от самой простой до самой сложной, перед запуском в производство проходит исследование при помощи моделирования на аналоговых или цифровых вычислительных машинах. Моделирование на цифровых вычислительных машинах является разновидностью математического моделирования – исследования объекта или явления с помощью математической модели, которая воспроизводит интересующие исследователя свойства оригинала.

Под математической моделью часто понимается формальное описание объекта или явления при помощи функциональных или логических операторных соотношений, алгебраических, интегродифференциальных и других уравнений, которые могут быть представлены как в незамкнутой, так и в замкнутой форме [1-4].

Процессы, действующие в радиотехнических системах, всегда являются случайными. Поэтому одной из важнейших задач, возникающих при цифровом моделировании радиосистем, является задача нахождения алгоритмов для генерирования на ЭВМ широкого класса случайных процессов. Целью данного учебного пособия и является изложение основных методов, которые используются на практике для формирования случайных последовательностей. Алгоритмы, используемые для формирования цифровых моделей радиосигналов, должны обеспечивать следующее.

1. Статистические характеристики формируемых на ЭВМ сигналов должны соответствовать реальным процессам.
2. Объем вычислений, необходимый для формирования сигналов, должен быть минимальным.
3. Возможность генерирования широкого класса радиосигналов.
4. Возможность обеспечения повторяемости результатов.

Прежде чем перейти к описанию методов и алгоритмов моделирования случайных величин и процессов, автор в учебном пособии изложил основные положения теории вероятностей и математической статистики. Эту часть учебного пособия можно рассматривать как введение к методам и алгоритмам моделирования случайных сигналов.

Часть 1. Постановка задачи моделирования сигналов

в радиоэлектронных системах

1.1. Вводные замечания

Задача моделирования [1-8] радиоэлектронных систем, как правило, состоит в воспроизведении характеристик исследуемой системы на другом объекте (модели системы).

Основное назначение любой радиоэлектронной системы – передача, приём и переработка информации, заложенной в сигналах. Алгоритм работы радиоэлектронной системы, определяющий последовательность преобразования сигнала (генерирование, модуляция, преобразование частоты, детектирование, фильтрация, накопление, слежение, принятие решения и т. д.), известен. Разработка математической модели системы сводится к переводу известного алгоритма функционирования радиосистемы на язык математики. Например, операция накопления сигнала может представляться сложением, фильтрация - интегралом свёртки или преобразованием Фурье, процедура принятия решения - логическими операциями, детектирование – выделением огибающей. Полученная математическая модель радиосистемы является основой для разработки цифровой модели, предназначенной для реализации на ЭВМ. В основу построения цифровой модели положена замена аналоговых представлений их дискретными эквивалентами.

Реализация цифровой модели радиосистемы на ЭВМ означает замену специализированной вычислительной машины, которой является радиосистема, универсальной ЭВМ [1].

Для исследования разработанной цифровой модели радиосистемы необходимо создание цифровой модели сигнала (возмущения), действующего в радиоэлектронной системе, то есть необходимо найти алгоритмы, позволяющие получать на ЦВМ дискретные реализации

моделируемых процессов. Эта задача решается с помощью преобразований независимых равномерно или нормально распределенных случайных чисел в случайную последовательность с заданными статистическими характеристиками. Как и при моделировании радиоэлектронных систем, разработке цифровой модели сигнала предшествует создание его математической модели. Поскольку сигналы, действующие в системе, случайны, математические модели должны, в общем случае, задаваться многомерными законами распределений моделируемых сигналов.

В результате исследования цифровой модели радиоэлектронной системы могут оцениваться различные её характеристики. Задачей моделирования радиолокационных систем обнаружения является определение вероятностей ложной тревоги и пропуска цели. При исследовании радиолокационных систем слежения основной задачей является оценка точности слежения за доплеровской частотой и задержкой сигнала. В системах радиоуправления основным предметом исследования является сигнал рассогласования.

При цифровом моделировании радиоэлектронных систем информация о параметрах моделируемой системы заключена в цифровых реализациях, сформированных из исходных сигналов в соответствии с операциями, предусмотренными цифровой моделью.

Заключительным этапом моделирования является интерпретация полученных результатов. Поскольку реализации выходных сигналов являются случайными функциями, анализ результатов моделирования должен осуществляться с помощью статистических методов.

Параметры, характеризующие моделируемую систему, оцениваются обычно по множеству реализаций, отображающих выходной сигнал.

Наиболее полной характеристикой является многомерный закон распределения оцениваемых параметров. Однако гораздо чаще оцениваются математические ожидания, дисперсии, корреляционные функции процессов, характеризующих радиоэлектронную систему.

Объём реализаций выходных сигналов, получаемый при моделировании, всегда конечен. Поэтому оценки параметров, характеризующих систему, вычисляются неточно. В связи с этим необходимо определять точность данных, получаемых при помощи моделирования. Чаще всего определяются вероятности того, что оцениваемый параметр находится в определенном интервале возможных значений. Эти вероятности называются доверительными.

1.2. Особенности радиосигналов как объекта моделирования

Сигнал, действующий в произвольной точке радиоэлектронной системы, можно представить в следующем обобщенном виде [1]:

$$U(t) = f[S_1(t, v_{11}, v_{12}, \dots), S_2(t, v_{21}, v_{22}, \dots), \dots, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots] \quad (1.1)$$

где t – время; $S_i(t, v_{jk}), i = \overline{1, L}$, – детерминированные функции со случайными параметрами $v_{jk}, j, k = \overline{1, K}$; $\xi_i(t), i = \overline{1, M}$, – случайные процессы (шумы, помехи); L, M, K – целые положительные числа; $f(\cdot)$ – символ некоторого преобразования, зависящего в общем случае от времени.

При цифровом моделировании необходимо осуществить формирование на ЭВМ случайного процесса (1.1), который при известных функциях $S_1(t, v_{11}, v_{12}, \dots), S_2(t, v_{21}, v_{22}, \dots), \dots$, известном преобразовании

$$f[S_1(t, v_{11}, v_{12}, \dots), S_2(t, v_{21}, v_{22}, \dots), \dots, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots]$$

и известных статистических характеристиках случайных величин $v_{jk}, j, k = \overline{1, K}$, и случайных процессов $\xi_i(t), i = \overline{1, M}$, является математической (статистической) моделью сигнала. Необходимо иметь в виду, что наиболее полным описанием сигнала (1.1) является его многомерный закон распределения.

Реализацией случайного процесса $U(t)$ является детерминированная функция

$$u^{(k)}(t) = f[S_1(t, v_{11}^{(k)}, v_{12}^{(k)}, \dots), S_2(t, v_{21}^{(k)}, v_{22}^{(k)}, \dots), \dots, \xi_1^{(k)}(t), \xi_2^{(k)}(t) \dots],$$

где $\xi_i^{(k)}(t), i = \overline{1, M}$, – k -я реализация случайного процесса $\xi_i(t)$;

$v_{ij}^{(k)}$ – k -я реализация случайной величины v_{ij} .

Если сигнал $U(t)$ является функцией с непрерывным временем, то при формировании на ЭВМ сигналу $U(t)$ ставится в соответствие сигнал с дискретным временем $U[n\Delta t] = U[n]$, $n = \overline{1, N}$. Отсчеты сигнала $U(t)$ берутся в моменты времени $t_n = n\Delta t$. Величина Δt являет-

ся шагом дискретизации, а число отсчетов N и шаг Δt связаны соотношением

$$\Delta t = T / (N - 1),$$

где T - длительность сигнала $U(t)$.

Случайная последовательность

$$U[n] = f_n[S_1(n, v_{11}, v_{12}, \dots), S_2(n, v_{21}, v_{22}, \dots), \dots, \xi_1(n), \xi_2(n), \dots]$$

называется цифровой моделью сигнала $U(t)$. Реализациями сигнала $U[n]$, формируемыми на ЭВМ, являются неслучайные дискретные последовательности

$$u^{(k)}[n] =$$

$$f_n[S_1(n, v_{11}^{(k)}, v_{12}^{(k)}, \dots), S_2(n, v_{21}^{(k)}, v_{22}^{(k)}, \dots), \dots, \xi_1^{(k)}(n), \xi_2^{(k)}(n), \dots].$$

Вид функций $S_i(t, v_{jk}), i = \overline{1, L}$, определяющих структуру сигналов в радиоэлектронных системах, может быть самым различным. Одним из примеров может являться функция

$$S(t) = v_1 \cos(v_2 t + v_3),$$

где величины v_1, v_2 и v_3 являются случайными амплитудой, частотой и фазой.

Другие примеры – сигналы на выходе ограничителя, амплитудного детектора и т.д. Случайные процессы (шумы, помехи) $\xi_i(t), i = \overline{1, M}$, действующие в радиоэлектронной системе, также разнообразны. Это могут быть белые шумы, узкополосные и широкополосные процессы, импульсные процессы. Вид функционального преобразования $f[\dots]$, которому подвергаются сигналы, зависит от алгоритма работы радиоэлектронной системы.

В математическом обеспечении ЭВМ имеются датчики псевдослучайных нормально или равномерно распределенных независимых чисел. Задачей моделирования является нахождение таких преобразований этих чисел, после которых их статистические характеристики были бы эквивалентны статистическим характеристикам случайных величин $v_{jk}, j, k = \overline{1, K}$, и процессов $\xi_i(n), i = \overline{1, M}$, формирующих сигнал (1.1).

Часть 2. Вероятностное описание случайных величин

2.1. Понятие случайной величины

Случайная величина [9-17] в теории вероятностей есть величина, принимающая в зависимости от условий значения с определёнными вероятностями. Предсказать значение случайной величины невозможно, возможно лишь указать вероятности тех или иных значений случайной величины. Примерами случайной величины могут быть расстояние от точки падения снаряда до цели, амплитуда отраженного радиолокационного сигнала, амплитуда сигнала рассогласования в системах радиуправления и т.д. Часто [11-14] случайной величиной называют функцию ξ , определенную на пространстве элементарных исходов Ω (то есть на множестве различных исходов случайного эксперимента) и принимающую свои значения на некотором множестве X , состоящем не обязательно из действительных чисел. Например, множество X может состоять и из комплексных чисел.

Зафиксированное значение случайной величины называется реализацией случайной величины. Реализация случайной величины есть детерминированное число и обозначается как $\xi^{(k)}$, где k - номер реализации. Случайные величины могут быть как одномерными, так и многомерными.

Для математического описания случайной величины используются функция распределения вероятностей (часто ее называют интегральной функцией распределения или просто функцией распределения), функция плотности распределения вероятностей (закон распределения вероятностей, часто просто закон распределения), характеристическая, моментная и кумулянтная функции, начальные и центральные моменты закона распределения. Перечисленные функции и числовые характеристики являются детерминированными функциями и детерминированными числовыми характеристиками, с помощью которых изучается поведение случайных величин.

2.2. Функция распределения вероятностей случайной величины

Пусть имеется случайная величина ξ , область определения которой заключена в интервале $-\infty < \xi < \infty$. Зафиксируем некоторое число x и разделим область возможных значений случайной величины ξ на два непересекающихся интервала. К одному из интервалов отне-

сем значения величины ξ , не превосходящие x , а к другому интервалу – все остальные значения ξ . Неслучайная функция

$$F(x) = P\{\xi \leq x\},$$

где $P\{\xi \leq x\}$ - вероятность того, что случайная величина ξ не превосходит x ,

называется функцией распределения вероятностей случайной величины ξ , или просто функцией распределения.

Функция распределения полностью определяет статистические свойства случайной величины. Перечислим основные свойства функции распределения.

1. Значения функции распределения, представляющие собой вероятности, находятся в следующих пределах: $F(-\infty) = P\{\xi \leq -\infty\} = 0$, $F(\infty) = P\{\xi \leq \infty\} = 1$.

2. Функция распределения неубывающая, то есть $F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 < x_2$.

3. Вероятность нахождения случайной величины ξ в пределах $x_1 < \xi \leq x_2$ равна разности значений функции распределения в верхнем и нижнем пределах, то есть $P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

4. Функция $F(x)$ имеет при $x = x_0$ скачок, если

$$F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0) = c > 0.$$

Функция распределения может иметь не более чем счетное множество скачков.

5. Функция распределения непрерывна слева.

2.3. Закон распределения случайной величины

Хотя функция распределения полностью определяет свойства случайной величины, она дает их описание в малонаглядной, интегральной форме. Более наглядна и более часто используется для описания случайных величин плотность распределения вероятностей. Именно плотность распределения вероятностей наиболее часто используется для синтеза и анализа оптимальных радиосистем, функционирующих при наличии комплекса помех. В литературе термины “плотность распределения вероятностей (плотность вероятностей)” и “закон распределения вероятностей (закон распределения)” используются как синонимы.

Пусть функция распределения непрерывна и дифференцируема.
Производная

$$w(x) = dF(x)/dx$$

называется плотностью распределения вероятностей случайной величины ξ , или законом распределения случайной величины. Переходя к конечным разностям, можно записать, что

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx} \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{P\{x < \xi \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

Видно, что при малых значениях интервала Δx функция $w(x)$ имеет смысл плотности вероятности, так как равна отношению вероятности попадания случайной величины ξ внутрь интервала Δx к длине этого интервала. Плотность распределения вероятностей является размерной функцией. Размерность ее обратна размерности той случайной величины, вероятностные свойства которой она определяет. Например, если случайная величина имеет размерность вольт, то плотность распределения вероятности имеет размерность 1/вольт.

Если плотность распределения вероятностей имеет максимум при некотором значении x , то это значение называется модой. Функция $w(x)$ может иметь несколько мод, такая плотность распределения вероятностей называется многомодальной.

Величина, определяемая равенством $F(x_p) = p$, называется квантилью порядка p . Квантиль 0.5 называется медианой, то есть медианой является такое число, что вероятности получить значения справа от него и слева от него равны 0.5. Для симметричных законов распределения медиана равна моде и равна математическому ожиданию.

Основные свойства закона распределения вероятностей следующие.

1. Закон распределения вероятностей как производная неубывающей функции не может принимать отрицательных значений, то есть

$$w(x) \geq 0.$$

2. Закон распределения вероятностей должен удовлетворять условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1.$$

3. Вероятность $P\{\xi \leq x\}$ того, что случайная величина ξ не превосходит x , равна

$$P\{\xi \leq x\} = F(x) = \int_{-\infty}^x w(z) dz.$$

4. Вероятность $P\{x_1 < \xi \leq x_2\}$ нахождения случайной величины ξ в пределах $x_1 < \xi \leq x_2$ равна

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx = F(x_2) - F(x_1).$$

Важной характеристикой случайной величины ξ является ее характеристическая функция, определяемая как

$$\theta(j\eta) = m_1\{\exp(j\xi\eta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jx\eta} w(x) dx,$$

где $w(x)$ - закон распределения случайной величины ξ .

Зная характеристическую функцию, всегда можно определить закон распределения случайной величины

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(j\eta) e^{-j\eta x} d\eta.$$

Иными словами, закон распределения и характеристическая функция связаны парой преобразования Фурье.

2.4. Числовые характеристики одномерных случайных величин

Функция распределения, плотность распределения вероятностей и характеристическая функция являются функциями, полностью определяющими свойства случайной величины. Использование той или иной функции для решения практических задач зависит от постановки задачи, априорных сведений о возникшей ситуации, особенностей применяемого математического аппарата и т.д. Однако часто для решения практических задач требуется знать о случайной величине гораздо меньше. Поэтому для описания случайной величины используются начальные и центральные моменты закона распределения вероятностей.

Начальным моментом порядка n случайной величины ξ называется неслучайное число

$$m_n(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n w(x) dx.$$

Важной характеристикой случайной величины является начальный момент первого порядка, который обозначается как $m_1(\xi)$ или $M(\xi)$:

$$m_1(\xi) = M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx.$$

Оператор $M(\xi)$ [или $m_1(\xi)$] называется оператором математического ожидания или оператором статистического усреднения по всем возможным значениям случайной величины ξ . Часто математическое ожидание называют средним значением случайной величины ξ .

В общем случае, если имеется некоторая функция $\varphi(\xi)$ случайной величины ξ , то оператор $M[\varphi(\xi)]$ будет оператором статистического усреднения функции $\varphi(\xi)$ при всех возможных значениях случайной величины, то есть

$$M[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)w(x)dx. \quad (2.1)$$

Центральным моментом порядка n случайной величины ξ называется число

$$M_n(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^n w(x)dx.$$

Согласно выражению (2.1) начальные и центральные моменты случайной величины ξ получаются статистическим усреднением соответственно случайных величин ξ^n и $[\xi - m_1(\xi)]^n$.

Центральный момент второго порядка

$$M_2(\xi) = D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^2 w(x)dx$$

называется дисперсией случайной величины.

Величина $\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)}$ называется среднеквадратичным отклонением и служит мерой разброса случайной величины относительно математического ожидания. Дисперсию случайной величины часто определяют как разность среднего квадрата (второго начального момента) и квадрата математического ожидания, то есть

$$D(\xi) = m_2(\xi) - m_1^2(\xi).$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

$$v = c\xi,$$

где C - некоторая константа, равны соответственно следующему:

$$m_1(v) = cm_1(\xi), \quad D(v) = c^2 D(\xi).$$

Математическое ожидание детерминированной величины равно самой этой величине, то есть $m_1(c) = c$. Дисперсия детерминированной величины равна нулю, то есть $D(c) = 0$.

2.5. Примеры законов распределения вероятностей одномерных случайных величин

Известно очень много законов распределения [9], отображающих поведение случайных величин различной физической природы. В качестве примеров законов распределения вероятностей случайной величины можно указать следующие.

1. Закон распределения Гаусса (гауссовский, или нормальный закон распределения).

Этот закон распределения вероятностей - центральный в математической статистике. Часто используется при обработке результатов эксперимента, описывает рассеяния снарядов, ошибки при проведении различных измерений и т.д. На его основе получены моделирующие алгоритмы для генерирования случайных величин с некоторыми законами распределений.

Записывают нормальный закон распределения и функцию распределения случайной величины ξ так:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left[-\frac{(x - m_{1\xi})^2}{2\sigma_\xi^2}\right], \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.2)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - m_{1\xi}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\right) \right], \quad (2.3)$$

где $m_{1\xi} = m_1(\xi)$ - математическое ожидание; $\sigma_\xi^2 = D(\xi)$ - дисперсия случайной величины; $\operatorname{erf}(x) = 2\int_0^x \exp(-z^2) dz / \sqrt{\pi}$ - функция ошибок.

Мода этого закона распределения совпадает с математическим ожиданием. Часто нормальный закон распределения записывают как $N(m_1, \sigma^2)$. Случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией называется стандартной случайной величиной и обозначается $N(0,1)$. Нормальный закон распределения симметричен относительно своего математического ожидания.

2. Равномерный закон распределения.

Этот закон распределения чрезвычайно широко используется при получении моделирующих алгоритмов для формирования случайных величин с различными законами распределений. Записывают равномерный закон распределения и его функция распределения следующим образом:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x < a \\ 1, & x \geq b \end{cases}. \quad (2.4)$$

Часто равномерный закон распределения записывают в виде $R(a, b)$.

3. Экспоненциальный закон распределения.

Это основной закон распределения при интерпретации результатов спектрального анализа случайных процессов в базисе Фурье. Экспоненциальный закон распределения и его интегральная функция записывают следующим образом:

$$w(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \\ F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad \lambda > 0. \quad (2.5)$$

Экспоненциальный закон распределения часто записывается как $Exp(\lambda)$, а величина λ называется параметром распределения.

4. Релеевский закон распределения (закон распределения Релея).

Один из основных законов распределения при описании флюктуаций амплитуды радиосигнала. Закон распределения вероятностей и функция распределения записываются так:

$$w(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.6)$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-x^2 / 2\sigma^2\right), \quad x \geq 0, \quad \sigma > 0. \quad (2.7)$$

Величина σ называется параметром релеевского распределения.

5. Гамма - распределение. Часто используется для аппроксимации закона распределения мощности радиосигналов. Закон распределения вероятностей и функция распределения выглядят так:

$$w(x) = \frac{x^{q-1} \exp(-x/\beta)}{\Gamma(q)\sigma^q},$$

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \gamma\left(q, \frac{x}{\beta}\right), \quad x \geq 0, \alpha, \beta > 0, \quad (2.8)$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция; $\gamma(\cdot, \cdot)$ - нижняя неполная гамма-функция.

Обозначение гамма - распределения - $\Gamma(q, \beta)$.

