



А.А. БУБНОВ, С.А. БУБНОВ, Е.И. ПРОКАЗНИКОВА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

Часть 1

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\lambda(1-x_k^2) - e}{8x_k + e^{x_k}}$$

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**А.А. Бубнов, С.А. Бубнов,
Е.Н. Проказникова**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

*Рекомендовано Научно-методическим советом
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет»
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям 2.09.00.00 «Информатика
и вычислительная техника» (квалификация «бакалавр»)*

Москва
КУРС
2018

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73
Б90

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11
----------------	---

Рецензенты:

А.Н. Пылькин — д-р техн. наук, профессор, заслуженный работник высшей школы, заведующий кафедрой ВПМ РГРТУ;

В.Н. Ручкин — д-р техн. наук, профессор кафедры информатики и вычислительной техники РГУ им. С.А. Есенина

Б90

Бубнов А.А.,

Вычислительная математика для программистов: в 3 ч. Ч. 1: учеб. пособие / А.А. Бубнов, С.А. Бубнов, Е.Н. Проказникова. — М.: КУРС, 2018. — 144 с.

ISBN 978-5-906923-78-3

В учебном пособии излагаются основы теории погрешностей, некоторые прямые и численные методы вычисления собственных значений и векторов матриц, значений функции в некоторой точке. Кроме того в книге рассматриваются наиболее распространенные численные методы решения СЛАУ и решения нелинейных уравнений, а также основы теории интерполирования. Для большинства методов приведены примеры. Издание предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по укрупненному направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника».

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

ISBN 978-5-906923-78-3

© Бубнов А.А., Бубнов С.А.,
Проказникова Е.Н., 2017
© КУРС, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Широкое применение техники и IT-технологий в различных сферах человеческой деятельности дало мощный толчок развитию программного обеспечения, усложнению математических моделей и программных алгоритмов. Использование специализированных математических пакетов прикладных программ и систем программирования вычислительных методов при решении большого количества прикладных задач, направленных на анализ разнородной информации, не всегда целесообразно.

Это обстоятельство делает актуальной задачу повышения эффективности обучения навыкам использования методов вычислительной математики для решения прикладных задач с использованием ЭВМ.

Издания, сделанные ранее, посвящены либо изложению теоретического материала соответствующих разделов вычислительной математики в избыточном для студентов технических вузов объеме, либо представляют собой сборники текстов программ без введения в теорию используемых методов вычислений и обобщенного представления алгоритма вычисления.

Данное учебное пособие направлено на изложение теоретического материала некоторых разделов вычислительной математики в объеме, достаточном для самостоятельного построения алгоритма вычисления и написания программного кода студентом технического вуза. Материал разбит на тематические части, соответствующие традиционно выделяемым областям.

Целью учебного пособия является ознакомление студентов с математическими основами методов вычислительной математики и применение этих методов для решения прикладных задач.

В первой главе излагаются основы теории погрешностей, источники возникновения погрешности решения прикладной задачи, даются основные правила задания приближенных величин и оценивается погрешность как простейших, так и более сложных функций от приближенно заданных величин.

Проблема собственных значений и собственных векторов матриц является одной из самых сложных задач линейной алгебры. К этой проблеме приводят математические модели процессов из различных научных дисциплин. На практике в основном применяются численные методы решения проблемы собственных значений. Во второй главе рассматриваются как прямые, так и численные методы вычисления собственных значений и векторов матриц.

При проведении вычислений на ЭВМ часто возникают ситуации, когда необходимо вычислить значение какой-либо функции в некоторой точке, принадлежащей области определения функции. Третья глава посвящена методам нахождения значений функций, позволяющим снизить величину погрешности вычислений при использовании ЭВМ.

Теория решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) достаточно проста, однако практическая реализация численных методов вызывает немало трудностей, так как многие методы очень чувствительны к ошибкам округления и возмущению входных данных. В четвертой главе учебного пособия рассматриваются наиболее распространенные численные методы решения СЛАУ.