На рис. 2.1 в качестве примера приведены плотности распределения вероятностей случайной величины ξ с нормальным законом распределения и случайной величины ξ с экспоненциальным законом распределения.

Графики соответствуют нормальной плотности распределения вероятностей с математическим ожиданием $m_{\xi} = 5$ и дисперсиями $D_1(\xi) = 0.5$, $D_2(\xi) = 2$. Для экспоненциального распределения выбраны параметры распределения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.5$.

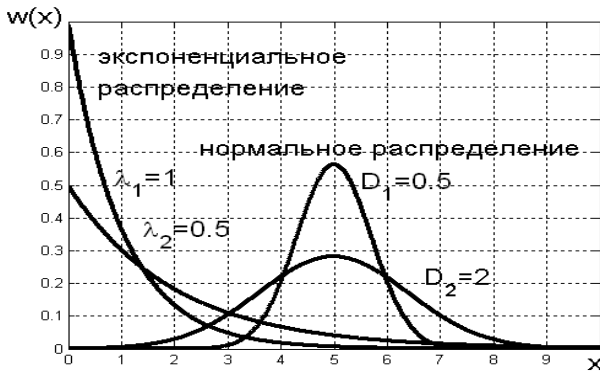


Рис. 2.1. Нормальный и экспоненциальный законы распределения

На рис. 2.2 приведены функции распределения, соответствующие указанным плотностям распределения вероятностей.

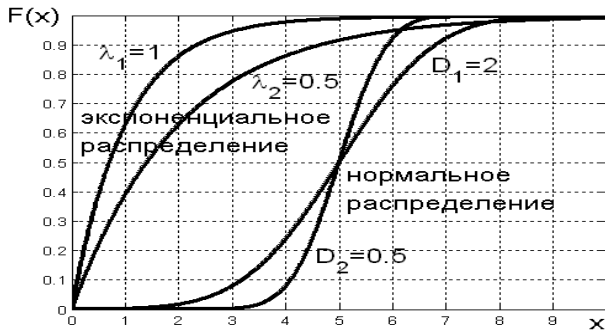


Рис. 2.2. Функции распределения нормальной и экспоненциально распределенной случайных величин

Из приведенных рисунков следует, что изменения в форме закона распределения приводят к изменению формы функции распределения.

На рис. 2.3 приведен график бимодального закона распределения случайной величины ξ с дисперсией $\sigma_{1\xi}^2$, которая имеет с вероятностью P_1 математическое ожидание $m_{1\xi}$, а с вероятностью P_2 математическое ожидание $m_{1\xi}^1$. Закон распределения такой случайной величины записывается в виде

$$w(x) = P_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{1\xi}}} \exp\left[-\frac{(x - m_{1\xi})^2}{2\sigma_{1\xi}^2}\right] + P_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{1\xi}}} \exp\left[-\frac{(x - m_{1\xi}^1)^2}{2\sigma_{1\xi}^2}\right]. \quad (2.9)$$

При построении графика принято, что математические ожидания $m_{1\xi} = 5$, а $m_{1\xi}^1 = 11$. Дисперсия случайной величины ξ принята равной $\sigma_{1\xi}^2 = 0.5$. Принято, что вероятности $P_1 = P_2 = 0.5$. Функция распределения вероятностей приведена на рис. 2.3.



Рис 2.3. Бимодальный закон распределения вероятностей и его интегральная функция распределения

Из рисунка следует, что если у функции распределения имеются участки, на которых она не возрастает, то это может служить признаком наличия нескольких мод у закона распределения

2.6. Дискретные случайные величины

Наряду с непрерывными случайными величинами, основные свойства которых перечислены выше, на практике часто встречаются дискретные случайные величины. Случайная величина ξ называется дискретной, если множество ее значений не более чем счетно (то есть конечно, или счетно). Отсюда следует, что значения дискретной случайной величины не содержат никакого непрерывного интервала на числовой прямой. Примером может служить любая случайная величина, принимающая целочисленное значение. Самый простой пример – число очков при бросании игральной кости. Другим примером может служить число отказов радиоэлектронной аппаратуры на интервале времени. Обычно указывается на два основных способа определения дискретной случайной величины.

1. Задается закон распределения дискретной случайной величины, то есть устанавливается функциональная связь между значениями дискретной случайной величины и их вероятностями:

$$P(\xi = x_k) = p_k, k = \overline{1, n}.$$

2. Табличный способ задания дискретной случайной величины

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Эта таблица называется рядом распределений. В ней перечислены все возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности.

Для распределения вероятностей дискретной случайной величины выполняется условие нормировки

$$P(\xi \leq \infty) = \sum_k p_k = 1.$$

Функция распределения $F(\xi \leq x)$ дискретной случайной величины ξ определяется в виде

$$F(\xi \leq x) = \sum_{x_k \leq x} P\{\xi = x_k\} = \sum_{x_k \leq x} p_k.$$

Все свойства функции распределения вероятностей и закона распределения вероятностей справедливы и для дискретной случайной величины.

Пример графика закона распределения дискретной случайной величины ξ приведен на рис. 2.4. Случайная величина ξ задана таблично:

$$\xi = \begin{pmatrix} 1.0 & 3.0 & 8.0 & 9.0 & 13.0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

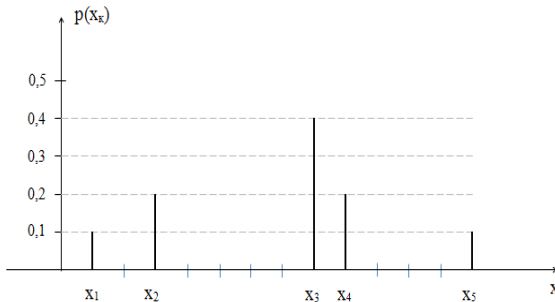


Рис. 2.4. Закон распределения дискретной случайной величины

На рис. 2.5 приведен график функции распределения дискретной случайной величины. Видно, что график функции распределения дис-

кретной случайной величины представляется в виде ступенчатой кривой со скачками, равными p_k в точках x_k , и при постоянном значении на интервалах (x_{k-1}, x_k) , $k = 1, 2, \dots$

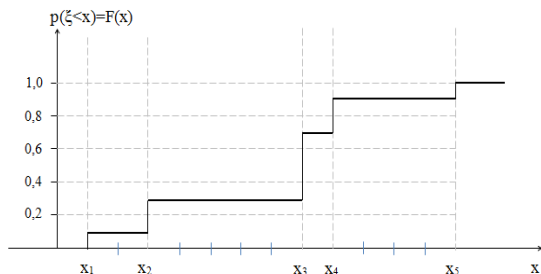


Рис. 2.5. Функция распределения дискретной случайной величины

Начальный момент дискретной случайной величины порядка n записывается в виде

$$m_n(\xi) = \sum_r x_r^n p_r,$$

а центральный момент дискретной случайной величины порядка n равен

$$M_n = \sum_r [x_r - m_1(\xi)]^n p_r.$$

Примером закона распределения дискретной случайной величины является биномиальное распределение, которое задает вероятность выпадения ровно k успехов в серии из n испытаний:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - число сочетаний из n элементов по k ; $p + q = 1$:

p - вероятность успеха.

В теории массового обслуживания широко используется закон распределения Пуассона

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda).$$

Закон распределения Пуассона описывает случайную величину, которая представляет собой число событий, произошедших за фикси-

рованный промежуток времени. Условия применимости распределения Пуассона – события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга. Величина λ является математическим ожиданием (средним числом событий за фиксированный промежуток времени).

2.7. Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Математическое ожидание и дисперсия хотя и являются важнейшими характеристиками, в общем случае далеко не полностью определяют поведение закона распределения случайной величины ξ . Исключение представляет только нормальный закон распределения, свойства которого полностью определяются первыми двумя моментами. Вычисление моментов распределения более высокого порядка позволяет существенно уточнить вид закона распределения случайной величины.

Вычисляя третий центральный момент закона распределения и дисперсию (полагая, что они существуют), определяют коэффициент асимметрии β_1 следующим образом:

$$\beta_1 = \frac{M_3(\xi)}{D(\xi)^{3/2}}. \quad (2.10)$$

Для законов распределения, симметричных относительно математического ожидания, коэффициент асимметрии $\beta_1 = 0$. На рис. 2.6 приведены законы распределения с нулевым, положительным и отрицательным значениями коэффициента асимметрии.

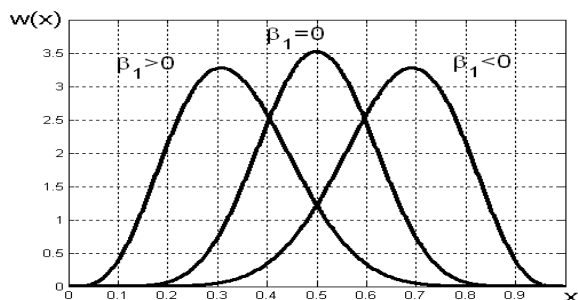


Рис. 2.6. Законы распределения вероятностей с различными значениями коэффициента асимметрии

Зная коэффициент асимметрии, можно определить, в какую сторону относительно математического ожидания «затянут хвост» закона распределения случайной величины.

Коэффициент эксцесса β_2 определяется через четвертый центральный момент и дисперсию (в том случае, если они существуют):

$$\beta_2 = \frac{M_4(\xi)}{D^2(\xi)} - 3. \quad (2.11)$$

Минус три в формуле введен для того, чтобы коэффициент эксцесса для нормального закона распределения был бы равен нулю. Коэффициент эксцесса положителен, если пик закона распределения около математического ожидания более острый, чем у нормального распределения. Если пик более гладкий, то коэффициент эксцесса отрицателен. На рис. 2.7 приведены законы распределения с различными значениями коэффициента эксцесса. График с нулевым значением эксцесса соответствует нормальному закону распределения.

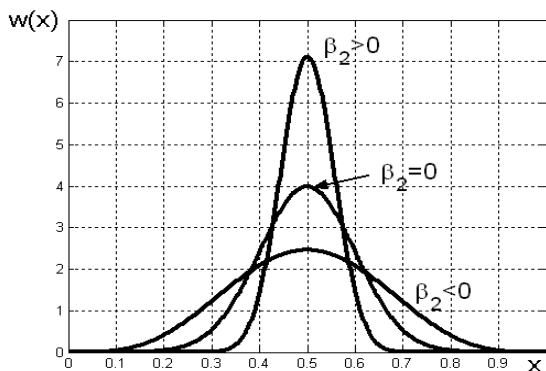


Рис 2.7. Законы распределения вероятностей с различными значениями коэффициента эксцесса

Знание коэффициентов асимметрии и эксцесса позволяет решить две задачи.

1. Поскольку различные законы распределения имеют различные коэффициенты асимметрии и эксцесса, то их вычисление позволяет оценить степень приближения закона распределения наблюдаемых данных к тому или иному закону распределения.

2. Вычисляя коэффициенты асимметрии и эксцесса, с помощью кривых Пирсона [18] можно подобрать закон распределения, аппроксимирующий закон распределения наблюдаемых данных.

2.8. Двумерные случайные величины

При оценке качества функционирования радиоэлектронных систем часто приходится принимать решение, анализируя два параметра, характеризующие качество функционирования системы. В качестве примера можно указать амплитуду и время задержки видеоимпульса, частоту и фазу радиосигнала, доплеровское смещение частоты радиосигнала и его амплитуду и т.д.

По определению совокупность случайных величин ξ_1, ξ_2 , заданных на одном и том же вероятностном пространстве, называется двумерной случайной величиной или двумерным случайным вектором. Составляющие ξ_1, ξ_2 называются координатами двумерного случайного вектора.

2.9. Двумерная функция распределения

По определению двумерная функция распределения имеет вид:

$$F(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\},$$

то есть функция распределения $F(x_1, x_2)$ двумерной случайной величины определяет вероятность того, что одновременно выполняется следующее: случайная величина ξ_1 не превосходит числа x_1 , а случайная величина ξ_2 не превосходит числа x_2 . Основные свойства двумерной функции распределения следующие.

1. Функция $F(x_1, x_2)$ не может принимать отрицательных значений, то есть $0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1$.

2. Функция $F(x_1, x_2)$ является неубывающей по каждому из аргументов.

3. Свойства при бесконечном значении аргумента:

$$F(-\infty, x_2) = 0 = F(x_1, -\infty), \quad F(\infty, \infty) = 1, \quad F(x_1, \infty) = F(x_1), \\ F(\infty, x_2) = F(x_2).$$

4. Вероятность $P\{a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2\}$ одновременного нахождения случайных величин ξ_1 и ξ_2 в пределах $a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2$ равна $P\{a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_1) + F(a_1, a_2)$.

2.10. Двумерный закон распределения вероятностей

Двумерная плотность (совместная плотность) распределения вероятностей случайных величин ξ_1 и ξ_2 определяется соотношением

$$w(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Основные свойства двумерной плотности распределения вероятностей.

1. Двумерная плотность распределения неотрицательна, то есть $w(x, y) \geq 0$.
2. Двумерная плотность вероятностей удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = 1.$$

3. Вероятность $P\{a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2\}$ одновременного нахождения случайных величин ξ_1 и ξ_2 в пределах $a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2$ равна

$$P\{a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} w(x, y) dx dy.$$

4. Плотность распределения каждой случайной величины равна несобственному интегралу от двумерной плотности

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dy, \quad w(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx.$$

2.11. Числовые характеристики двумерной случайной величины

Начальным смешанным моментом m_{nk} порядка $(n+k)$ случайных величин ξ_1 и ξ_2 называется число

$$m_{nk} = M\left(\xi_1^n \xi_2^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k w(x, y) dx dy.$$

Центральный смешанный момент M_{nk} порядка $(n+k)$ случайных величин ξ_1 и ξ_2 определяется в соответствии с формулой

$$\begin{aligned}\sigma_{nk} &= M \left\{ [\xi_1 - m_1(\xi_1)]^n [\xi_2 - m_2(\xi_2)]^k \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(\xi_1)]^n [y - m_2(\xi_2)]^k w(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

Математическое ожидание каждой из случайных величин ξ_1 и ξ_2 равно:

$$\begin{aligned}M(\xi_1) &= m_1(\xi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, y) dx dy, \\ M(\xi_2) &= m_1(\xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} yw(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yw(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

Дисперсии случайных величин ξ_1 и ξ_2 определяются как

$$\begin{aligned}D(\xi_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(\xi_1)]^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(\xi_1)]^2 w(x, y) dx dy, \\ D(\xi_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} [y - m_1(\xi_2)]^2 w(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [y - m_1(\xi_2)]^2 w(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

Смешанный начальный момент второго порядка

$$m_{11} = M(\xi_1 \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyw(x, y) dx dy$$

называется ковариацией случайных величин ξ_1 и ξ_2 .

Смешанный центральный момент второго порядка

$$\begin{aligned}M_2(\xi_1 \xi_2) &= \rho_{11} = M \left\{ [\xi_1 - m_1(\xi_1)] [\xi_2 - m_1(\xi_2)] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(\xi_1)] [y - m_1(\xi_2)] w(x, y) dx dy\end{aligned}$$

называется корреляционным моментом или корреляцией случайных величин ξ_1 и ξ_2 . Смешанные начальный и центральный моменты связаны соотношением

$$\rho_{11} = m_{11} - m_1(\xi_1) m_1(\xi_2).$$

Необходимо иметь в виду, что часто (особенно в переводной литературе) под термином «ковариация» понимается смешанный центральный момент второго порядка, а под термином «корреляция» понимается смешанный начальный момент второго порядка. В дальнейшем под терминами «корреляция» и «ковариация» будут пониматься величины, определенные по вышеприведенным формулам.

На практике очень часто для оценки корреляции (статистической связи) случайных величин ξ_1 и ξ_2 пользуются коэффициентом корреляции r , который определяется так:

$$r = \frac{\rho_{11}}{\sqrt{M_2(\xi_1)M_2(\xi_2)}}. \quad (2.12)$$

Значения коэффициента корреляции r заключены в пределах $-1 \leq r \leq 1$. Если коэффициент корреляции r равен нулю, то случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются некоррелированными, или линейно-независимыми. Некоррелированность случайных величин в общем случае не означает их независимости. Однако независимые случайные величины всегда будут некоррелированными. Для нормальных случайных величин их некоррелированность означает и их независимость.

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются независимыми, если для всех целых n и k выполняется условие $M\left(\begin{smallmatrix} \xi_1^n & \xi_2^k \end{smallmatrix}\right) = M\left(\begin{smallmatrix} \xi_1^n \end{smallmatrix}\right)M\left(\begin{smallmatrix} \xi_2^k \end{smallmatrix}\right)$. Для независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 также можно записать, что их двумерная плотность вероятности будет равна произведению одномерных плотностей, то есть

$$w(x, y) = w(x)w(y),$$

где $w(x)$ и $w(y)$ - одномерные плотности распределения вероятностей случайных величин ξ_1 и ξ_2 .

2.12. Примеры двумерных законов распределения случайных величин

1. Двумерная нормальная плотность распределения вероятностей. Нормальная совместная плотность распределения вероятностей случайных величин ξ_1 и ξ_2 имеет вид:

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}\sqrt{1-r^2}} \times \exp\left\{\frac{1}{2(1-r^2)}\left[-\frac{(x-m_{\xi_1})^2}{2\sigma_{\xi_1}^2} + 2r\frac{(x-m_{\xi_1})(y-m_{\xi_2})}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}} - \frac{(y-m_{\xi_2})^2}{2\sigma_{\xi_2}^2}\right]\right\},$$

где m_{ξ_1} и m_{ξ_2} - математические ожидания случайных величин ξ_1 и ξ_2 ;
 $\sigma_{\xi_1}^2$ и $\sigma_{\xi_2}^2$ - дисперсии случайных величин.

Для некоррелированных нормальных случайных величин ($r=0$) двумерная плотность распределения вероятностей примет вид

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}} \exp\left\{-\frac{(x-m_{\xi_1})^2}{2\sigma_{\xi_1}^2} - \frac{(y-m_{\xi_2})^2}{2\sigma_{\xi_2}^2}\right\} = w(x)w(y).$$

Из последней формулы следует, что для нормальных случайных величин ξ_1 и ξ_2 некоррелированность влечет за собой и их независимость.

2. Двумерные законы распределения случайных величин, как правило, получаются путем функционального преобразования нормально распределенных двумерных случайных величин. В качестве примера можно указать на совместное распределение модуля и фазы вектора.

В радиотехнике при квадратурной обработке сигналов часто используется преобразование

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \varphi = \arctg(\eta/\xi),$$

где ξ и η - случайные величины, а под углом φ понимается главное значение арктангенса.

Геометрически это преобразование означает переход от декартовых координат точки к полярным координатам.

Если величины ξ и η (координаты двумерного вектора) являются независимыми нормальными случайными величинами с законами распределения $N(a, \sigma)$ и $N(b, \sigma)$, то совместное распределение случайных величин ρ и φ запишется так:

$$w_{\rho\varphi}(r, \theta) = \frac{r}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta - b)^2 \right]\right\}.$$

2.13. Многомерные случайные величины

При оценке качества функционирования радиоэлектронных систем часто приходится принимать решение, анализируя несколько параметров таких систем. По определению совокупность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, заданных на одном и том же вероятностном про-

странстве, называется многомерной (n – мерной) случайной величиной или n – мерным случайным вектором:

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (2.13)$$

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называются координатами случайного вектора.

Функция распределения многомерных случайных величин определяется как

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\},$$

то есть функция распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяет вероятность того, что одновременно выполняется следующее: случайная величина ξ_1 не превосходит числа x_1 , случайная величина ξ_2 не превосходит числа x_2 , ..., случайная величина ξ_n не превосходит числа x_n .

Основные свойства многомерной функции распределения и многомерного закона распределения:

1. Многомерная плотность распределения вероятностей $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

2. Для многомерного закона распределения выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1.$$

3. При бесконечном значении аргумента $F(-\infty, -\infty, \dots, -\infty) = 0$, $F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$.

4. Многомерная функция распределения и многомерный закон распределения вероятностей связаны так:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} w(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n.$$

2.14. Числовые характеристики многомерной случайной величины

Математическое ожидание каждой i – й координаты случайного вектора определяется следующим образом:

$$M(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} x_i w(x_i) dx_i.$$

Дисперсия каждой i – той координаты случайного вектора определяется так:

$$\begin{aligned} M_2(\xi_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - m_1(\xi_i)]^2 w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - m_1(\xi_i)]^2 w(x_i) dx_i. \end{aligned}$$

Корреляционный момент ρ_{ij} (второй смешанный центральный момент второго порядка) координат ξ_i и ξ_j равен

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= M \{ [\xi_i - m_1(\xi_i)] [\xi_j - m_1(\xi_j)] \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(\xi_i)] [y - m_1(\xi_j)] w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Корреляционные моменты образуют корреляционную матрицу

$$\mathbf{K} = \|\rho_{ij}\| = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{bmatrix}.$$

Элемент корреляционной матрицы с номером $i = j$ является дисперсией координаты ξ_i случайного вектора.