В пятой главе описываются некоторые численные методы решения нелинейных уравнений. Это связано с тем, что нелинейные уравнения часто встречаются при проведении математического моделирования процессов в различных научных дисциплинах.

В шестой главе излагаются основы теории интерполирования и наиболее широко используемые способы вычисления приближенных значений функции и ее производных в случае, когда известны значения функции в некоторых фиксированных точках.

В пособии не ставится задача фундаментального изучения математических основ изложенных в нем численных методов.

Авторы выражают глубокую благодарность Б. П. Демидовичу, И. А. Марон, А. А. Самарскому, В. В. Воеводину, О. М. Огородникову, Ю. И. Рыжикову, Н. Н. Калиткину, Н. В. Копченовой, Н. С. Бахвалову, Н. П. Жидкову, Г. М. Кобелькову, В. Д. Колдаеву, Ю. П. Боглаеву, В. А. Срочко, Б. В. Исакову, Л. И. Турчаку, Д. Мак-Кракену, Р. Хэммингу, Ю. А. Данилову, А. Е. Мудрову, А. А. Амосову, В. М. Вержбицкому, чей научно-педагогический опыт был явно и неявно использован в работе над книгой.

Авторский коллектив

Бубнов А.А.: гл. 2, 3;

Бубнов С.А.: гл. 4, 5;

Проказникова Е.Н.: гл. 1, 6

Глава 1

ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В этой главе рассматриваются источники возникновения погрешности решения прикладной задачи, даются основные правила задания приближенных величин и оценивается погрешность как простейших, так и более сложных функций от приближенно заданных величин. Это необходимо для понимания ситуации, в которой используются рассматриваемые в книге методы решения прикладных задач.

1.1. Использование математических моделей и численных методов при решении прикладных задач

При решении прикладных задач исследователя, разработчика или проектировщика математика интересует не сама по себе, а как средство решения этой прикладной задачи. Рассмотрим поэтому, как решается любая реальная задача, например нахождение светового потока конструируемой лампы, производительности проектируемой химической установки или себестоимости продукции строящегося завода.

Одним из способов решения является эксперимент. Можно построить лампу, установку или завод и измерить необходимые характеристики. Однако если характеристика оказалась неудачной, то следует внести изменения в проект, построить новый завод и т.д. Из этого следует, что получение приемлемого решения прикладной задачи окажется слишком медленным и дорогим.

Другим способом является математический анализ конструкции или явления. Такой анализ применяется не к реальным явлениям, а к некоторым математическим моделям этих явлений. Поэтому первая стадия решения прикладной задачи — это формулировка математической модели (постановка задачи). Например, для физического процесса модель обычно состоит из уравнений, описывающих процесс. В эти уравнения в виде коэффициентов входят характеристики тел или веществ, участвующих в процессе.

Любое изучаемое явление бесконечно сложно. Оно связано с другими явлениями природы, возможно не представляющими интереса для рассматриваемой задачи. Математическая модель должна охватывать важнейшие для данной задачи стороны явления. Наиболее сложная и ответственная работа при постановке задачи заключается в выборе связей и характеристик явления, существенных для данной прикладной задачи и подлежащих формализации и включению в математическую модель.

Если математическая модель выбрана недостаточно тщательно, то, какие бы методы ни применялись для расчета, все выводы будут недостаточно надежны, а в некоторых случаях могут оказаться совершенно неправильными.

Вторая стадия работы — это математическое исследование. В зависимости от сложности модели применяются различные математические подходы. Для наиболее грубых и несложных моделей зачастую удается получить аналитические решения. Из-за грубости модели точность этого подхода невелика. Нередко такой подход позволяет оценить лишь порядки величин.

Для более точных и сложных моделей аналитические решения удается получить сравнительно редко. Обычно в этом случае используются приближенные математические методы, позволяющие получить удовлетворительные качественные и количественные результаты. Наконец, для наиболее сложных и точных моделей основными методами решения являются численные методы. Они, как правило, требуют проведения расчетов с использованием ЭВМ. Эти методы зачастую позволяют добиться хорошего количественного описания явления, не говоря уже о качественном.