Смешанные начальные моменты второго порядка

$$\mu_{ij} = M \{ \xi_i \xi_j \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

формируют ковариационную матрицу

$$\mathbf{C} = \|c_{ij}\| = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Связь элементов корреляционной и ковариационной матриц устанавливается так:

$$\mu_{ij} = \sigma_{ij} - m_1(\xi_i) m_1(\xi_j).$$

Нормированной корреляционной матрицей \mathbf{R} называется матрица, элементами которой являются коэффициенты корреляции

$$r_{ij} = \rho_{ij} / \sqrt{\rho_{ii} \rho_{jj}} = \rho_{ij} / \sqrt{M_2(\xi_i) M_2(\xi_j)}.$$

На главной диагонали матрицы \mathbf{R} стоят единицы, то есть

$$\mathbf{R} = \|r_{ij}\| = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы \mathbf{K} , \mathbf{C} и \mathbf{R} являются положительно определенными (определители этих матриц больше нуля) и симметрическими (то есть $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$, $r_{ij} = r_{ji}$).

Координаты случайного вектора будут некоррелированными, если вне главной диагонали матриц \mathbf{K} , \mathbf{C} и \mathbf{R} будут расположены элементы, равные нулю. Однако равенство нулю недиагональных элементов матриц \mathbf{K} , \mathbf{C} и \mathbf{R} не говорит о независимости координат случайного вектора. Некоррелированность координат случайного вектора говорит об их независимости только в том случае, если n -мерный вектор подчиняется n -мерному нормальному закону распределения.

2.15. Примеры n -мерных законов распределения

1. Нормальный многомерный закон распределения вероятностей. Для описания зависимых случайных величин этот закон распределения применяется наиболее часто. В векторной форме n -мерный нормальный закон распределения записывается так:

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \mathbf{K}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right],$$

где $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ - вектор средних значений вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$; $m_i = m_1(\xi_i) = M(\xi_i)$; \mathbf{K} - корреляционная матрица случайного вектора; $\det \mathbf{K}$ - определитель матрицы \mathbf{K} ; \mathbf{K}^{-1} - матрица, обратная матрице \mathbf{K} ; T - знак транспонирования.

В том случае, если матрица \mathbf{K} диагональная, закон распределения плотности вероятностей случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ будет равен

$$w(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n w(x_i),$$

то есть будет равен произведению одномерных законов распределения координат вектора.

2. Многомерный закон распределения вероятностей Дирихле. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - независимые случайные величины, подчиняющиеся гамма - распределению $\Gamma(v_1, 1), \Gamma(v_2, 1), \dots, \Gamma(v_n, 1)$. Сформируем новые случайные величины

$$y_i = \frac{\xi_i}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Случайный вектор (y_1, y_2, \dots, y_n) имеет n -мерный закон распределения Дирихле

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\Gamma(v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1})}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)\dots\Gamma(v_{n+1})} \times \\ \times x_1^{v_1-1} x_2^{v_2-1} \dots x_n^{v_n-1} (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n)^{v_{n+1}-1}$$

в любой точке симплекса $S_n \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; x_i \geq 0; i = \overline{1, n}; \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$ и равен нулю в других точках пространства.

Обозначают распределение Дирихле как $D(v_1, v_2, \dots; v_{n+1})$ или, реже, $Dir(v_1, v_2, \dots; v_{n+1})$. Математическое ожидание, дисперсия распределения Дирихле равны

$$m_1(y_i) = \frac{v_i}{v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1}}, \quad i = \overline{1, k}, \\ D(y_i) = \frac{v_i(v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1} - v_i)}{(v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1})^2 (v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1} + 1)}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Коэффициент корреляции случайных величин y_i и y_j равен

$$r_{ij}(y_i, y_j) = - \frac{v_i v_j}{(v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1})^2 (v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1} + 1)}, \quad \begin{matrix} i, j = \overline{1, k} \\ i \neq j \end{matrix}.$$

2.16. Числовые характеристики суммы, произведения и отношения случайных величин

1. Математическое ожидание суммы случайных величин. Сформируем случайную величину ν , равную сумме случайных величин $\xi_i, i = \overline{1, n}$, то есть

$$v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Математическое ожидание суммы равно

$$m_1(v) = m_1(\xi_1) + m_1(\xi_2) + \dots + m_1(\xi_n) = \sum_{i=1}^n m_1(\xi_i),$$

то есть математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий. Последнее справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин.

С учетом свойств математического ожидания случайная величина

$$v = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i + b_i, \quad (2.14)$$

где $c_i, i = \overline{1, n}$, и $b_i, i = \overline{1, n}$, - детерминированные величины, будет иметь математическое ожидание

$$\begin{aligned} m_1(v) &= c_1 m_1(\xi_1) + b_1 + c_2 m_1(\xi_2) + b_2 + \dots + c_n m_1(\xi_n) + b_n = \\ &= \sum_{i=1}^n [c_i m_1(\xi_i) + b_i]. \end{aligned}$$

2. Дисперсия суммы случайных величин. Сделаем предположение, что случайные величины $\xi_i, i = \overline{1, n}$, независимы. Тогда дисперсия суммы

$$v = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

будет равна

$$D(v) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots + D(\xi_n) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i),$$

то есть дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых. Дисперсия суммы независимых случайных величин не зависит от знака случайных величин, то есть дисперсия суммы случайных величин вида

$$v = \xi_1 \pm \xi_2 \pm \dots \pm \xi_n$$

будет равна сумме дисперсий слагаемых

$$D(v) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i).$$

Дисперсия суммы зависимых случайных величин определяется так:

$$D(v) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i) + \sum_{i \neq j}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \sqrt{D(\xi_i)D(\xi_j)},$$

где r_{ij} - нормированный коэффициент корреляции ($-1 \leq r \leq 1$) случайных величин ξ_i и ξ_j .

Дисперсия суммы случайных величин вида (2.14) определится следующим образом

$$D(v) = \sum_{i=1}^n c_i^2 D(\xi_i) + \sum_{i \neq j}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j r_{ij} \sqrt{D(\xi_i)D(\xi_j)}.$$

Из последних формул следует, что дисперсия суммы зависимых случайных величин зависит от их коррелированности. При отрицательных значениях r_{ij} дисперсия суммы уменьшается.

3. Математическое ожидание произведения случайных величин. Сформируем случайную величину v , равную произведению случайных величин $\xi_i, i = \overline{1, n}$, то есть

$$v = \prod_{i=1}^n \xi_i.$$

В том случае, когда случайные величины $\xi_i, i = \overline{1, n}$, независимы, математическое ожидание произведения равно

$$m_1(v) = \prod_{i=1}^n m_1(\xi_i),$$

то есть математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей.

Запишем математическое ожидание произведения двух зависимых случайных величин, ограничиваясь двумя сомножителями, то есть положим $v = \xi_1 \xi_2$. Математическое ожидание случайной величины V будет равно

$$M(v) = M(\xi_1 \xi_2) = M(\xi_1)M(\xi_2) + M_2(\xi_1 \xi_2).$$

Последняя формула непосредственно следует из определения центральных и начальных смешанных моментов двумерной случайной величины. То есть математическое ожидание произведения двух слу-

чайных величин равно сумме произведений их математических ожиданий и второго смешанного центрального момента.

4. Дисперсия произведения независимых случайных величин. Дисперсия случайной величины $v = \xi_1 \xi_2$ равна

$$D(v) = D(\xi_1)D(\xi_2) + m_1^2(\xi_1)D(\xi_2) + m_1^2(\xi_2)D(\xi_1).$$

Для некоррелированных случайных величин с нулевым математическим ожиданием дисперсия произведения равна

$$D(v) = D(\xi_1)D(\xi_2).$$

5. Математическое ожидание и дисперсия отношения случайных величин. Пусть имеется случайная величина v , равная отношению случайных величин ξ_1 и ξ_2 , то есть

$$v = \xi_1 / \xi_2.$$

В общем случае как для независимых, так и для зависимых случайных величин справедливо следующее утверждение: числовые характеристики отношения случайных величин не равны отношению числовых характеристик числителя и знаменателя, то есть

$$m_n(v) \neq \frac{m_n(\xi_1)}{m_n(\xi_2)}, \quad M_n(v) \neq \frac{M_n(\xi_1)}{M_n(\xi_2)}.$$

Из последних формул для математического ожидания и дисперсии отношения независимых случайных величин следует, что

$$m_1(v) \neq \frac{m_1(\xi_1)}{m_1(\xi_2)}, \quad D(v) \neq \frac{D(\xi_1)}{D(\xi_2)}.$$

Для нахождения числовых характеристик отношения случайных величин обычно поступают так.

1. С помощью известных формальных правил [9-11] определяется закон распределения случайной величины v и затем определяются моменты полученного закона распределения. Наиболее просто определяется закон распределения величины v с использованием свойств характеристических функций.

Приведем два примера. Пусть независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 подчиняются нормальному распределению $N(0,1)$. Тогда случайная величина v подчиняется закону распределения $w(x)$ с функцией распределения $F(x)$

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right), \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}.$$

Этот закон распределения называется стандартным распределением Коши и часто обозначается как $C(0,1)$. Этот закон распределения не имеет моментов, так как интегралы

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n w(x) dx \quad (2.15)$$

расходятся. Часто говорят, что математическое ожидание случайной величины с распределением Коши не определено, а дисперсия равна бесконечности.

Если независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 подчиняются экспоненциальным распределениям с параметрами соответственно λ_1 и λ_2 , то закон распределения их отношения выглядит так:

$$w(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2(1 + \lambda_1 x / \lambda_2)^2}.$$

Этот закон распределения вероятностей называется бета-распределением второго рода. Он не имеет моментов, так как соответствующие интегралы расходятся. Как и в случае закона распределения Коши, говорят, что его математическое ожидание не определено, а дисперсия равна бесконечности.

Приведенные примеры типичны. Интегралы вида (2.15) в большинстве случаев расходятся и при определении моментов отношения случайных величин ξ_1 и ξ_2 с другими законами распределения вероятности.

Моменты законов распределения отношения случайных величин зависят от механизма его формирования. Для отношения независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 вида

$$v = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$$

моменты закона распределения могут существовать. Например, в том случае, когда величины ξ_1 и ξ_2 независимы, и подчиняются гамма-распределениям $\Gamma(\alpha,1)$ и $\Gamma(\beta,1)$ соответственно, то распределение вероятностей случайной величины V будет подчиняться бета-распределению $B(\alpha, \beta)$

$$w(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \alpha, \beta > 0,$$

где $B(\cdot, \cdot)$ – бета-функция.

Функция распределения бета-распределения равна

$$F(x) = I_x(\alpha, \beta),$$

где $I_x(\alpha, \beta)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода.

Начальные моменты этого распределения определяются по формуле

$$m_n = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + \beta + n)\Gamma(\alpha)},$$

то есть они конечны.

Математическое ожидание и дисперсия будут равны

$$m_1(v) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad D(v) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

2. Другой способ определения моментов закона распределения отношения случайных величин $v = \xi_1 / \xi_2$ заключается в определении моментов случайной величины $1 / \xi_2$, то есть вычисляются интегралы вида

$$m_n(1 / \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (1/x)^n w(x) dx,$$

где $w(x)$ – закон распределения случайной величины ξ_2 , и затем определяются математическое ожидание, дисперсия и высшие моменты произведения случайных величин ξ_1 и $1 / \xi_2$. Часто моменты распределения случайной величины $1 / \xi_2$ определяются проще, чем определение закона распределения отношения случайных величин.

В качестве примера определим моменты закона распределения случайной величины $1 / \xi_2$, если величина ξ_2 подчиняется равномерному закону распределения вероятностей $R(0,1)$. Из выражения для определения начальных моментов для этого случая

$$m_n(1 / \xi_2) = \int_0^1 \frac{1}{x^n} dx$$

видно, что закон распределения случайной величины $1 / \xi_2$ не имеет моментов, так как интеграл, через который выражаются моменты распределения, расходится. Поэтому и распределение случайной величины $v = \xi_1 / \xi_2$, распределенной равномерно, не будет иметь моментов.

2.17. Центральная предельная теорема

Многие алгоритмы моделирования случайных величин основаны на центральной предельной теореме. В самой простой формулировке (в классической формулировке) эта теорема формулируется следующим образом [10].

Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, имеющих конечное математическое ожидание $m_1(\xi_i) = m_1, i = \overline{1, n}$, и конечную дисперсию $D(\xi_i) = D, i = \overline{1, n}$. образуем сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Тогда случайная величина $\frac{S_n - m_1 n}{\sqrt{Dn}} \rightarrow N(0,1)$ по распределению при

$n \rightarrow \infty$. Другими словами, случайная величина $\frac{S_n - m_1 n}{\sqrt{Dn}}$ сходится

(по вероятности) к стандартной нормальной случайной величине.

С учетом центральной предельной теоремы справедливо следующее: случайная величина (при условии конечности ее первых двух моментов) S_n сходится к нормальной случайной величине $N(nm_1, nD)$ при неограниченном увеличении числа n .

Всегда выполняется и следующее: сумма нормально распределенных случайных величин всегда имеет нормальный закон распределения при любом числе слагаемых n .

Результат классической формулировки центральной предельной теоремы распространяется и на сумму случайных величин с различными законами распределений, и на сумму зависимых случайных величин. Скорость сходимости закона распределения вероятности для таких случайных величин к нормальному распределению может быть меньше.

Скорость сходимости закона распределения суммы к нормальному закону оценивается с помощью неравенства Бери - Эссена [18]. Для одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ с нулевым математическим ожиданием скорость сходимости определится в виде

$$|F_n(x) - F_N(x)| \leq 0.4784 \frac{\rho}{\sigma^3 \sqrt{n}},$$

где $F_n(x)$ - интегральная функция распределения стандартной нормальной величины; $\sigma^2 = D(\xi_i)$ -дисперсия случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; $F_N(x)$ - интегральная функция распределения случайной величины $\sum_{i=1}^n \xi_i / \sigma \sqrt{n}$; $\rho = M\left(\left|\xi_i^3\right|\right) < \infty$.

В том случае, когда случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют различные законы распределений, скорость сходимости определяется по формуле

$$\left|F_n(x) - F_N(x)\right| \leq 0.4784 \frac{q}{z^3},$$

где $q = \sum_{i=1}^n \rho_i$; $\rho_i = M\left(\left|\xi_i^3\right|\right)$; $\sigma_i^2 = D(\xi_i)$; $z^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Видно, что приведенные соотношения для оценки скорости сходимости используют поведение функции распределения во всей области существования случайной величины. Единственное ограничение для их применения – конечность моментов распределения.

Более просто возможно оценить меру сходимости закона распределения к нормальному, используя коэффициенты асимметрии β_1 и эксцесса β_2 . Однако использование только первых четырех моментов закона распределения вероятностей позволяет получить лишь более грубую оценку сходимости. Если, например, закон распределения случайных величин будет иметь несколько мод, то использование коэффициентов β_1 и β_2 может привести к ложным выводам. Поэтому использование коэффициентов асимметрии и эксцесса для оценки скорости сходимости распределения суммы случайных величин к нормальному оправданно лишь при одномодальных распределениях слагаемых.

На рис. 2.8 приведены графики закона распределения случайной величины S_n при разном числе слагаемых n . Принято, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ подчиняются экспоненциальному закону распределения $Exp(\lambda)$ с параметром $\lambda = 1$. При построении графиков использовано воспроизводящее свойство гамма-распределения [11]. Это свойство позволяет считать, что сумма n экспоненциально распределенных случайных величин с одинаковым параметром λ подчиняется гамма-распределению $\Gamma(n, \lambda)$. Из рисунка видно, что при увеличении

числа слагаемых закон распределения их суммы стремится к нормальному закону распределения.

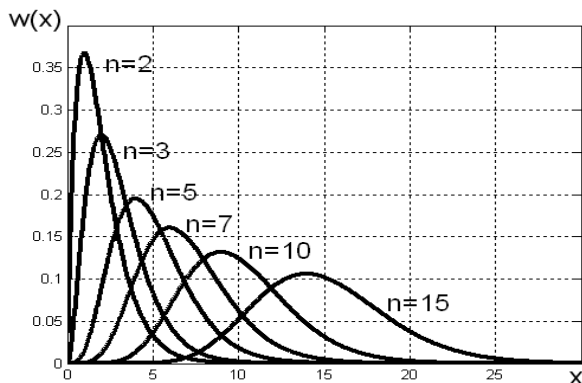


Рис. 2.8. Закон распределения суммы случайных величин, распределенных экспоненциально

На рис. 2.9 приведены коэффициенты асимметрии и эксцесса для суммы случайных величин, распределенных экспоненциально с параметром $\lambda = 1$.

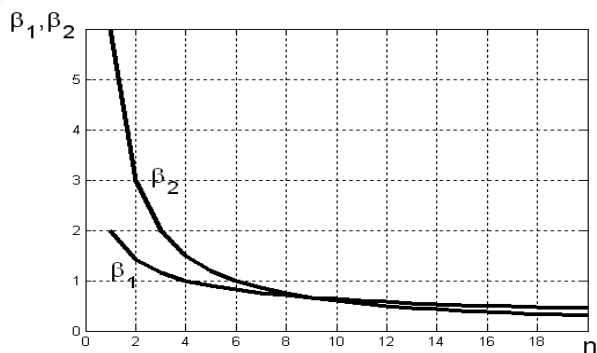


Рис. 2.9. Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Из рис. 2.9 видно, что коэффициенты β_1 и β_2 достаточно быстро стремятся к нулевому значению. Поэтому поведение этих коэффициентов может служить в первом приближении мерой сходимости суммы случайных величин к нормальному закону распределения.

Часть 3. Случайные процессы

3.1. Понятие случайного процесса. Виды случайных процессов

Функция $\xi(x)$ действительного аргумента x называется случайной, если для каждого фиксированного значения аргумента x она является случайной величиной. Аргументом x могут являться время, частота и фаза радиосигнала, другие физические параметры. Если параметром x является время t , то функция $\xi(t)$ называется случайным процессом. Примерами случайных процессов служат тепловые шумы радиоустройств, изменение напряженности электромагнитного поля в точке приема радиоволн, изменение во времени частоты принимаемого сигнала и т.д.

Различают скалярные и векторные случайные процессы, скалярные и векторные случайные поля [15]. Ниже под случайным процессом будет пониматься только скалярный случайный процесс – процесс, область значений которого есть множество значений в пространстве действительных чисел.

Если для детерминированного процесса можно с вероятностью единица предсказать его поведение даже в далеком будущем (или в «прошлом»), то для случайного процесса это выполнить невозможно.

Отличие случайного процесса от случайной величины состоит в следующем. Если случайная величина задается множеством значений и распределением вероятностей на этом множестве, то случайный процесс $\xi(t)$ задается множеством функций времени.

$$\xi(t) = \left\{ \xi^{(k)}(t), t \in T \right\}$$

и вероятностной мерой на этом множестве. Иначе говоря, случайный процесс есть ансамбль реализаций, заданный с какой-то вероятностной мерой, например, многомерным законом распределения вероятностей.

Множество T значений времени t называется областью определения случайного процесса $\xi(t)$. Множество, к которому принадлежат возможные значения процесса $\xi(t)$, называется областью значений случайного процесса.

Зафиксированная, то есть записанная на каком-либо носителе (на бумаге, пленке или в оперативном запоминающем устройстве) функция $\xi^{(k)}(t)$ называется реализацией (траекторией случайного процесса, выборочной функцией) случайного процесса. Величина k называется номером реализации. Каждая реализация случайного процесса является детерминированной функцией.

На практике очень часто приходится иметь дело с самыми различными процессами, имеющими разную физическую природу. Классификация случайных процессов может быть проведена по самым различным признакам.

По характеру реализаций различают следующие основные виды случайных процессов.

- Непрерывный случайный процесс. Это такой процесс, у которого область значений и область определения - непрерывные множества. Другими словами, функция $\xi(t)$ принимает значения из некоторого непрерывного пространства и время t также непрерывно. Реализация такого процесса показана на рис. 3.1. Примером такого процесса может служить шумовое напряжение в первых каскадах приемников. Другим примером может служить зависимость мощности принимаемого радиосигнала от времени.

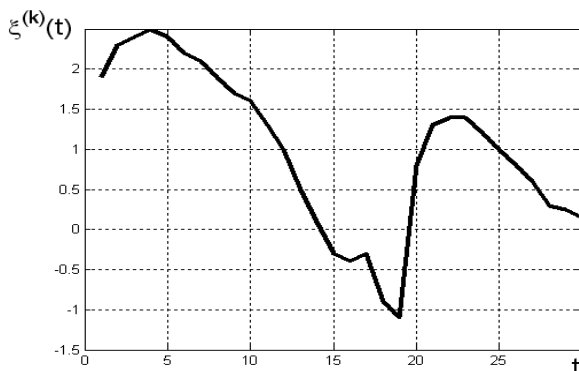


Рис. 3.1 Реализация непрерывного случайного процесса

- Случайная последовательность (непрерывный случайный процесс с дискретным временем). Это такой случайный процесс, у которого область значений - непрерывное множество, а область определения - дискретное множество. Примером такого процесса могут служить отсчеты случайного непрерывного процесса после его дискретизации по времени. Реализация случайной последовательности приведена на рис. 3.2.

- Дискретная случайная последовательность (дискретный процесс с дискретным временем). У такой последовательности и область значений, и область определения - дискретные множества. То есть случайная величина $v_i = \xi(t_i)$ принимает только дискретное множество

значений v_1, v_2, \dots, v_M . Время t также принимает только дискретные значения t_1, t_2, \dots, t_N . Множества $\{v_i\}$ и $\{t_i\}$ могут быть конечными и бесконечными. В последнем случае $M, N \rightarrow \infty$. Примерами дискретных случайных последовательностей могут служить последовательности импульсов, появляющиеся в дискретные моменты времени, после квантования амплитуд импульсов по уровню. На рис. 3.3 показана реализация случайной дискретной последовательности. Отличие от реализации случайной последовательности состоит в том, что случайная величина $v_i = \xi(t_i)$ принимает только дискретное множество значений.

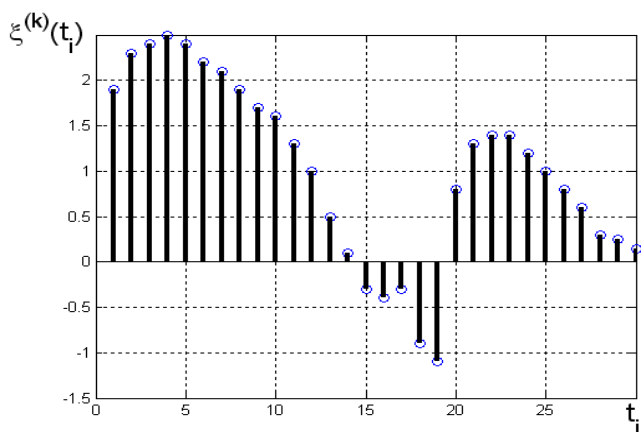


Рис. 3.2 Реализация случайной последовательности

- Дискретный случайный процесс (дискретный случайный процесс с непрерывным временем). У такого процесса область значений дискретная, а область определения – непрерывное множество. В этом случае $\xi(t)$ принимает счетное множество значений, а время t - континуум значений $[t \in (0, T)]$ на интервале наблюдений T . Примером случайного дискретного процесса является процесс на выходе квантователя. На рис. 3.4 приведена реализация такого процесса.

Приведены примеры самых распространенных случайных процессов. При решении практических задач встречаются и другие типы случайных процессов [9-15].

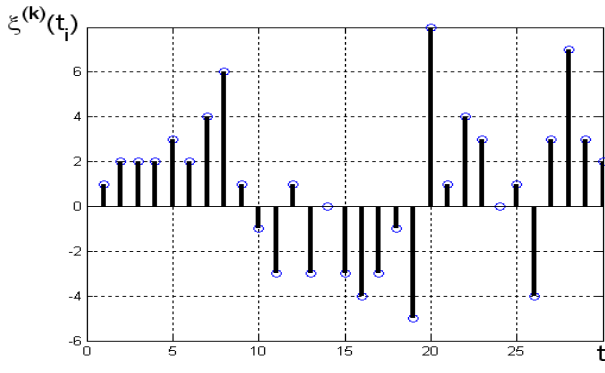


Рис. 3.3. Реализация дискретной случайной последовательности

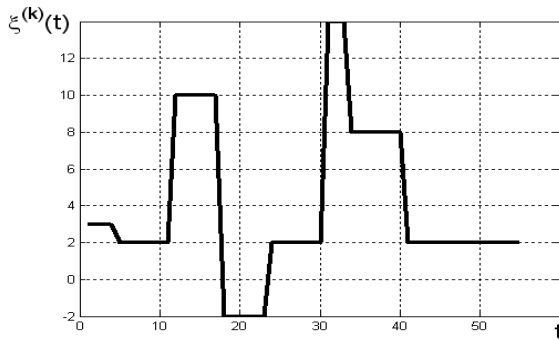


Рис. 3.4 Реализация дискретного случайного процесса

3.2. Описание случайных процессов

Выше отмечено, что случайный процесс при каждом фиксированном значении аргумента x является случайной величиной. Поэтому для вероятностного описания случайных процессов применяется тот же самый математический аппарат, что и для случайных величин. Это функции распределения и законы распределения, характеристические, моментные и кумулянтные функции [9-15]. В отличие от случайных величин в упомянутые характеристики должно обязательно входить время согласно определению случайного процесса.

Фиксируя момент времени t_1 , находим одномерную функцию распределения случайного процесса

$$F_1(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1) \leq x_1\},$$

зависящую от двух переменных, для одного сечения случайного процесса.

Одномерный закон распределения вероятностей определяется дифференцированием функции распределения

$$w_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1}.$$

Функции $F_1(x_1, t_1)$ и $w_1(x_1, t_1)$ являются простейшими характеристиками случайного процесса. Они позволяют получить представление о процессе лишь в отдельные, фиксированные моменты времени. Или, другими словами, лишь в отдельных сечениях случайного процесса.

Более полное представление о случайном процессе позволяет получить двумерная функция распределения [совместная вероятность того, что случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2)$ находятся ниже уровней x_1, x_2]:

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2\}$$

и соответствующий ей двумерный закон распределения вероятностей процесса $\xi(t)$:

$$w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Двумерная функция распределения и соответствующий ей двумерный закон распределения вероятностей определяют поведение случайного процесса в двух его сечениях, то есть в два момента времени t_1 и t_2 . Они позволяют учесть статистическую связь между значениями случайного процесса в эти моменты времени.

Можно определить и вероятность того, что случайная функция $\xi(t)$ в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n будет находиться ниже уровней x_1, x_2, \dots, x_n . Функция $2n$ переменных

$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$ называется n -мерной функцией распределения случайного процесса $\xi(t)$.

Функция

$$w_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

называется n -мерным законом распределения вероятностей случайного процесса, причем чем больше n , тем более детально описываются свойства случайного процесса.

Другие названия n -мерного закона распределения $w_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ и n -мерной функции распределения $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ - конечномерный закон распределения и конечномерная функция распределения. Совокупность функций распределения при различных n и всех возможных значениях времени $t_i, i = \overline{1, n}$ называется семейством конечномерных распределений случайного процесса.

Два процесса, у которого конечномерные законы распределения одинаковы, называются эквивалентными.

Необходимо отметить и следующее. Конечномерный закон распределения в общем не является исчерпывающей характеристикой случайного процесса, поскольку у последнего область определения непрерывна. Но, как отмечено выше, увеличивая n , можно неограниченно приближаться к тому закону распределения вероятностей, который полностью характеризует свойства случайного процесса. Конечномерный закон распределения полностью характеризует лишь случайные последовательности, поскольку область их определения счетна.

Свойства конечномерных функций распределения и конечномерных законов распределения вероятностей случайного процесса обладают всеми свойствами функций распределения и законов распределения, изложенных выше для случайных величин. Кроме того, обычно добавляются и следующие свойства. Функции распределения и законы распределения случайного процесса должны удовлетворять условию симметрии, то есть

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_n(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}; t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_n}),$$

$$w_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = w_n(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}; t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_n}),$$

где k_1, k_2, \dots, k_n - целые числа от 1 до n , расположенные в произвольном порядке.

На практике это значит, что конечномерные функции распределения и законы распределения не зависят от нумерации моментов времени и величин $x_i, i = \overline{1, n}$.

Функции распределения и законы распределения случайного процесса должны удовлетворять условию согласованности: при $m < n$ и любых $t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_n$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n) &= \\ &= F_m(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m), \\ w_m(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_{m+1}, \dots, t_n) dx_{m+1}, dx_n. \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что из n -мерного закона распределения всегда можно получить закон распределения меньшей размерности интегрированием n -мерного закона распределения по соответствующим аргументам.

Как и для случайных величин, для вероятностного описания случайных процессов используются характеристические функции, что в ряде случаев позволяет упростить решение прикладных задач.

По определению n -мерной характеристической функцией является

$$\begin{aligned} \theta(jv_1, jv_2, \dots, jv_n) &= m_1 \{ \exp(jv_1 \xi_1 + jv_2 \xi_2 + \dots + v_n j \xi_n) \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jv_1 x_1 + jv_2 x_2 + \dots + jv_n x_n) \times \\ &\quad \times w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Конечномерный закон распределения по известной характеристической функции определяется преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(jv_1 x_1 + jv_2 x_2 \dots + jv_n x_n)] \times \\ &\quad \times \theta(jv_1, jv_2, \dots, jv_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dv_1 dv_2 \dots dv_n. \end{aligned}$$

Для одномерного случая пара преобразований запишется так:

$$\begin{aligned} \theta_1(jv, t) &= m_1 \{ \exp(jv \xi) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jvx) w(x; t) dx; \\ w_1(x; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-jvx) \theta_1(jv; t) dv. \end{aligned}$$

Для получения n одномерных функций в пару преобразований Фурье необходимо последовательно подставить n значений времени $t_i, i = \overline{1, n}$.

3.3. Корреляционная функция случайного процесса

В качестве более простых характеристик случайного процесса на практике часто используются корреляционные функции. Но вначале необходимо ввести понятие моментной функции. По определению начальными моментными функциями называются функции

$$m_{q_1 q_2 \dots q_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = m_1 \left\{ \xi^{q_1}(t_1) \xi^{q_2}(t_2) \dots \xi^{q_n}(t_n) \right\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} w_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

где $q_i, i = \overline{1, n}$, - неотрицательные целые числа, являющиеся математическими ожиданиями соответствующих произведений.

Начальный момент $m_{q_1 q_2 \dots q_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, зависящий от n несовпадающих аргументов t_1, t_2, \dots, t_n , называется начальным n -мерным моментом $(q_1 + q_2 + \dots + q_n)$ -го порядка. Моментные функции неоднозначно характеризуют случайный процесс, поскольку у двух разных случайных процессов (имеющих различные конечномерные законы распределения) могут быть одинаковыми моментные функции нескольких порядков.

Наряду с начальными моментами функциями используются и центральные моментные функции:

$$\sigma_{q_1 q_2 \dots q_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = m_1 \left\{ \left[\xi(t_1) - m_{1\xi_1} \right]^{q_1} \times \right. \\ \left. \times \left[\xi(t_2) - m_{1\xi_2} \right]^{q_2} \dots \left[\xi(t_n) - m_{1\xi_n} \right]^{q_n} \right\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{1\xi_1})^{q_1} \dots (x_n - m_{1\xi_n})^{q_n} \times \\ \times w_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

где $m_{1\xi_i}$ - математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$ в i -й момент времени.

Для решения практических задач особую роль играют две моментные функции первого и второго порядка. Начальная моментная функция первого порядка

$$m_1\{\xi(t)\} = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xw_1(x,t)dt$$

называется математическим ожиданием случайного процесса.

Центральная моментная функция второго порядка

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t_1, t_2) &= R_{\xi}(t_1, t_2) = m_1\left\{\left[\xi(t_1) - m_{1\xi 1}\right]\left[\xi(t_2) - m_{1\xi 2}\right]\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{1\xi 1})(x_2 - m_{1\xi 2})w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2 \end{aligned}$$

называется корреляционной функцией случайного процесса $\xi(t)$.

Часто в практических приложениях используется начальная моментная функция второго порядка, называемая ковариационной функцией, то есть

$$\begin{aligned} m_{11}(t_1, t_2) &= K_{\xi}(t_1, t_2) = m_1\left\{\left[\xi(t_1)\right]\left[\xi(t_2)\right]\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2. \end{aligned}$$

Связь между корреляционной и ковариационной функциями устанавливается соотношением

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) + m_1[\xi(t_1)]m_1[\xi(t_2)].$$

3.4. Классификация случайных процессов по вероятностным характеристикам

Выше приведена классификация случайных процессов по виду их реализаций, то есть по виду области определения случайного процесса и пространства его значений. Знание вероятностных характеристик случайных процессов позволяет провести классификацию по особенностям поведения их конечномерных законов распределения, математического ожидания и корреляционной функции.

3.5. Стационарные случайные процессы

Случайный процесс называется стационарным в узком смысле, если все его конечномерные функции распределения вероятностей (и

законы распределения вероятностей) инвариантны относительно сдвига по времени. Другими словами, процессы $\xi(t)$ и $\xi(t-t_0)$ имеют одинаковые статистические характеристики, то есть имеют одинаковые функции распределения при любом t_0 . То есть для функции распределения и закона распределения можно записать, что

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 - t_0, t_2 - t_0, \dots, t_n - t_0),$$

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 - t_0, t_2 - t_0, \dots, t_n - t_0).$$

Для стационарных случайных процессов в узком смысле соответствующие равенства имеют место и для моментных, корреляционных и характеристических функций.

Случайные процессы, не удовлетворяющие перечисленным свойствам, часто называют нестационарными случайными процессами в узком смысле.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным порядка m , если вышеприведенные условия выполняются не для всех n , а только для $n \leq m$.

На практике условия стационарности в узком смысле для произвольного случайного процесса трудно проверить. Сформулирован ряд необходимых (но недостаточных) условий стационарности в узком смысле.

1. Одномерная функция распределения не должна зависеть от времени, то есть

$$F_1(x, t) = F_1(x, t + t_0) = F_1(x).$$

2. Математическое ожидание и дисперсия стационарного в узком смысле случайного процесса не должны зависеть от времени, так как одномерные законы распределения вероятностей не зависят от времени:

$$m_1\{\xi(t)\} = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x) dx = m_{1\xi}, \quad (3.1)$$

$$D\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1\{\xi(t)\}]^2 w_1(x) dx = D_{\xi},$$

где $w_1(x)$ - одномерный закон распределения случайного процесса.

3. Двумерная функция распределения не должна зависеть от моментов времени t_1, t_2 , а только от их разности.

Корреляционная функция стационарного в узком смысле случайного процесса будет зависеть только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$:

$$\begin{aligned} R_{\xi}(\tau) &= R_{\xi}(t_1, t_2) = m_1 \left\{ \left[\xi(t) - m_{1\xi} \right] \left[\xi(t + \tau) - m_{1\xi} \right] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{1\xi})(x_2 - m_{1\xi}) w_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = \\ &= m_1 \left\{ \xi(t) \xi(t + \tau) \right\} - m_{1\xi}^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $w_2(x_1, x_2; \tau)$ - двумерный закон распределения случайного процесса $\xi(t)$.

На практике многие задачи решаются при использовании только первых двух моментов - математического ожидания и корреляционной функции. По умолчанию полагается, что закон распределения исходных данных подчиняется многомерному нормальному закону распределения. Для этого случая введено понятия стационарности в широком смысле.

Случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если только его математическое ожидание и корреляционная функция инвариантны относительно сдвига во времени. Другими словами, его математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$. Можно записать, что

$$\begin{aligned} m_1 \left\{ \xi(t) \right\} &= m_{1\xi}, \\ R_{\xi}(\tau) &= R_{\xi}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Из изложенного выше можно сделать вывод, что стационарность в узком смысле влечет за собой стационарность в широком смысле. Обратное утверждение в общем случае неверно. Доказано только одно исключение. Для гауссовских случайных процессов стационарность в широком смысле влечет за собой стационарность в узком смысле.

3.6. Эргодические случайные процессы.

Математическое ожидание и корреляционная функция стационарного случайного процесса, определенные по формулам (3.1), (3.2), требуют статистического усреднения по ансамблю реализаций. Существуют случайные процессы, вероятностные характеристики которых мож-

но определить по одной единственной реализации достаточно большой длительности.

Стационарный случайный процесс называется эргодическим в узком смысле, если его любая вероятностная характеристика, полученная по одной реализации, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, совпадает с вероятностной характеристикой, полученной по ансамблю реализаций.

Для начальных моментов эргодического случайного процесса можно записать, что

$$m_1 \{[\xi(t)]^n\} = m_n \{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n w(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi^{(k)}(t)]^n dt.$$

Часто усреднение по времени обозначают знаком $\langle \cdot \rangle$. Поэтому последнюю формулу можно переписать в виде

$$m_1 \{[\xi(t)]^n\} = \langle [\xi^{(k)}(t)]^n \rangle.$$

Математическое ожидание и дисперсия эргодического случайного процесса определяются по формулам

$$m_1 \{\xi(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^{(k)}(t) dt,$$

$$D\{\xi(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi^{(k)}(t) - m_1 \{\xi(t)\}]^2 dt.$$

Корреляционная функция эргодического случайного процесса также определяется по одной реализации

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} [\xi^{(k)}(t) - m_1 \{\xi(t)\}] [\xi^{(k)}(t + \tau) - m_1 \{\xi(t)\}] dt.$$

Часть 4. Моделирование случайных величин

4.1. Вводные замечания

Многие широко использованные на практике способы моделирования случайных величин с произвольными законами распределения основаны на нелинейных преобразованиях равномерно распределённой на интервале $(0, 1)$ случайной величины. Поэтому генерирование таких равномерно распределённых случайных чисел является одной из основных задач при моделировании случайных радиосигналов и помех. Часто совокупность независимых равномерно распределённых в

интервале $(0, 1)$ случайных величин называется последовательностью базовых случайных чисел. Не всегда имеется возможность получения базовых чисел на универсальных ЦВМ. Поэтому вместо случайных чисел используются так называемые псевдослучайные, которые формируются в результате выполнения специальной программы - генератора псевдослучайных чисел. Это программа многократного использования, при каждом обращении к ней вырабатывается одно число псевдослучайной последовательности. Псевдослучайные числа заменяют в процессе моделирования базовые случайные числа.

Так как адекватность сформированных на ЦВМ моделей сигналов и помех в значительной мере будет зависеть от степени соответствия псевдослучайных чисел базовым, необходимы критерии оценки их свойств. Среди набора статистических тестов, которые используются для проверки качества сформированных псевдослучайных последовательностей, следует выделить основные.

4.2. Статистические тесты для проверки «качества» псевдослучайных величин

Важной проверкой является оценка равномерности распределения. Введём понятие k -равномерности [5,6].

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ - последовательность выборочных значений для равномерного распределения в $(0,1)$. Составим векторы $\eta_1^{(k)}, \eta_2^{(k)}, \dots, \eta_n^{(k)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_1^{(k)} &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \\ \eta_2^{(k)} &= (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{2k}), \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_n^{(k)} &= (\alpha_{k(n-1)+1}, \alpha_{k(n-2)+2}, \dots, \alpha_{nk}). \end{aligned}$$

С вероятностью 1 такие векторы равномерно заполняют «единичный» k -мерный куб. То есть вероятность попадания вектора в любую «прямоугольную» область куба стремится к объёму этой области при $n \rightarrow \infty$. Бесконечные последовательности таких чисел, обладающие такими свойствами, называются k -равномерными. Однако осуществление этой важной проверки очень трудоёмко при анализе псевдослучайных чисел. Поэтому часто ограничиваются проверкой k -равномерности в «единичном» кубе невысокой размерности ($k=1,2,3,4$).

Для случая $k=2$ проверка осуществляется следующим образом. Область единичного квадрата разбивается на l подобластей с одинаковой площадью p_i ; так, чтобы сумма площадей равнялась $\sum_{i=1}^l p_i = 1$.