Во всех случаях математическая точность решения должна быть несколько (в 2–4 раза) выше, чем ожидаемая физическая точность модели. Более высокой математической точности добиваться бессмысленно, ибо общую точность ответа это все равно не повысит. Но более низкая математическая точность недопустима (для облегчения решения задачи нередко в ходе работы делают дополнительные математические упрощения; это снижает ценность результатов).

Наконец, третья стадия работы — это осмысливание математического решения и сопоставление его с экспериментальными данными. Если расчеты хорошо согласуются с контрольными экспериментами, то это свидетельствует о правильном выборе модели; такую модель можно использовать для расчета процессов данного типа. Если же расчет и эксперимент не согласуются, то модель необходимо пересмотреть и уточнить.

Численные методы являются одним из мощных математических средств решения прикладных задач. Есть задачи, где без достаточно сложных численных методов не удалось бы получить ответа. Классический пример — открытие Нептуна по аномалиям движения Урана.

Более того, часто требуется выполнить огромное число действий за короткое время, иначе ответ будет не нужен. Например, суточный прогноз погоды должен быть вычислен за несколько часов и т.п.

Однако применять численные методы далеко не просто. ЭВМ умеют выполнять только арифметические действия и логические операции. Поэтому помимо разработки математической модели требуется еще разработка алгоритма, сводящего все вычисления к последовательности арифметических и логических действий. Выбирать модель и алгоритм надо с учетом скорости и объема памяти ЭВМ: чересчур сложная модель может оказаться машине не под силу, а слишком простая — не даст физической точности.

Сам алгоритм и программа для ЭВМ должны быть тщательно проверены, так как для сложных алгоритмов не часто удается доказать сходимость классическими методами.

Строгое математическое обоснование алгоритма редко бывает исчерпывающим исследованием. Поэтому окончательную оценку метода можно дать только после опробования его в практических расчетах.

Современный исследователь, разработчик или проектировщик для успешной работы должен одинаково хорошо владеть и «классическими» методами, и численными методами решения прикладных задач.

1.2. Источники и классификация погрешностей

Настоящее время характерно резким расширением приложений математики, связанным с созданием и развитием средств вычислительной техники. Расширение возможностей приложения математики обусловило математизацию химии, экономики, биологии, психологии, медицины и других разделов науки. Требование численного решения новых задач привело к появлению большого количества новых методов.

Следует отметить, что при проведении математического эксперимента и математического моделирования особое внимание уделяется возможности появления ошибок.

Источниками возникновения погрешности численного решения прикладной задачи являются следующие факторы:

- неточность математического описания (например, неточность задания начальных данных);
- неточность численного метода решения задачи (данная причина возникает, когда решение математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, что приводит к необходимости ограничения их числа, т.е. использованию приближенного решения);
- конечная точность машинной арифметики.

Все погрешности можно разделить на три вида:

- неустранимая погрешность;
- погрешность метода;
- вычислительная погрешность.

Результирующая погрешность определяется как сумма величин всех перечисленных выше погрешностей.

Неустранимая погрешность состоит из двух частей:

- погрешность, обусловленная неточностью задания числовых данных, входящих в математическое описание задачи;
- погрешность, являющаяся следствием несоответствия математического описания задачи реальной действительности (погрешность математической модели).

Погрешность метода связана со способом решения поставленной математической задачи. Она появляется в результате замены исходной математической модели другой и/или конечной последовательностью других, более простых (например, линейных) моделей. При создании численных методов закладывается возможность отслеживания таких погрешностей и доведения их до сколь угодно малого уровня. Отсюда естественно отношение к погрешности метода как устранимой (или условной).

Вычислительная погрешность (погрешность округлений) обусловлена необходимостью выполнять арифметические операции над числами, усеченными до количества разрядов, зависящего от применяемой вычислительной техники.