Возьмём отрезок псевдослучайной последовательности, состоящей из $2N$ чисел, и образуем из них N пар $(\gamma_0, \gamma_1), (\gamma_2, \gamma_3), \dots, (\gamma_{2N-1}, \gamma_{2N})$. Каждая из этих пар определяет точку в единичном квадрате. Обозначим через $\alpha_2^{(k)}$ частоту попаданий в i -ю подобласть. Через $N_i, i = \overline{1, l}$, обозначим ожидаемую частоту попадания. Для равномерного распределения эта частота равна

$$N_i = \frac{N}{l}.$$

Для достаточно большого N величина

$$\hat{\chi}_{e-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^l (n_i - Ne^{-1})^2}{Ne^{-1}}$$

при проверке гипотезы о равномерности и независимости последовательности пар $(\gamma_0, \gamma_1), (\gamma_2, \gamma_3), \dots, (\gamma_{2N-1}, \gamma_{2N})$ приближенно распределена как $\hat{\chi}_{e-1}^2$ (хи-квадрат распределения с $e-1$ степенями свободы).

Если $\hat{\chi}_{e-1}^2 > \chi_{e-1}^2(v)$, где $\chi_{e-1}^2(v)$ определяется уравнением $P[\hat{\chi}_{e-1}^2 \geq \chi_{e-1}^2(v)] = P \ll v$, то гипотезу о равномерности и независимости последовательности следует поставить под сомнение. Величину $\chi_{e-1}^2(v)$ называют доверительной вероятностью с уравнением значимости v и определяют по таблицам хи-квадрат распределения. Значение v обычно выбирают в пределах 0,05-0,001. Длину последовательности N выбирают из условия, чтобы $Ne^{-1} \geq 10$.

Аналогично рассмотренному случаю можно организовать проверку и для $k > 2$.

Для проверки сформированной псевдослучайной последовательности рекомендуется использовать следующее свойство независимых, равномерно распределенных в интервале $(0,1)$ случайных чисел. Если

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ независимы и равномерно распределены в интервале $(0,1)$, то случайная величина

$$\eta = \mu^k,$$

где $\mu = \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, имеет равномерное распределение в интервале $(0,1)$. Для осуществления такой проверки необходимо генерировать N последовательностей, состоящих из k чисел каждая, выбирать из каждой последовательности максимальное число и возводить его в k -ю степень. Для проверки гипотезы о равномерности полученной таким образом последовательности из N элементов можно использовать критерий согласия хи-квадрат.

Целесообразно исследовать и корреляционные свойства формируемых последовательностей. Для этого вычисляют статистические оценки коэффициента корреляции $r(l)$ для пар (α_i, α_l)

$$\hat{r}(l) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha_i - 0,5)(\alpha_{i+l} - 0,5), l = 1, 2, \dots,$$

и определяют, насколько значимо они отличаются от нуля. Эта проверка, однако, является слабой. В частности, из условия $\hat{r}(l) = 0$ не следует, что сформированная последовательность будет равномерной. Условие $\hat{r}(l) = 0$ говорит лишь о том, что пары (α_i, α_l) будут некоррелированные. Однако корреляционные моменты высших порядков для пар (α_i, α_l) могут отличаться от нуля.

Выполнение рассмотренных проверок позволяет оценить, по крайней мере, качество генерируемой псевдослучайной последовательности в первом приближении. Вместе с тем считается, что лучшей проверкой датчиков является решение типовых задач, допускающих независимую проверку полученных результатов аналитическими или численными методами. То есть представление о надёжности псевдослучайных чисел создаётся в процессе их использования с тщательной проверкой результатов, когда это возможно.

4.3. Моделирование непрерывных случайных величин с заданным законом распределения

Практически все методы моделирования случайных величин с заданными законами распределения основаны на нелинейных преобразованиях одной или нескольких равномерно или нормально распределённых случайных величин. В результате моделирования на ЦВМ

формируется последовательность выборочных значений (реализаций) случайной (псевдослучайной) величины с заданным распределением. Задача моделирования непрерывных или дискретных случайных величин является распространенной задачей при моделировании возмущений, действующих на радиоэлектронную систему. Алгоритмы моделирования, разработанные для этого случая, часто служат основой для моделирования случайных векторов и случайных процессов.

4.4. Моделирование случайных величин методом нелинейного преобразования, обратной функции распределения

Другое название этого метода - стандартный метод моделирования [5,6] непрерывной случайной величины. Он позволяет с помощью функционального преобразования равномерно распределенной в интервале $(0,1)$ случайной величины α формировать случайные величины с заданным распределением.

Пусть две случайные величины α и η связаны функциональной зависимостью $\eta = \varphi(\alpha)$. Предположим, что функция $\varphi(x)$ строго монотонная и непрерывная на интервале $(0,1)$. Для определенности положим, что $\varphi(x)$ монотонно возрастает. Для случайной величины η задана плотность распределения $w_\eta(x), a < x < b$ (на границы a и b не накладывается никаких ограничений).

Найдем интегральную функцию распределения для $\eta = \varphi(\alpha)$:

$$F_\eta(x) = \int_a^x w_\eta(t) dt = P(\eta < x) = P\{\varphi(\alpha) < x\}.$$

Для случайных величин α и η , связанных известным функциональным соотношением $y = \varphi(x)$, интегральные функции распределения равны: $P\{\eta < y\} = P\{\alpha < x\}$. Поэтому для функции $F_\eta(x)$ можно записать

$$F_\eta(x) = P\{\varphi(\alpha) < x\} = P\{\alpha < \varphi^{-1}(x)\}$$

где $\varphi^{-1}(x)$ - функция, обратная функции $\varphi(x)$. Учитывая, что случайная величина α равномерно распределена, получаем:

$$F_\eta(x) = \varphi^{-1}(x) \text{ или } \varphi(x) = F_\eta^{-1}(x). \quad (4.1)$$

То есть если функция $\varphi(x)$ будет определяться в соответствии с формулой (4.1), то

$$P\{F^{-1}(\alpha) < x\} = P\{\alpha < F(x)\} = F(x).$$

Следовательно, в предположении монотонного возрастания функции $\varphi(x)$ получается моделирующая формула

$$\xi = F^{-1}(\alpha).$$

К аналогичному результату можно прийти, если рассмотреть и монотонно убывающую функцию $\varphi(x)$. Таким образом, процедура формирования случайной величины ξ с заданной плотностью распределения $w(x)$ будет заключаться в нахождении интегральной функции распределения $F(x)$ и определении обратной функции $F^{-1}(x)$. То есть k -я реализация случайной величины ξ будет сформирована из k -й реализации случайной величины α .

В качестве примера приведем моделирующие алгоритмы для формирования случайных величин с плотностями распределения, часто встречающимися на практике.

1. Моделирование случайной величины ξ с релеевским законом распределения.

Такая задача часто встречается, например, в моделировании сигнала на выходе линейного детектора при воздействии на него нормального случайного процесса с нулевым математическим ожиданием.

Поскольку релеевская случайная величина имеет функцию распределения

$$F(x) = \int_0^x w(t) dt = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2},$$

то, находя обратную функцию

$$F^{-1}(x) = \sigma\sqrt{-2\ln(1-x)},$$

получаем моделирующий алгоритм:

$$\xi = \sigma\sqrt{-2\ln(1-\alpha)} = \sigma\sqrt{-2\ln\alpha}. \quad (4.2)$$

В формуле (4.2) учтено, что случайные величины $(1-\alpha)$ и α имеют одинаковые законы распределения - равномерно распределены в интервале $(0,1)$.

K -я реализация случайной величины ξ с релеевским законом распределения будет сформирована из k -й реализации случайной ве-

личины с равномерным законом распределения в соответствии с формулой

$$\xi^{(k)} = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - \alpha^{(k)})} = \sigma \sqrt{-2 \ln \alpha^{(k)}} .$$

2. Моделирование случайной величины ξ с экспоненциальным распределением.

Такая необходимость возникает, например, при моделировании пуассоновского потока импульсов. Экспоненциальным распределением также часто аппроксимируют плотность распределения вероятностей радиолокационных сигналов на выходе квадратичного детектора.

Экспоненциальному закону распределения (2.5) соответствует интегральная функция распределения вероятностей

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x).$$

Находя функцию, обратную функции $F(x)$, моделирующий алгоритм можно представить в следующем виде:

$$\xi = -\ln \alpha / \lambda.$$

3. Моделирование случайной величины ξ , распределенной по закону арксинуса:

$$w(x) = \frac{1}{\pi b \sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{b^2}}}, -b+a < x < b+a.$$

Такое распределение (при нулевом математическом ожидании) имеет гармоническое колебание со случайной равномерно распределенной фазой.

Применяя стандартный метод, моделирующий алгоритм можно представить так:

$$\xi = b \sin(\alpha - 0.5) + \alpha.$$

Достоинством стандартного метода является отсутствие методической ошибки. Однако область его применения ограничена, так как для большинства распределений интегральная функция $F(x)$ через элементарные функции не выражается. Поэтому для многих распределений функцию $F^{-1}(x)$ в явном виде выразить затруднительно и для моделирования приходится использовать численные методы.

4.5. Моделирование непрерывных случайных величин методом исключения (методом Неймана)

Этот метод [1] используется для моделирования случайных величин, возможные значения которых не выходят за пределы ограниченного интервала (a, b) .

Алгоритм моделирования случайной величины ξ , имеющей закон распределения $w(x)$, состоит в следующем.

1. Выбираются две независимые реализации α_1 и α_2 случайной величины α , равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$.

2. Над числами α_1 и α_2 производятся вычисления:

$$\alpha_1^* = \alpha + (b - \alpha)\alpha_1; \alpha_2^* = \omega_m \alpha_2,$$

где ω_m - максимальное значение функции $w(x)$.

3. В качестве реализации случайной величины ξ берется число α_1^* из пары чисел α_1^*, α_2^* , для которых выполняется неравенство

$$\alpha_2^* \leq w(\alpha_1^*).$$

Если неравенство не выполняется, то числа α_1^*, α_2^* отбрасываются.

4. Для получения следующей реализации случайной величины ξ повторяются пункты 1, 2, 3.

Одним из возможных обоснований [5,6,7] этого метода моделирования случайных величин с заданным законом распределения $w(x)$ может служить следующее (рис. 4.1).

Пары случайных чисел α_1^*, α_2^* можно рассматривать как координаты случайных точек плоскости, равномерно распределенных внутри прямоугольника $aa'b'b$. Пары случайных чисел, удовлетворяющих условию

$$\alpha_2^* \leq w(\alpha_1^*),$$

являются координатами случайных точек, равномерно распределенных вдоль осей x и $w(x)$ внутри той части прямоугольника $aa'b'b$, которая расположена под кривой $w(x)$.

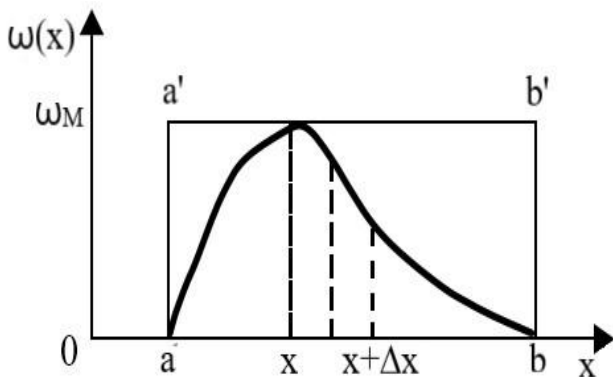


Рис. 4.1. Моделирование методом Неймана

Вероятность того, что случайная точка плоскости, находящаяся под кривой $w(x)$, окажется в элементарной полосе с основанием $(x, x + \Delta x)$, пропорциональна $w(x)$. Вероятность попадания точки под кривую $w(x)$ равна единице по условию.

Среднее число проверок выполнения неравенства $\alpha_2^* \leq \omega(\alpha_1^*)$, которые необходимо провести для получения одной реализации случайной величины ξ , равно отношению площади прямоугольника $aa'b'b$ к площади под кривой $w(x)$. Это отношение равно $n_1 = \omega_m(b-a) > 1$.

Метод исключения можно использовать и для моделирования случайных величин, возможные значения которых лежат в бесконечных пределах $(-\infty \leq \xi \leq \infty)$. В этом случае пределы изменения случайной величины ограничиваются некоторым разумно выбранным интервалом (a, b) .

Однако величина n_1 , если не принять специальных мер, может оказаться неоправданно большой, что приведет к нерациональному использованию ЦВМ.

Другой недостаток метода исключения - особенно жесткие требования к псевдослучайным числам. Это объясняется тем, что для моделирования одной реализации случайного числа ξ используется несколько реализаций (не меньше двух) равномерно распределенных базовых чисел.

4.6. Моделирование дискретных случайных величин

Общий метод моделирования дискретной случайной величины основан на очевидном свойстве равномерно распределенных в интервале $(0,1)$ случайных величин: вероятность того, что базовая случайная величина α попадает в m -й интервал, равна длине этого интервала.

Математическая запись алгоритма моделирования выглядит так:

$$P\left(\sum_{i=1}^{m-1} P_i \leq \alpha \leq \sum_{i=1}^m P_i\right) = P(\xi = x_m),$$

где ξ -моделируемая дискретная случайная величина.

В качестве примера рассмотрим моделирование дискретной случайной величины ξ , заданной в виде ряда распределения

$$P_i = \begin{cases} P_1 = 0,5; x_1 = 1 \\ P_2 = 0,3; x_2 = 0 \\ P_3 = 0,2; x_3 = -1 \end{cases}.$$

Разбиваем интервал $(0, 1)$ возможных значений базовой случайной величины α на три непересекающихся подынтервала $\Delta_i, i = \overline{1,3}$, следующим образом:

$$0 \leq \Delta_1 < 0,5, \quad 0,5 \leq \Delta_2 < 0,8, \quad 0,8 \leq \Delta_3 < 1.$$

Если реализация случайной величины α , извлекаемая из датчика равномерно распределенных в интервале $(0,1)$ квазислучайных чисел, попадает в i -й подынтервал, то реализация дискретной случайной величины ξ принимает значения $\Delta_i, i = \overline{1,3}$.

Программно реализовать алгоритм моделирования дискретных случайных величин обычно не представляет сложности.

Некоторые дискретные случайные величины являются целочисленными с распределением $P_k = P\{\xi = k\}, k = 0,1,2,\dots$.

Примером такого распределения может служить распределение Пуассона

$$P_k = \lambda^k \exp(-\lambda) / k!.$$

Другим примером может являться геометрический закон распределения

$$P_k = p(1-p)^{k-1}, k = 1,2,\dots$$

Случайная величина с таким распределением есть номер первого успешного испытания в схеме Бернулли с вероятностью успеха p . В работах [9-13] можно найти примеры и других законов распределения целочисленных дискретных случайных величин.

Для таких распределений значения вероятностей P_{k+1} и P_k связаны рекуррентными формулами

$$P_{k+1} = P_k r(n). \quad (4.3)$$

Например, для распределения Пуассона $r(k) = \frac{\lambda}{k+1}$, а для геометрического распределения $r(k) = 1 - p$.

Поэтому при моделировании целочисленных дискретных случайных величин можно уменьшить объём оперативной памяти ЦВМ, так как отпадает необходимость запоминания величин P_i, x_i .

Реализация базовой случайной величины α будет сравниваться со значениями P_k, P_{k+1} , определяемыми по формуле (4.3).

При попадании реализации $\alpha^{(k)}$ в интервал $P_k \leq \alpha^{(k)} < P_{k+1}$ реализацией случайной величины ξ будет число k .

При таком методе моделирования за уменьшение объёма памяти приходится расплачиваться увеличением числа вычислительных операций. В работах [5,6] приводятся различные способы моделирования дискретных случайных величин, позволяющие более экономно использовать возможности ЦВМ.

4.7. Моделирование непрерывных случайных величин методом кусочной аппроксимации

Алгоритмы моделирования, основанные на стандартном методе и методе исключения, позволяют формировать случайные величины с заданным законом распределения без методической погрешности. Метод кусочной аппроксимации [1] является приближенным методом. Однако его использование позволяет устранить основной недостаток стандартного метода моделирования - необходимость решения относительно x уравнения $y = F(x)$. По сравнению с методом исключения метод кусочной аппроксимации позволяет более экономно использовать возможности ЦВМ.

Суть метода состоит в следующем [1]. Пусть необходимо осуществить моделирование случайной величины ξ_1 , определенной на интервале (a, b) , с законом распределения $w_1(x)$. Разобьем интервал (a, b) на s одинаковых достаточно малых подынтервалов $(b_m, b_{m+1}), m = \overline{1, s}$ (рисунок 4.2).

Процедура моделирования сводится к тому, что вместо величины ξ_1 с законом распределения $w_1(x)$ моделируется случайная величина ξ_2 с законом распределения $w_2(x)$, определяемым ступенчатой кривой.

Характер ступенчатой кривой будет определяться величиной подынтервалов и вероятностью P_m попадания случайной величины ξ_1 в m -й подынтервал.

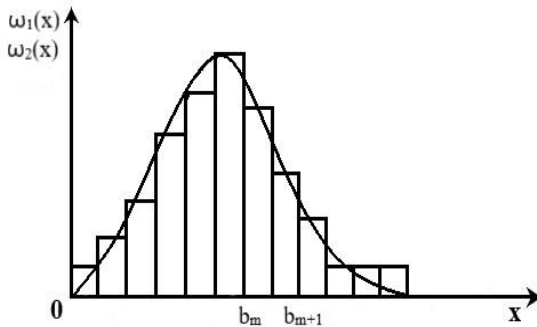


Рис. 4.2. Метод кусочной аппроксимации

Вероятность попадания P_m случайной величины ξ_1 в подынтервал (b_m, b_{m+1}) будет равна

$$P_m = \int_{b_m}^{b_{m+1}} w_1(x) dx.$$

Моделирование случайной величины ξ_2 будет осуществляться по следующей схеме.

1. Интервал $(0, 1)$ возможных значений базовой случайной величины α разбивается на s непересекающихся подынтервалов

$(b_m, b_{m+1}), m = \overline{1, s}$. Величина m -го подынтервала равна вероятности P_m .

2. Из датчика равномерно распределенных в интервале $(0,1)$ квазислучайных величин α выбираются две ее реализации $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}$.

3. Определяется, в какой из подынтервалов (b_m, b_{m+1}) попала реализация $\alpha_1^{(k)}$. Так как каждому подынтервалу (b_m, b_{m+1}) ставится в соответствие величина вероятности P_m , то случайным образом с вероятностью P_m выбирается подынтервал (b_m, b_{m+1}) .

То есть моделируется некоторая дискретная случайная величина, которая принимает значения $P_m, m = \overline{1, s}$.

4. Реализация случайной величины ξ_2 формируется следующим образом $\xi_2^{(k)} = b_m + (b_{m+1} - b_m \alpha_2^{(k)})$.

Очевидно, что при увеличении числа разбиений интервала (a, b) определения случайной величины ξ_1 на подынтервалы точность моделирования будет увеличиваться.

Иногда интервал (a, b) возможных значений моделируемой случайной величины ξ разбивают на подынтервалы различной длительности таким образом, чтобы вероятности попадания величины ξ в каждый подынтервал были одинаковыми. В этом случае моделирование случайной величины можно осуществить с меньшим количеством вычислительных операций.

При статистическом моделировании часто возникает задача генерирования случайных величин, закон распределения которых задан гистограммой, построенной по опытным данным. Метод кусочной аппроксимации позволяет достаточно просто моделировать случайные величины с таким заданием закона распределения, не прибегая к аппроксимации гистограммы какой-либо функцией.

4.8. Моделирование нормальных случайных величин

Многие случайные величины, имеющие различную физическую природу, подчиняются нормальному закону распределения. Если учесть, что с помощью известных функциональных преобразований из нормальной случайной величины можно достаточно просто сформиро-

вать случайные величины с различными распределениями, то моделирование нормально распределенных величин является одной из основных задач при проведении статистического эксперимента.

Очень часто для моделирования случайных величин, имеющих нормальный закон распределения вероятностей, используют выводы, сформулированные в центральной предельной теореме.

Для последовательности, состоящей из базовых чисел α , условия применимости центральной предельной теоремы выполняются. Поэтому случайная величина

$$\eta = \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

будет иметь распределение, стремящееся к нормальному при $N \rightarrow \infty$ с математическим ожиданием $M_{\xi} = 0,5N$ и дисперсией $D_{\xi} = N/12$.

При проведении статистического моделирования часто приходится генерировать центрированные нормальные случайные величины. Случайная величина η_1 , определяемая по формуле

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{12}{N}} \sum_{n=1}^N (\alpha_n - 0,5), \quad (4.4)$$

будет иметь распределение, асимптотически стремящееся к нормальному при $N \rightarrow \infty$, нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

На практике часто считают, что для $N=12$ получается достаточно хорошее приближение к нормальному распределению. Формула (4.4) при этом принимает особенно простой вид

$$\eta_2 = \sum_{n=1}^N \alpha_i - 6. \quad (4.5)$$

Однако при решении конкретных задач необходимо учитывать, что в области больших уклонений (на «хвостах» распределения) алгоритмы моделирования, основанные на формулах (4.4),(4.5), не могут дать хороших результатов. Действительно, плотность распределения случайной величины η_2 тождественно равна нулю при $|x| > 6$, а для нормальной случайной величины плотность распределения отлична от нуля для $-\infty < x < \infty$.

Классическим примером, когда моделирование в соответствии с (4.4), (4.5) неприемлемо, является моделирование радиолокационных систем с вероятностью ложной тревоги $P = 10^{-4} \div 10^{-5}$ или систем пе-

редачи цифровой информации с такой же низкой вероятностью перепутывания символов.

Степень приближения распределения случайных величин к нормальному в области уклонений можно увеличить, используя специальные преобразования.

Простейшие из них имеют вид [6,7]:

$$\eta_3 = \eta_1 + \frac{1}{20N}(\eta_1^3 - \eta_1), \eta_4 = \frac{41}{13440N^2}(\eta_1^5 - \eta_1^3 + 15\eta_1).$$

Анализ показывает, что распределения величин η_3 и η_4 достаточно близки к нормальному уже при $N \leq 5$.

Лучшие результаты позволяет получить моделирование нормально распределённой величины стандартным методом. Так как в этом случае функция, обратная интегральной функции распределения, не выражается в замкнутой форме через элементарные функции, то используется дополнительное преобразование.

Известно, что если случайная величина ξ_1 имеет распределение Релея

$$w(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), y > 0, \sigma > 0,$$

а случайная величина ξ_2 имеет распределение арксинуса

$$w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, -\alpha \leq x \leq \alpha,$$

и если величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то случайная величина

$$\xi = \xi_1 \xi_2$$

имеет нормальное распределение.

Применяя для моделирования случайных величин ξ_1 и ξ_2 стандартный метод, нормально распределённую величину ξ можно получить с помощью нелинейного преобразования двух независимых равномерно распределённых в (0,1) случайных чисел α_1 и α_2 :

$$\xi = \sigma \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi \alpha_2.$$

Математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины ξ будут соответственно равны $M_\xi = 0, D_\xi = \sigma^2$.

4.9. Моделирование случайной величины с бета-распределением

При моделировании радиоэлектронных систем различного назначения часто приходится генерировать случайные величины, плотности вероятности которых задаются бета-распределением

$$w_{q,m}(x) = \frac{x^{q-1}(1-x)^{m-1}}{B(q,m)}, 0 < x < 1,$$

где $q > 0, m > 0$ – параметры распределения; $B(q,m)$ – бета-функция.

Бета-функция выражается через гамма-функцию $\Gamma(\cdot)$ следующим образом:

$$B(q,m) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(m)}{\Gamma(q+m)}.$$

В зависимости от величины параметров q, m функция $w_{q,m}(x)$ имеет различную форму. На рис. 4.3 показано поведение закона распределения $w_{q,m}(x)$ при различных значениях параметров q, m . Видно, что, изменяя значения параметров q и m , можно менять форму кривой закона распределения. При $q = m$ бета-распределение симметрично относительно своего математического ожидания. При $q = m = 1$ бета-распределение вырождается в равномерное распределение. Если $q \neq m$, то форма бета – распределения становится асимметричной.

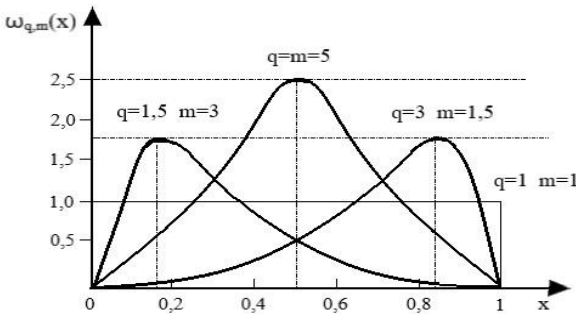


Рис. 4.3. Графики бета – распределения

Благодаря многообразию форм бета-распределение является удачным аппроксимирующим распределением для случайных величин, интервал изменения которых конечен. Примером случайных величин, имеющих бета-распределение, являются поляризационные параметры радиосигнала.

Выбор метода моделирования бета-распределения зависит от его параметров q, m [11].

Наиболее просто моделирование осуществляется, когда q, m целые. В этом случае для генерирования случайных величин используются порядковые статистики.

Если выборку из $n + m - 1$ реализаций случайной величины η рассматривать в порядке возрастания, то получаем случайные величины

$$\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_q < \dots < \eta_{q+m-1}. \quad (4.6)$$

Последовательность (4.6) называется порядковой статистикой.

Известно, что плотность распределения случайной величины η_q будет подчиняться бета-распределению, если порядковая статистика является выборкой из равномерного распределения. Это и определяет способ моделирования случайных величин с бета-распределением для целых q, m .

Из датчика квазислучайных чисел, равномерно распределённых в $(0,1)$, выбираются $n + m - 1$ реализаций и расставляются в порядке возрастания. Элемент выборочной порядковой статистики с номером q будет реализацией случайной величины, имеющей бета-распределение с параметром q .

В том случае, когда параметр m бета-распределения является целым, а параметр q - нецелым, используется моделирующая формула [5,7]

$$\xi_{q,m} = \exp\left(\sum_{k=1}^m \frac{\ln a_k}{q+k-1}\right), \quad (4.7)$$

то есть для получения одной реализации случайной величины с бета-распределением необходимо генерировать m реализаций базовой случайной величины.

Сделав замену

$$v_{q,m} = 1 - \xi_{q,m}, \quad (4.8)$$

моделирующую формулу (4.7) можно использовать и для генерирования реализаций случайных величин с бета-распределением, когда параметр m нецелый, а параметр q - целый. Преобразование (4.8) является линейным, поэтому $w_\nu(x) = w_\xi(1-x)$.

В том случае когда бета-распределение имеет нецелые параметры $q > 0, m > 0$, используется моделирующая формула

$$\xi_{q,m} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\{m\}+1} \frac{\ln a_k}{\nu + q + k - 1}\right), \quad (4.9)$$

где $\{m\}$ - целая часть числа m ; ν - целочисленная случайная величина, для которой вероятности $P\{\nu = k\} = P_k, k = 0, 1, 2,$

Вероятности P_k определяются по формуле:

$$P_k = \frac{\{m\}!}{B(q,m)} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!(k+q)(k+q+1)\dots(k+q+\{m\})},$$

где $a = \{m\} + 1 - m$.

Для моделирования необходимо осуществить генерирование реализаций дискретной случайной величины ν , а затем в соответствии с моделирующей функцией (4.9) осуществить преобразования с $a = \{m\} + 1$ реализацией базовой случайной величины. Когда параметры бета-распределения $q > 1, m < 1$, следует пользоваться заменой переменных (4.8), которая меняет местами параметры q и m .

Методом исключения получен моделирующий алгоритм для случайных величин с бета-распределением в следующем виде:

$$\xi_{q,m} = \frac{a_1^{1/q}}{a_1^{1/q} + a_2^{1/m}}, \quad (4.10)$$

причем на параметры q и m не накладываются никакие ограничения.

Использование алгоритма (4.10) заключается в следующем. Из датчика равномерно распределенных в интервале $(0,1)$ квазислучайных величин выбираются две реализации $\alpha_1^{(k)}$ и $\alpha_2^{(k)}$.

Если

$$\left[\alpha_2^{(k)}\right]^{1/m} + \left[\alpha_1^{(k)}\right]^{1/q} \geq 1, \quad (4.11)$$

то реализации $\alpha_1^{(k)}$ и $\alpha_2^{(k)}$ отбрасываются и из датчика извлекаются следующие реализации базовых чисел. Если условие (4.11) не выполняется, то по моделирующей формуле (4.10) определяется реализация случайной величины с бета-распределением.

4.10. Моделирование случайных величин с гамма-распределением

Случайные величины, имеющие гамма-распределением, очень часто приходится генерировать при проведении моделирования на ЭВМ. Выше отмечено, что гамма-распределение является наиболее подходящим при описании вероятностных свойств квадрата огибающей радиосигнала при широкополосной радиолокации. Так же гамма-распределение находит широкое применение при интерпретации результатов спектрального анализа случайных процессов. Его плотность распределения вероятностей выражается формулой (2.8). Так же, как и бета-распределение, гамма-распределение в зависимости от значения своих параметров меняет свою форму. На рис. 4.4 приведены графики гамма-распределения при различных значениях параметра q (эта величина часто называется параметром гамма-распределения). Параметр $\beta=0.3$.

Если параметр $q=1$, то гамма-распределение вырождается в экспоненциальное. Если параметр $q=0.5$, то гамма-распределение определяет распределение квадрата нормальной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и величиной дисперсии $D = \beta/2$. При достаточно большом q гамма-распределение аппроксимируется нормальным законом распределения.

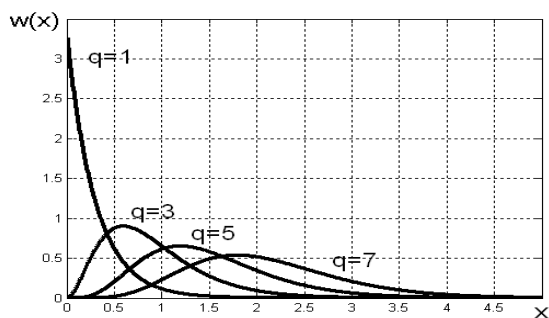


Рис. 4.4. Графики гамма-распределения

Гамма-распределение является воспроизводящим по q . То есть если случайная величина η_a имеет гамма-распределение $\Gamma(q, \beta)$, а случайная величина η_b имеет распределение $\Gamma(b, \beta)$, то случайная величина

$$\eta = \eta_a + \eta_b \quad (4.12)$$

распределена как $\Gamma(q + b, \beta)$, если случайные величины η_a и η_b независимы.

Это свойство положено [11] в основу моделирования случайных величин с гамма-распределением.

1. Моделирование случайных величин с гамма-распределением при целых $q \geq 1$.

Из формулы (4.12) следует, что если случайные величины $\eta_i, i = \overline{1, q}$, независимы и имеют экспоненциальное распределение

$w(x) = \exp(-x/\beta)/\beta$, то случайная величина $\eta = \sum_{i=1}^q \eta_i$ подчиняется

гамма-распределению с параметром q . Применяя для моделирования величин $\eta_i, i = \overline{1, q}$, стандартный метод моделирования, получаем моделирующий алгоритм, позволяющий моделировать случайные величины с гамма-распределением

$$\xi_q = -\sum_{i=1}^q \frac{\ln \alpha_i}{\beta} = -\frac{1}{\beta} \ln \prod_{i=1}^q \alpha_i.$$

2. Моделирование случайных величин с гамма-распределением при $q = n + \frac{1}{2}, n = 0, 1, \dots$

Используя воспроизводящее свойство гамма-распределения, можно по аналогии с формулой (16) записать, что $\eta_{n+1/2} = \eta_n + \eta_{1/2}$.

Случайная величина $\eta_{n+1/2}$ будет иметь гамма-распределение $(n + 1/2, \beta)$, если величины $\eta_{1/2}$ и η_n будут распределены как $\Gamma(1/2, \beta)$ и $\Gamma(n, \beta)$ соответственно. Применяя стандартный метод моделирования, получаем моделирующий алгоритм

$$\xi_q = -\frac{1}{\beta} \ln \prod_{i=1}^n \alpha_i + \ln \alpha_{n+1} \sin^2(2\pi \alpha_{n+2}).$$

3. Моделирование случайных величин с гамма-распределением при $q = n + \nu$, где ν - произвольное число $0 < \nu < 1$.

Из воспроизводящего свойства гамма-распределения следует, что достаточно получить моделирующую формулу только для случая, когда параметр распределения равен ν [6]:

$$\xi_\nu = (\varepsilon_\nu - 1) \ln \alpha,$$

где случайная величина ε_ν имеет бета-распределение с параметрами $1 - \nu, \nu$.

4.11. Моделирование с помощью нелинейного преобразования нормально распределенной случайной величины

Для некоторых случайных величин, связанных нелинейными преобразованиями с нормальными величинами, можно подобрать простые моделирующие алгоритмы.

1. Известно, что случайная величина

$$\xi = \eta_1^2 + \eta_2^2 \quad (4.13)$$

будет иметь экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \sigma^2 / 2$, если случайные величины η_1 и η_2 независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним и одинаковой дисперсией σ^2 .

Для получения k -й реализации случайной величины с экспоненциальным распределением необходимо осуществить генерацию реализаций двух некоррелированных случайных величин с нормальным законом распределения и произвести вычисления согласно (4.13).

2. Случайная величина

$$\xi = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} \quad (4.14)$$

при тех же предположениях о характере случайных величин η_1 и η_2 будет иметь релеевское распределение с параметром, равным $\sqrt{\sigma^2}$.

3. Изменяя выражение (4.14) следующим образом:

$$\xi = \sqrt{(\eta_1 + a)^2 + \eta_2^2},$$

где a - положительное число, получаем случайную величину ξ , распределённую по закону Райса (обобщенному закону Релея):

$$\omega(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right), x > 0,$$

где $I_0(z)$ - функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

4. Моделирующий алгоритм

$$\chi_s^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i^2$$

позволяет генерировать случайные величины с χ^2 -распределением с n степенями свободы

$$w(x) = \frac{1}{2^{\frac{x}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},$$

если случайные величины η_i независимы и имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Часто χ^2 -распределения с n степенями свободы обозначают как $\chi^2(n)$.

5. Так как случайная величина $\eta_{q,m}$, имеющая бета-распределение с параметрами q, m (q, m – целые, $q > 0, m > 0$), связана со случайными величинами v , имеющими распределения $\chi^2(q)$ и $\chi^2(m)$:

$$\eta_{q,m} = \frac{v_{q+m}}{v_q + v_m}, \quad (4.15)$$

то формула (4.15) и определяет моделирующий алгоритм. Используя стандартный метод для формирования случайных величин v , получа-

ем достаточно экономичный алгоритм моделирования случайных величин, имеющих бета-распределение.

6. Моделирование случайной величины с равномерным распределением.

Пусть случайная величина η имеет закон распределения $w(x)$ и функцию распределения $F(x)$. Тогда случайная величина [11]

$$\alpha = F(\eta)$$

будет иметь равномерное распределение в интервале (0,1). Поэтому если случайная величина η имеет нормальное распределение $w(x)$, то после преобразования

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\eta} w(x) dx \quad (4.16)$$

случайная величина α будет равномерно распределена в интервале (0,1).

Для получения реализации случайной величины α необходимо сформировать реализацию нормальной случайной величины η и произвести вычисления согласно формуле (4.16).

В монографиях по математической статистике [11] можно найти доказательство приведенных выше моделирующих алгоритмов. Эти алгоритмы - одни из многих известных преобразований нормально распределенных случайных величин и в совокупности со стандартным методом моделирования позволяют получать эффективные моделирующие формулы.

Часть 5. Моделирование случайных векторов

Совокупность n случайных чисел $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, в том числе и комплексных, называется случайной точкой или случайным вектором n -мерного пространства. Случайные величины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ называются координатами случайного вектора η . Если координаты вектора независимы, то моделирование сводится к моделированию n независимых случайных величин с заданным законом распределения. В общем случае, когда координаты вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ зависимы, моделирование сводится к моделированию последовательности зависимых величин, описываемых n -мерной плотностью распределения вероятностей. Задача моделирования случайных векторов является

очень распространенной при цифровом моделировании радиосигналов и помех.

5.1 . Моделирование случайных векторов в рамках корреляционной теории

При цифровом моделировании радиоэлектронных систем часто приходится генерировать случайные векторы, заданные матрицей корреляций

$$\| \rho_{ij} \| = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

где $\rho_{i,j} = M\{(\eta_i - m_i)(\eta_j - m_j)\}$,

и вектором математических ожиданий $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, где $m_i = M\{\eta_i\}$.

Широкое распространение на практике алгоритмов моделирования случайных векторов по заданным матрице корреляций и вектору средних обусловлено следующим.

1. Нормальные случайные векторы однозначно задаются матрицей корреляций и вектором средних. Поэтому моделирование нормальных векторов в рамках корреляционной теории эквивалентно моделированию по заданному нормальному многомерному распределению.

2. При моделировании негауссовские случайные векторы часто формируются в результате известных нелинейных преобразований нормальных случайных векторов. Моделирование таких негауссовских случайных векторов сводится к моделированию нормальных векторов с последующим воспроизведением заданного нелинейного преобразования. Простейшим примером может служить последовательность отсчетов огибающей суммы гармонического сигнала и узкополосного шума. Эта последовательность распределена по многомерному закону Райса, а при отсутствии сигнала имеет многомерный закон Релея. Моделирование последовательности отсчетов огибающей просто осуществляется через квадратурные составляющие, распределение которых нормально [1].

3. Матрица корреляций случайного вектора определяется намного более просто, чем многомерный закон распределения. Достаточно

хорошо изучены лишь такие многомерные законы, как гауссовский, Уишарта, Дирихле. Кроме того, сравнительно просто удастся найти многомерные законы распределений лишь для марковских случайных векторов. Однако перечисленные многомерные законы распределений далеко не всегда подходят для аппроксимации распределений случайных векторов. К тому же процедура аппроксимации многомерного распределения случайного вектора одним из известных многомерных распределений достаточно сложна. Поэтому очень часто ограничиваются моделированием случайных векторов, задаваясь только матрицей корреляций.

5.2. Моделирование случайных векторов методом линейного преобразования

Это один из наиболее известных и широко применяемых методов.

Суть метода [1] состоит в том, чтобы n независимых случайных величин $\xi_i, i = \overline{1, n}$, с нулевым средним и единичной дисперсией подвергнуть такому линейному преобразованию A , чтобы в результате полученные случайные величины $\eta_i, i = \overline{1, n}$, имели наперед заданную матрицу (5.1). Обычно полагают, что матрица A преобразования

$$\|\eta\| = \|A\| \times \|\xi\|,$$

где $\|\eta\| = \|\eta_i\|, \|\xi\| = \|\xi_i\|, i = \overline{1, n}$, являются матрицами-столбцами, составленными из координат векторов $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, является треугольной:

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & 0 \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right\|.$$

Перемножая матрицы $\|A\|$ и $\|\xi\|$, получаем

$$\eta_1 = \alpha_{11}\xi_1, \eta_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2, \dots, \eta_n = \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_{nn}.$$

Элементы матрицы $\|A\|$ определяем из условий

$$M\{\eta_i \eta_j\} = \rho_{ij}; \quad M\{\xi_i \xi_j\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Последовательно определяя математические ожидания

$$\begin{aligned} M\{\eta_1^2\} &= \alpha_{11}^2 = \rho_{11}, \\ M\{\eta_1 \eta_2\} &= \alpha_{11} \alpha_{21} = \rho_{12}, \\ M\{\eta_1 \eta_3\} &= \alpha_{11} \alpha_{31} = \rho_{13}, \\ M\{\eta_2 \eta_3\} &= \alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32} = \rho_{23}, \\ M\{\eta_2^2\} &= \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = \rho_{22}, \\ M\{\eta_3^2\} &= \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = \rho_{33}, \dots \end{aligned}$$

получаем элементы матрицы $\|A\|$:

$$\alpha_{11} = \sqrt{\rho_{11}}, \quad \alpha_{21} = \frac{\rho_{12}}{\sqrt{\rho_{11}}}, \quad \alpha_{31} = \frac{\rho_{13}}{\sqrt{\rho_{11}}}, \quad \alpha_{22} = \sqrt{\rho_{22} - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11}}}, \dots$$

Общая рекуррентная формула для определения элементов матрицы $\|A\|$ определяется следующим образом:

$$\alpha_{ij} = \frac{\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{ik} \alpha_{jk}}{\sqrt{\rho_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{jk}^2}}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n, \quad \sum_{+1}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jk} = 0.$$

Процедура формирования k - k -й реализации $\eta^{(k)}$ вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ с заданной матрицей корреляций будет заключаться в умножении реализации вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ на матрицу $\|A\|$.

Для получения реализации с заданным вектором математических ожиданий необходимо произвести сложение $\|\eta\| + \|m\|$, где $\|m\|$ - матрица-столбец средних $\|A\|$ значений.

При таком моделировании случайных векторов можно обеспечить лишь заданные корреляционные связи между координатами вектора. Если координаты исходного вектора нормальны, то и вектор η будет иметь многомерное гауссовское распределение. Если вектор ξ имеет негауссовское распределение, то координаты вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ в общем случае будут иметь различные одномерные распределения. Очень часто при моделировании полагается, что координаты вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ являются независимыми нормальными величинами.

Рассматриваемый метод моделирования при больших n становится неудобным для машинной реализации, так как существенно возрастают объём памяти для хранения элементов матрицы A и объём вычислений.

5.3. Моделирование случайных векторов, распределенных по многомерному закону Дирихле

Такая задача часто встречается при моделировании случайных векторов, интенсивность которых неизвестная или случайная, то есть

$$\eta = (c_1\eta_1, c_2\eta_2, \dots, c_n\eta_n).$$

В случае когда интенсивность сигнала является неинформативным параметром и выполняется условие $c_1 = c_2 = \dots = c_n$, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n > 0$, для фильтрации мешающего параметра c (параметра масштаба) используется инвариантное преобразование вида

$$\xi_i = \frac{\eta_i}{\sum_{i=1}^n \eta_i}. \quad (5.2)$$

Полученный таким образом вектор

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (5.3)$$

не зависит от мешающего параметра c . Для моделирования вектора ξ необходимо осуществить генерирование $(n-1)$ его координат. Координата с индексом n определяется как $\xi_n = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_{n-1}$ и дополнительной информации в себе не содержит.

В случае когда координаты вектора η независимы и имеют гамма-распределение с параметрами q_1, q_2, \dots, q_n , случайный вектор (5.3) будет иметь $(n-1)$ - мерное распределение Дирихле [11].

В случае когда параметры $q_i, i = \overline{1, n-1}$, являются положительными целыми числами, моделирование случайного вектора, имеющего распределение Дирихле, осуществляется с помощью порядковых статистик.

Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ - порядковые статистики выборки с равномерным распределением. Тогда доли [11] $U_1 = \eta_1, U_2 = \eta_2 - \eta_1, U_3 = \eta_3 - \eta_2, \dots, U_m = \eta_m - \eta_{m-1}$ есть случайные величины, имеющие m -мерное распределение Дирихле $D(1, 1, 1, \dots, 1)$.

Пусть v_1, v_2, \dots, v_s есть суммы q_1, q_2, \dots, q_s долей, причем нет долей, принадлежащих более чем одной сумме. Тогда распределение случайных величин v_1, v_2, \dots, v_s будет подчиняться s -мерному распределению Дирихле $D(q_1, q_2, \dots, q_s; m - q_1 - q_2 - \dots - q_{s+1})$.

Моделирование реализации $\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_s^{(k)})$ вектора с распределением Дирихле сводится к генерированию $m + q_1 + q_2 + \dots + q_{s+1}$ реализаций равномерно распределенной случайной величины, расстановке их в порядке возрастания и формированию долей $U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_{m+q_1+\dots+q_{s+1}}^{(k)}$ и сумм q_1, q_2, \dots, q_s долей.

В случае когда параметры распределения Дирихле не являются целыми, положительными, в основу моделирующего алгоритма следует положить формулу (5.2). В этом случае задача моделирования будет сводиться к моделированию случайных величин с \mathcal{U} -распределением и осуществлению преобразования (5.2).

Часть 6. Моделирование случайных процессов

Знание функции совместного распределения вероятностей $F_n(t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_n, x_n)$ и совместной плотности распределения вероятностей $w_n(t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_n, x_n)$ позволяет моделировать реализации $\xi(t)$ в точках t_1, t_2, \dots, t_n , представляя процесс $\xi(t)$ в виде n - мерного вектора. Однако с увеличением размерности n существенно

увеличивается число вычислительных операций. Кроме того, значительны сложности, возникающие при нахождении произвольных многомерных плотностей в явном виде. Численное же представление многомерных плотностей требует зачастую неоправданно больших вычислительных затрат. Поэтому на практике задача моделирования случайного процесса по заданной n -мерной плотности распределения ставится относительно редко. Как правило, задача моделирования случайных процессов формулируется следующим образом: необходимо осуществить моделирование случайного процесса, относящегося к более узкому классу, например, стационарный нормальный случайный процесс; стационарный процесс, порождаемый гауссовским процессом при его нелинейном преобразовании; многомерный случайный процесс; марковский процесс и некоторые другие. Для некоторых классов случайных процессов найдены достаточно эффективные моделирующие алгоритмы.

6.1. Моделирование гауссовских стационарных случайных процессов

Моделирование гауссовских случайных процессов занимает особое место при цифровом анализе радиоэлектронных систем, так как такие процессы чрезвычайно широко распространены. Случайный процесс называется гауссовским, если его конечномерное распределение вероятностей является многомерным нормальным. Каждое конечномерное нормальное распределение можно записать в явном виде, если известны математическое ожидание $M\{\xi(t)\}$ и корреляционная функция:

$$R(t, x) = M\{\xi(t)\xi(x)\}.$$

Для стационарного в любом смысле процесса $M\{\xi(t)\}$ есть константа, а $R(t, x)$ есть функция разности $t - x$.

В основу моделирующих алгоритмов, предназначенных для генерирования на ЦВМ реализаций случайного нормального процесса, положено линейное преобразование [1] стационарной последовательности $\eta[n]$ в стационарную последовательность $\xi[n]$ с заданной корреляционной функцией.

Наиболее часто на практике используется линейное преобразование в виде скользящего суммирования:

$$\xi[n] = \sum_{k=1}^N c_k \eta[n-k] \quad (6.1)$$

либо в виде рекуррентного уравнения

$$\xi[n] = \sum_{k=0}^l a_k \eta[n-k] - \sum_{k=1}^m b_k \xi[n-k], \quad (6.2)$$

где c_k, a_k, b_k - весовые коэффициенты, определяемые корреляционной функцией моделируемого процесса. Количество весовых коэффициентов определяется точностью моделирования и обычно невелико ($N, l, m < 10 \div 15$). Алгоритмы (6.1) и (6.2) позволяют формировать реализации случайных процессов достаточно большой длины, определяемой величиной периода последовательности, генерируемой датчиком случайных чисел.

Начальные условия в рекуррентном уравнении (6.2) при вычислении первого значения реализации $\xi[1]$ можно выбирать нулевыми. В результате начальный участок моделируемой последовательности будет нестационарным. Однако после окончания переходного процесса генерируемая последовательность становится стационарной.

Уравнения (6.1) и (6.2) описывают поведение дискретных линейных фильтров, которые из реализаций дискретного белого шума, подаваемого на их вход, формируют дискретные реализации случайного процесса с заданными корреляционными функциями. Передаточные функции этих фильтров в смысле дискретного преобразования Лапласа имеют соответственно вид:

$$K_1(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_N z^N, \quad (6.3)$$

$$K_2(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_i z^i}{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m} = \frac{\sum_{k=0}^i a_k z^k}{1 + \sum_{k=1}^m b_k z^k}, \quad (6.4)$$

Функции $K_1(z)$ и $K_2(z)$ определяются как отношение дискретного преобразования Лапласа (z -преобразования) выходного сигнала к дискретному преобразованию Лапласа входного сигнала. Символ z^k можно рассматривать как изображение оператора, который осуществляет задержку входного сигнала на k отсчетов, так как смещение

функции $f[n]$ на k отсчетов соответствует умножению ее изображения на z^k , т.е.

$$D\{x[n-k]\} = z^k D\{x[n]\},$$

где D -оператор z -преобразования.

Структурная схема фильтра, соответствующая передаточной функции (6.3), приведена на рис. 6.1.

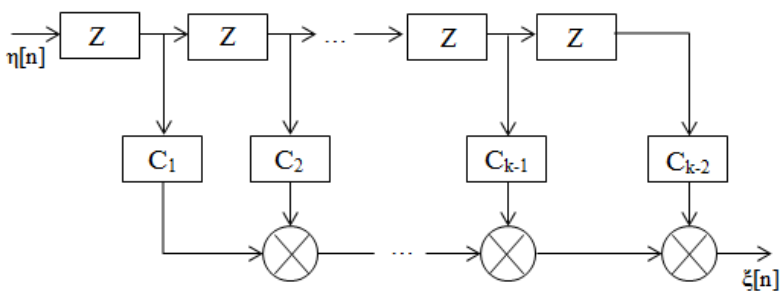


Рис. 6.1. Дискретный линейный фильтр

Задачу цифрового моделирования случайных процессов методом скользящего суммирования и рекуррентных разностных уравнений можно рассматривать как задачу синтеза линейных дискретных формирующих фильтров. Эти фильтры преобразуют дискретный белый шум в случайный процесс с заданными корреляционными (спектральными) характеристиками.

6.2 Моделирование гауссовских стационарных случайных процессов методом скользящего суммирования

Пусть исходная последовательность $\eta[n]$ состоит из независимых случайных чисел с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Корреляционная функция последовательности чисел $\eta[n]$ (т.е. дискретного белого нормального шума) имеет вид:

$$R[k] = M\{\eta[n]\eta[n+k]\} = \delta_n = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}.$$

Сформулируем из последовательности $\eta[n]$ согласно алгоритму (6.1) новую последовательность $\xi[n]$:

$$\begin{aligned}\xi[n] &= c_1\eta[n-1] + c_2\eta[n-2] + \dots + c_N\eta[n-N], \\ \xi[n+1] &= c_1\eta[n] + c_2\eta[n-1] + \dots + c_N\eta[n-N+1], \dots\end{aligned}$$

Случайная величина $\xi[n]$ получается путем весового суммирования N независимых случайных чисел $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Для вычисления очередного значения случайного процесса, то есть величины $\xi[n+1]$, весовому суммированию подвергаются случайные числа $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{n+1}$. Случайное число с номером $n-N$ отбрасывается, а для дополнения последовательности до N элементов выбирается новое случайное число. То есть последовательность $\eta[n]$ сдвигается на один элемент влево относительно некоторого «окна» длительностью в N элементов.

Статистическая зависимость между случайными величинами $\xi[n]$ и $\xi[n+1]$ обеспечивается за счет того, что в формировании их участвуют $N-1$ общих случайных величин. Случайные величины $\xi[n]$ и $\xi[n+N]$ будут независимыми.

Корреляционные связи в моделируемом случайном процессе $\xi[n]$ будут полностью определяться весовыми коэффициентами c_k .

Функция корреляции процесса $\xi[n]$ при различных сдвигах k будет равна

$$\begin{aligned}R[0] &= c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2, \\ R[1] &= c_1c_2 + c_2c_3 + \dots + c_{N-1}c_N, \\ &\dots\dots\dots \\ R[N-1] &= c_1c_N, \\ R[N] &= 0.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Случайная последовательность коррелированных чисел $\xi[n]$ будет имитировать в точках $t_n = n\Delta t$ стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R(\tau)$, которая в точках $t_k = k\Delta t$ определяется набором весовых коэффициентов c_k . Если исходные случайные величины $\eta[n]$ распределены нормально, то в силу линей-

ности преобразования последовательность $\xi[n]$ будет нормальным случайным процессом.

Если исходная последовательность негауссовская, то последовательность $\xi[n]$ в силу центральной предельной теоремы будет иметь многомерное распределение, приближающееся к многомерному нормальному с ростом числа N .

6.3. Определение весовых коэффициентов

Наиболее простым по идее является получение весовых коэффициентов c_k с помощью решения нелинейной алгебраической системы уравнений (6.5). Как правило, эта система уравнений решается численными методами на ЦВМ. Недостатком такого метода является следующее обстоятельство. Если в задачах, использующих модель случайного процесса, требуется изменить шаг дискретизации, то необходимо повторно решать систему линейных уравнений (6.5).

Известен [1] более простой подход к отысканию весовых коэффициентов – они находятся как коэффициенты Фурье в разложении в ряд по косинусам функции спектральной плотности $G(\omega)$ моделируемого процесса, т.е.

$$c_k = \frac{1}{\omega_c} \int_0^{\omega_c} \sqrt{\left[\frac{\omega_c}{\pi} G(\omega) \right]} \cos \frac{k\pi\omega}{\omega_c} d\omega, \omega_c = \frac{\pi}{\Delta t}. \quad (6.6)$$

Достоинство такого нахождения весовых коэффициентов – минимизация вычислительных затрат. Однако моделирование методом скользящего суммирования с использованием весовых коэффициентов, найденных в соответствии с формулой (6.6), является приближенным.

Объясняется это тем, что число коэффициентов, получаемых при разложении функции $\sqrt{G(\omega)}$ в ряд по косинусам, равно бесконечности. Однако, как правило, эти коэффициенты быстро убывают. Число коэффициентов N можно выбирать из условия

$$\left| 1 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N c_k^2 \right| < \varepsilon, \quad (6.7)$$

где σ^2 - дисперсия моделируемого случайного процесса; ε - погрешность моделирования.

Неравенство (6.7) основано на том, что сумма квадратов весовых коэффициентов должна быть равна дисперсии моделируемого случайного процесса.

Для некоторых спектральных плотностей $G(\omega)$ интеграл (6.6) вычисляется в явном виде. Не вызывает затруднений и численное нахождение коэффициентов c_k . Кроме перечисленных, известны и другие способы нахождения весовых коэффициентов [1], сводящиеся к синтезу формирующих фильтров по заданной спектральной плотности моделируемого процесса. В работе [1] приведены весовые коэффициенты c_k для формирования случайных процессов с часто встречающимися на практике типами корреляционных функций.

6.4. Моделирование узкополосных гауссовских случайных процессов

Случайный процесс с непрерывной спектральной плотностью $G_1(\omega)$ называется узкополосным, если спектральная плотность сосредоточена в основном в относительно узкой полосе частот около некоторой частоты ω_0 (рис. 6.2). То есть для узкополосных случайных процессов выполняется условие $\Delta\omega \ll \omega_0$.

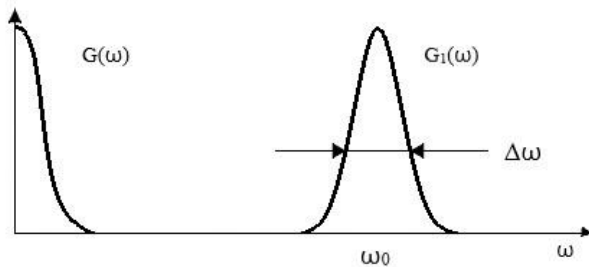


Рис. 6.2. Спектральные плотности широкополосного и узкополосного случайных процессов

Корреляционная функция узкополосного случайного процесса определяется как

$$R(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

где $a(\tau)$ - корреляционная функция процесса со спектральной плотностью $G(\omega)$, т.е. широкополосного процесса, чья спектральная плотность получается смещением на частоту ω_0 в область низких частот спектральной плотности $G_1(\omega)$.

Моделирование узкополосных гауссовских случайных процессов основано на известном свойстве [9] случайных процессов. Если $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ являются гауссовскими стационарными центрированными и независимыми случайными функциями с корреляционными функциями $a(\tau)$, то сумма

$$\eta(t) = \eta_1 \sin \omega_0 t + \eta_2(t) \cos \omega_0 t \quad (6.8)$$

также будет стационарным гауссовским центрированным случайным узкополосным процессом с корреляционной функцией

$$R(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0 \tau \quad (6.9)$$

Для моделирования k -й реализации узкополосного процесса с корреляционной функцией (6.9) необходимо осуществить моделирование известными методами реализации независимых стационарных процессов с функциями корреляции $a(\tau)$ и выполнить в соответствии с (6.8) преобразование

$$\xi^{(k)}[n] = \eta_1^{(k)}[n] \sin \gamma + \eta_2^{(k)}[n] \cos \gamma,$$

где $\gamma = \omega_0 \Delta t$, позволяющее получить реализацию узкополосного процесса с корреляционной функцией (6.9).

6.5. Моделирование негауссовских стационарных случайных процессов

Негауссовский случайный процесс задается обычно своим конечномерным распределением. В общем виде задача моделирования реализации такого процесса может быть решена с помощью метода условных распределений или с использованием метода исключений.

Однако при генерировании реализаций большой длительности применение этих методов, как правило, требует больших вычислительных затрат. Кроме того, аналитически выразить многомерное распре-

деление за исключением достаточно редких случаев (распределение Дирихле, Уишарта, многомерное нормальное и некоторые другие) крайне затруднительно.

На практике очень часто задача моделирования негауссовских случайных процессов ставится более узко — генерирование реализаций негауссовских процессов по заданным одномерным плотностям распределения вероятностей и корреляционным функциям. Эта задача достаточно просто решается с помощью нелинейных преобразований гауссовских случайных процессов [1].

Выберем в качестве исходного стационарный случайный нормальный процесс $\xi_0(t)$. Пусть процесс $\xi_0(t)$ имеет корреляционную функцию $R_0(\tau)$.

Всегда существует такое нелинейное безынерционное преобразование $y = f(x)$, которое превращает процесс $\xi_0(x)$ с нормальной плотностью распределения вероятностей $w_0(x)$ в процесс $\xi(t)$ с заданной плотностью $w(y)$, то есть преобразование $\xi(t) = f[\xi_0(t)]$ позволяет получить процесс $\xi(t)$ с заданной плотностью распределения.

Для нахождения нелинейного преобразования $f(x)$, позволяющего из нормального процесса сформировать негауссовский процесс с одномерной плотностью $w(y)$, можно воспользоваться соотношением

$$F[f(x)] = F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-M)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad (6.10)$$

где $F[f(x)]$ и $F_0(x)$ - одномерные функции распределения случайных процессов $\xi(t)$ и $\xi_0(t)$; M и σ^2 - математическое ожидание и дисперсия процесса $\xi_0(t)$.

Уравнение (6.10), как правило, аналитически не решается. Для получения преобразования $y = f(x)$ необходимо использовать численное решение этого уравнения. Для этого функцию распределения $F_0(x)$ следует заменить усеченной функцией, ограничив интервал возможных значений такими пределами, вероятность выхода за которые пренебрежимо мала. Часто используют пределы $(-3\sigma + M; 3\sigma + M)$. Вероятность попадания случайной величины в этот интервал равна величине, большей чем 0,99. Задаваясь дискретными значениями x_k из выбранного интервала, для получения табли-

цы значений $y_k = f(x_k)$ нужно для каждой величины x_k подобрать такую величину y_k , чтобы выполнялось условие $F(y_k) = F_0(x_k)$.

Корреляционная функция $R(\tau)$ процесса $\xi_0(\tau)$ в общем случае будет отличаться от корреляционной функции $R_0(\tau)$ процесса $\xi_0(\tau)$. Так как по определению корреляционная функция $R(\tau)$ равна

$$R(\tau) = M\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} = M\{f[\xi_0(t)]f[\xi_0(t+\tau)]\},$$

то можно записать, что

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x_2)w(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2. \quad (6.11)$$

Как правило, в качестве исходного нормального процесса $\xi_0(\tau)$ используется процесс с нулевым математическим ожиданием. Подставляя в (6.11) двумерный нормальный закон распределения $w(x_1, x_2, \tau)$ и учитывая нулевое математическое ожидание, получаем

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r_0^2(\tau)}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x_2) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r_0^2(\tau))}\left[x_1^2 - 2r_0(\tau)x_1x_2 + x_2^2\right]\right\} dx_1dx_2, \quad (6.12)$$

где σ^2 - дисперсия процесса $\xi_0(\tau)$; $r_0(\tau)$ - нормированная корреляционная функция процесса $\xi_0(\tau)$.

Для того чтобы найти зависимость $R(\tau) = \varphi[R_0(\tau)]$ {или зависимость $r(\tau) = \varphi[r_0(\tau)]$ }, необходимо вычислить в явном виде двойной интеграл (6.12), что удастся крайне редко даже при явном задании функции $y = f(x)$. Вычисляя численными методами интеграл (6.12) при различных значениях τ , получаем функцию $R(\tau) = \varphi[R_0(\tau)]$, заданную в виде таблицы.

Эту функцию можно получить более просто, если разложить двумерный нормальный закон распределения в ряд по ортогональным полиномам Эрмита:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2(\tau)}} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2r(\tau)x_1x_2 + x_2^2}{2(1-r^2(\tau))}\right) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n(\tau)}{n!} H_n(x_1)H_n(x_2), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}})$ - полиномы Эрмита.

Используя формулы (6.12) и (6.13), после преобразований можно получить, что

$$R(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \frac{r_0^n(\tau)}{n!}, \quad (6.14)$$

где $C_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Коэффициенты C_n просто находятся численным интегрированием. Для некоторых функций $f(x)$, заданных в явном виде, коэффициенты C_n могут быть получены аналитически. После нахождения коэффициентов C_n необходимо решить уравнение (6.14) относительно $r_0(\tau)$. Как правило, уравнение (6.14) решается численными методами.

В качестве номера n , на котором следует остановить вычисления, можно взять значение n , при котором выполняется неравенство

$$\left| R(\tau) - \sum_{n=0}^{n_1} C_n^2 \frac{r_0^n(\tau)}{n!} \right| < \varepsilon,$$

где ε - заданная достаточно малая величина.

Решение этого уравнения, численное или аналитическое, позволяет получить зависимость

$$r_0 = \varphi^{-1}[R(\tau)], \quad (6.15)$$

где $\varphi^{-1}[R(\tau)]$ - функция, обратная функции $\varphi[R(\tau)]$.

Таким образом, с помощью функционального преобразования $y = f(x)$ из исходного нормального процесса $\xi_0(\tau)$ с нормированной корреляционной функцией $r_0 = \varphi^{-1}[R(\tau)]$ будет формироваться негауссовский случайный процесс с заданным одномерным законом распределения и заданной корреляционной функцией $R(\tau)$.

Моделирование исходного случайного процесса $\xi_0(\tau)$ можно осуществить либо методом скользящего суммирования, либо методом рекуррентных уравнений. Для этого необходимо функцию $r_0(\tau)$, заданную, как правило, таблично, аппроксимировать функцией вида (6.15). Для использования метода скользящего суммирования необходимо найти спектральную плотность процесса $\xi_0(\tau)$, то есть вычислить преобразование Фурье от функции $r_0(\tau)$, заданной, как правило, таблично. Аппроксимация таблично заданной функции и преобразование Фурье от нее серьезных затруднений не вызывают при разумно заданной точности вычислений.

В целом нахождение функций $f(x)$ и $\varphi^{-1}(x)$ является достаточно трудоемкой задачей. Поэтому, прежде чем приступить к моделированию, необходим четкий план статистического эксперимента. Далеко не всегда моделирование негауссовских случайных процессов с заданной корреляционной функцией позволяет повысить точность моделирования радиоэлектронных систем по сравнению с аппроксимацией входных воздействий гауссовскими процессами. В частности, при моделировании радиоэлектронных систем, в которых задача обнаружения, фильтрации, распознавания осуществляется на основе анализа выборочных вторых моментов распределений, достаточно аппроксимировать входные воздействия гауссовскими процессами.

Для некоторых негауссовских случайных процессов [1] найдены весьма экономичные и достаточно простые моделирующие алгоритмы.

6.6. Моделирование случайного процесса с равномерным распределением

Пусть требуется сформировать [1] дискретные реализации стационарного случайного процесса, равномерно распределенного в интервале $(-a, a)$ и имеющего корреляционную функцию

$$R(\tau) = \frac{a^2}{3} r(\tau).$$

Пропуская гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией через нелинейный элемент с характеристикой

$$f(x) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

на его выходе получаем процесс $\xi(t)$ с одномерным равномерным в интервале $(-a, a)$ законом распределения. Корреляционную функцию процесса $\xi(t)$, получаемую с помощью такого преобразования, удастся выразить в замкнутой форме через функцию $r_0(t)$ процесса $\xi_0(t)$ в виде

$$R(\tau) = \frac{2a}{\pi} \arcsin \frac{r_0(\tau)}{2}.$$

Поэтому для того чтобы сформировать процесс с заданной корреляционной функцией, корреляционная функция $r_0(t)$ исходного случайного процесса $\xi_0(t)$ должна быть равной

$$r_0(\tau) = 2 \sin \left[\frac{\pi}{2a^2} r(\tau) \right] = 2 \sin \left[\frac{\pi}{6} r(\tau) \right].$$

Поскольку $|r(\tau)| \leq 1$, аргумент у синуса будет изменяться в пределах $-30^\circ \leq \pi r(\tau)/6 \leq 30^\circ$. Часто полагают, что $r_0(\tau) \approx 2\pi r(\tau)/6$ или $r_0(\tau) \approx r(\tau)$.

Максимальная величина разности $\Delta r[r_0(\tau)] = r_0(\tau) - r(\tau)$ не превосходит величины 0,016 и достигается при $|r_0(\tau)| = 0,6$. В практических расчетах такой величиной погрешности можно пренебречь.

Порядок моделирования процесса с равномерным одномерным распределением будет заключаться в следующем.

1. Формируется реализация $\xi_0^{(k)}(t)$ процесса $\xi_0(t)$ с нормальным одномерным распределением и корреляционной функцией $r_0(t)$. Среднее значение процесса равно нулю, а дисперсия равна единице.

2. Реализация $\xi^{(k)}[n]$ процесса с равномерным в интервале $(-a, a)$ одномерным распределением и заданной корреляционной функцией вычисляется по формуле

$$\xi^{(k)}[n] = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi_0[n]} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

6.7. Моделирование случайного процесса с релеевским распределением

Релеевский случайный процесс можно сформировать, осуществив следующее преобразование:

$$\xi(t) = \sqrt{\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)}, \quad (6.16)$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ - независимые нормальные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием, одинаковой дисперсией σ^2 и одинаковыми нормированными корреляционными функциями $r_0(\tau)$.

Выражение (6.16) основано на представлении узкополосного случайного нормального процесса через квадратурные составляющие

$$\eta(t) = A(t) \cos \omega_0 t + C(t) \sin \omega_0 t,$$

где $A(t)$ и $C(t)$ - стационарные и стационарно связанные случайные функции, совместное распределение которых нормальное; ω_0 - центральная частота спектральной плотности процесса $\eta(t)$.

Такое представление узкополосного случайного процесса позволяет определить его огибающую $E(t)$ в виде

$$E(t) = \sqrt{A^2(t) + C^2(t)}.$$

Одномерное распределение процесса (6.16) будет релеевским, с математическим ожиданием и дисперсией:

$$m_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \sigma_x^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2.$$

Корреляционную функцию $R(\tau)$ релевского процесса можно определить через функции $r_0(\tau)$ и $r(\tau)$:

$$R(\tau) = \frac{4-\pi}{2} \sigma^2 r(\tau) = \frac{\pi\sigma^2}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 r_0(\tau) + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + p^4(\tau) + \dots \right]$$

или оставляем только первый член ряда в виде

$$R(\tau) = \frac{4-\pi}{2} \sigma^2 r(\tau) = \frac{\pi\sigma^2}{2 \cdot 4} r_0^2(\tau)$$

Из последней формулы следует, что

$$r_0(\tau) \approx r(\tau).$$

Моделирование реализации $\xi^{(k)}[n]$ случайного процесса с одномерным релевским распределением и корреляционной функцией $R(\tau)$ сводится к моделированию реализаций $\xi_1^{(k)}[n]$ и $\xi_2^{(k)}[n]$ с одинаковыми нормированными корреляционными функциями $r_0(\tau) = \sqrt{r(\tau)}$ и к вычислениям по формуле (6.16). В работе [1] оценена точность моделирования и показано, что максимальная погрешность моделирования не превышает 2,5 %.

Часть 7. Моделирование сигналов в спектральной области

Развитие средств вычислительной техники позволяет перейти от обработке сигналов во временной области к обработке сигналов в спектральной области (в базисах Фурье, Уолша, Хаара и других ортогональных базисах). Такой переход позволяет получить существенные преимущества.

Во-первых, переход к спектрам сигналов позволяет без заметной потери информации сократить размерность пространства наблюдений, т.е. вектор $x(t_1, t_2, \dots, t_n)$ во временной области представить вектором $y(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_S)$ в частотной области, причем $S \leq n$.

Во-вторых, появление алгоритма БПФ (быстрого преобразования Фурье) позволяет вычислить спектр с меньшими вычислительными затратами, чем корреляционную функцию сигнала. Таким образом, задачи, для решения которых необходимо оценивать вторые моменты распределений, могут быть решены более оперативно.

В-третьих, процедура фильтрации сигнала от помех может быть реализована на основе алгоритма БПФ.

В самом общем виде схема обработки сигналов в частотной области представлена на рис. 7.1.

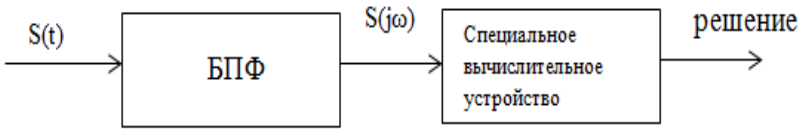


Рис. 7.1. Схема обработки сигналов в спектральной области

Вычислительное устройство, реализующее выбранный алгоритм обнаружения (фильтрации, распознавания и т.д.), осуществляет заданную последовательность операций со спектральной плотностью $S(j\omega)$, в общем случае комплексной, принятого сигнала $S(t)$.

Моделирование дискретных реализаций сигнала $S(t)$, необходимых для анализа характеристик модели специализированного вычислителя, и последующее получение дискретных реализаций спектральной плотности $S(j\omega)$ с помощью алгоритма БПФ требуют достаточно больших вычислительных затрат. Для их уменьшения целесообразно осуществлять непосредственное моделирование дискретных реализаций спектра входного сигнала.

7.1. Вычисление спектральной плотности сигнала

Для нахождения спектральной плотности $S(j\omega)$ непериодического сигнала $S(t)$ необходимо вычислить преобразование Фурье [19,20]

$$S(j\omega) = \int_0^T S(t)e^{-j\omega t} dt,$$

где T -длительность сигнала $S(t)$.

В том случае, когда сигнал $S(t)$ задан своими отсчетами, т.е. $S(n\Delta t)$, $n = 0, N-1$, используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$S[j\omega_l] = \sum_{n=0}^{N-1} S[nt] \exp\left(-\frac{j2\pi nl}{N}\right), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где N - число отсчетов сигнала.

При вычислениях часто используются безразмерное время и частота, то есть

$$S[jl] = \sum_{n=0}^{N-1} S[n] \exp\left(-\frac{j2\pi nl}{N}\right), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для вычисления спектральных составляющих $S(jl)$, как правило, используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). БПФ позволяет резко сократить вычислительные затраты по сравнению с ДПФ при вычислении спектральной плотности. Результаты вычислений спектральной плотности при использовании алгоритмов ДПФ или БПФ тождественны.

С помощью алгоритмов ДПФ или БПФ спектральная плотность вычисляется на частотах $\omega_l = \frac{2\pi l}{N}$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Для спектральной плотности действительного сигнала $S(t)$ справедливо

$$S\left[j\left(\frac{N}{2} + l\right)\right] = S\left[-j\left(\frac{N}{2} - l\right)\right].$$

То есть спектральная плотность, вычисленная с помощью алгоритма БПФ, симметрична относительно частот $l = 0, \pi, 2\pi$. Поэтому достаточно вычислить спектральную плотность на частотах

$$\omega_l = \frac{2\pi l}{N}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1. \quad (7.1)$$

Остальные спектральные составляющие дополнительной информации не содержат и, как правило, используются лишь при вычислении обратного преобразования Фурье.

7.2. Моделирование спектральной плотности случайного сигнала, вычисленной по одной реализации

Запишем преобразование Фурье произвольной k -й реализации случайного процесса $\xi(t)$ в виде

$$\begin{aligned} S^{(k)}(j\omega) &= \int_0^T \xi^{(k)}(t) \cos \omega t dt - j \int_0^T \xi^{(k)}(t) \sin \omega t dt = \\ &= \operatorname{Re} S^{(k)}(j\omega) - j \operatorname{Im} S^{(k)}(j\omega). \end{aligned}$$

Будем вычислять спектральную плотность на частотах (7.1). Сделаем предположение, что случайный процесс $\xi(t)$ является эргодическим случайным процессом. Найдем статистические характеристики случайной функции частоты $S(j\omega)$.

Необходимо отметить, что спектральная плотность $S^{(k)}(j\omega)$ не является какой-либо характеристикой случайного процесса $\xi(t)$. Спектральную плотность $S^{(k)}(j\omega)$, вычисленную по произвольной k -й реализации случайного процесса, следует рассматривать как отображение k -й реализации случайного процесса в спектральной области.

Для стационарных случайных процессов достаточно просто находятся статистические характеристики спектральной плотности $S(j\omega)$ [20], с учетом, что оператор математического ожидания линеен:

$$M \left\{ \operatorname{Re} S^{(k)}(j\omega) \right\} = \int_0^T M \left\{ \xi^{(k)}(t) \right\} \cos \omega t dt,$$

$$M \left\{ \operatorname{Im} S^{(k)}(j\omega) \right\} = \int_0^T M \left\{ \xi^{(k)}(t) \right\} \sin \omega t dt.$$

В том случае, когда среднее значение процесса $\xi(t)$ равно нулю, то математические ожидания реальной и мнимой частей спектральной плотности также равны нулю, то есть

$$M \left\{ \operatorname{Re} S^{(k)}(j\omega_k) \right\} = M \left\{ \operatorname{Im} S^{(k)}(j\omega_k) \right\} = 0. \quad (7.2)$$

В том случае, когда математическое ожидание процесса $\xi(t)$ отлично от нуля, условие (7.2) выполняется для всех частот, определяемых формулой (7.1), кроме частот $\omega_k = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \dots$. На этих частотах

$$M \left\{ \operatorname{Re} S^{(k)}(j\omega_k) \right\} = N, \text{ если } \omega_k = 0, \pi, 2\pi \dots$$

$$M \left\{ \operatorname{Im} S^{(k)}(j\omega_k) \right\} = N, \text{ если } \omega_k = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$$

Дисперсия спектральных составляющих реальной и мнимой частей спектра определяется как [20]

$$D \left\{ \operatorname{Re} S^{(k)}(j\omega_k) \right\} \approx D \left\{ \operatorname{Im} S^{(k)}(j\omega_k) \right\} \approx G^2(\omega_k) / 2 + O(1/T),$$

где $G(\omega)$ - спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$.

Символ $O(1/T)$ означает величину, примерно равную $1/T$. При вычислении спектральной плотности с помощью алгоритмов ДПФ или БПФ вместо символа $O(1/T)$ необходимо использовать символ $O(1/N)$.

Корреляционные соотношения спектральной плотности $S(j\omega)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} M_2 \left\{ \operatorname{Re} S^{(k)}(j\omega_k) \operatorname{Re} S^{(k)}(j\omega_e) \right\} &\approx O(1/T), \quad (k \neq e), \\ M_2 \left\{ \operatorname{Im} S^{(k)}(j\omega_k) \operatorname{Im} S^{(k)}(j\omega_e) \right\} &\approx O(1/T), \quad (k \neq e), \\ M_2 \left\{ \operatorname{Re} S^{(k)}(j\omega_e) \operatorname{Im} S^{(k)}(j\omega_k) \right\} &\approx O(1/T). \end{aligned}$$

Приведенные соотношения показывают, что спектральные составляющие, вычисленные на частотах (7.1), будут асимптотически некоррелированы.

Закон распределений спектральных составляющих спектральной плотности $S(j\omega)$ слабо зависит от распределения процесса $\xi(t)$. Это объясняется тем, что преобразование Фурье является линейным инерционным преобразованием. Если процесс $\xi(t)$ нормален, то и спектральные составляющие спектральной плотности $S(j\omega)$ будут нормальны. Если распределение процесса $\xi(t)$ отлично от нормального, то инерционность и линейность преобразования Фурье приведут к тому, что распределения вероятностей спектральных составляющих спектральной плотности $S(j\omega)$ будет асимптотически приближаться к нормальному. Скорость сходимости к нормальному распределению будет определяться законом распределения процесса $\xi(t)$. На практике обычно считается, что при числе отсчетов $N > 20 - 30$ распределение вероятностей спектральных составляющих практически нормально и в том случае, когда распределения вероятностей процесса $\xi(t)$ сильно асимметрично.

С учетом изложенного моделирование спектральных плотностей, вычисленных по одной реализации, сводится к моделированию последовательности нормальных, некоррелированных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, определяемой спектральной плотностью мощности процесса $\xi(t)$.

Моделирующие алгоритмы для реальной и мнимой частей спектральной плотности могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} S(j\omega_i) &= \xi \sqrt{G(\omega_i)/2}, \\ \operatorname{Im} S(j\omega_i) &= \xi \sqrt{G(\omega_i)/2},\end{aligned}$$

где ξ - нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

7.3. Моделирование оценки спектральной плотности мощности

По определению [9,10,20] спектральная плотность мощности $G(\omega)$ случайного процесса $\xi(t)$ определяется так:

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} M \left\{ \frac{1}{T} \left| S^{(k)}(j\omega) \right|^2 \right\}, \quad (7.3)$$

где $S^{(k)}(\omega)$ - спектральная плотность k -й реализации процесса $\xi(t)$.

Спектральная плотность мощности (7.3) является такой же характеристикой случайного процесса, как и корреляционная функция.

Согласно (7.3) для получения спектральной плотности мощности необходимо провести статистическое усреднение квадрата модуля спектральной плотности (комплексного спектра) по ансамблю реализаций при $T \rightarrow \infty$.

На практике часто имеется только одна реализация случайного процесса. Спектральная плотность мощности, вычисленная по одной реализации случайного процесса при конечном значении времени T

$$G^{(k)}(\omega) = \frac{1}{T} \left| S^{(k)}(j\omega) \right|^2, \quad (7.4)$$

называется оценкой спектральной плотности мощности.

Математическое ожидание оценки (7.4), вычисленной на частотах (7.1), равно

$$M \left\{ G^{(k)}(\omega_i) \right\} \approx G(\omega_i) + O(1/T). \quad (7.5)$$

В выражении (7.5) величина $G(\omega_i)$ является истинной спектральной плотностью мощности случайного процесса $\xi(t)$, то есть того процесса, спектральная плотность мощности которого определяется по одной реализации.

Дисперсия оценки, вычисленная на частотах (7.1), определится так:

$$D\{G^{(k)}(\omega_i)\} \approx G^2(\omega_i) + O(1/T).$$

Доказано, что коэффициент корреляции между оценками спектральной плотности мощности, вычисленной на частотах (7.1), не превосходит величины $O(1/T)$.

При увеличении времени T дисперсия оценки спектральной плотности мощности не стремится к нулевому значению, в отличие от оценок математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции. Вместо уточнения оценки спектральной плотности мощности появляются новые спектральные составляющие, вычисленные на частотах (7.1).

Закон распределения вероятностей оценки спектральной плотности мощности, с учетом изложенного, определяется суммой квадратов двух асимптотически некоррелированных случайных величин, имеющих одинаковую дисперсию, нулевое математическое ожидание и одинаковые, асимптотически нормальные законы распределений. Поэтому в соответствии с формулой (4.13) закон распределения оценки спектральной плотности будет подчиняться экспоненциальному закону распределения.

Моделирующий алгоритм для оценки спектральной плотности мощности будет иметь вид

$$\xi = \eta G(\omega),$$

где η - случайная величина с экспоненциальным законом распределения

$$w(x) = \exp(-x). \quad (7.6)$$

Поскольку математическое ожидание и дисперсия закона распределения (7.6) равны единице, то случайная величина ξ будет иметь математическое ожидание $G(\omega)$ и дисперсию $G^2(\omega)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971. 326 с.
2. Поляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М.: Сов. радио, 1977. 400 с.
3. Борисов Ю.П., Цветков В.Н. Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств. М.: Радио и связь, 1985. 177 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. М.: Высш. школа, 1985. 271 с.

5. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1976. 319 с.
6. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 321 с.
7. Кругликов В.К. Вероятностный машинный эксперимент в приборостроении. Л.: Машиностроение, 1985. 247 с.
8. Шальгин А.С., Палагин Ю.М. Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986. 319 с.
9. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
10. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М: Радио и связь, 1989. 656 с.
11. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука. 1967, 632 с.
12. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.
13. Шахтарин Б.И. Случайные процессы в радиотехнике. 3-е изд. перераб. Т. 1. Линейные преобразования. Гелиос АРВ, 2006. 464 с., ил. ISBN 5-854-38147-8.
14. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятности. 8-е изд., доп. и испр. М.: Едиториал УРСС, 2005. 448 с.
15. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1991. 608с. [ISBN 5-256-00789-0](https://www.isbn-international.org/view/title/5-256-00789-0).
16. Вентцель Е.С., Очаров Л.А. Теория случайных процесс и ее приложения: учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2000.383 с.
17. Шапоров С.Д., Родин Б.П. Случайные процессы. учебник. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2010. 237 с. ISBN 978-5-85546-499-3.
18. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964. 498 с.
19. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
20. Марпл С.П.-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. под ред. О.И. Хабарова и Г.А. Сидоровой. М.: Мир, 1990. 584 с.