Введем формальные определения.

Пусть I — точное значение отыскиваемого параметра, \tilde{I} — значение этого параметра, соответствующее принятому математическому описанию, \tilde{I}_h — решение задачи, получаемое при реализации численного метода в предположении отсутствия округлений, \tilde{I}_h^* — приближение к решению задачи, получаемое при реальных вычислениях. Тогда:

$\rho_1 = \tilde{I} - I$ — неустранимая погрешность;

$\rho_2 = \tilde{I}_h - \tilde{I}$ — погрешность метода;

$\rho_3 = \tilde{I}_h^* - \tilde{I}_h$ — вычислительная погрешность.

Полная погрешность $\rho_0 = \tilde{I}_h^* - I$, равная разности между реально получаемым и точным решениями задачи, удовлетворяет равенству

$$\rho_0 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3.$$

Во многих случаях под термином «погрешность» того или иного вида понимают не рассмотренные выше разности между приближениями, а некоторые меры близости между ними. Например, в скалярном случае полагают:

$$\rho_0 = |\tilde{I}_h^* - I|;$$

$$\rho_1 = |\tilde{I} - I|;$$

$$\rho_2 = |\tilde{I}_h - \tilde{I}|;$$

$$\rho_3 = |\tilde{I}_h^* - \tilde{I}_h|.$$

При таких обозначениях получаем

$$\rho_0 \leq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3.$$

По поводу исследования неустранимой погрешности может возникнуть такой вопрос: зачем изучать неустранимую погрешность решения прикладной задачи? Такая точка зрения может быть оправданной, если разработчик получает для численного решения прикладной задачи уже готовые уравнения, не участвуя в обсуждении постановки задачи. Однако часто разработчик сам занимается исследованием постановки задачи, анализом и упрощением рассматриваемых уравнений. Так как все явления в природе взаимосвязаны, то в принципе невозможно математически точно описать никакой реальный процесс, происходящий в природе. При этом анализ влияния различных факторов на погрешность решения может позволить получить простейшее описание процесса с допустимой погрешностью. Обычно разработчик имеет представление о требуемой окончательной точности результата и, исходя из этого, может производить необходимые упрощения исходной задачи.

Если разработчик не участвует в обсуждении постановки задачи, то представление о величине неустранимой погрешности ему все равно необходимо по следующей причине. При решении большинства задач нет особого смысла применять метод решения задачи с погрешностью, существенно меньшей, чем величина неустранимой

погрешности, можно разумно сформулировать требования к точности результата численного решения задачи.

Непомерные требования заказчика к точности результата часто вызваны тем, что он имеет преувеличенные представления о возможностях ЭВМ и поэтому серьезно не продумывает, что все-таки ему нужно.

Такие требования часто снимаются в процессе обсуждения задачи на основе следующих соображений:

1) при более детальном подходе к изучению задачи в целом оказывается, что столь высокая точность и не нужна;

2а) математическая модель явления настолько груба, что требовать столь высокую точность бессмысленно;

2б) параметры модели не могут быть определены с высокой точностью;

3) заказчику нужен вообще не количественный, а качественный результат, например такого типа: будет ли работать данное устройство в заданном режиме или нет.

1.3. Абсолютная и относительная погрешности

Приближенным числом a называется число, незначительно отличающееся от точного A и заменяющее последнее в вычислениях. Если известно, что $a < A$, то a называется приближенным значением числа A по недостатку, если же $a > A$, то — по избытку. Если a есть приближенное значение числа A , то пишут $a \approx A$.

Под ошибкой или погрешностью Δa приближенного числа a обычно понимается разность между соответствующим точным числом A и данным приближенным, т.е.

$$\Delta a = A - a.$$

Если $A > a$, то ошибка положительна: $\Delta a > 0$; если же $A < a$, то ошибка отрицательна: $\Delta a < 0$. Чтобы получить точное число A , нужно к приближенному числу a прибавить его ошибку Δa , т.е.

$$A = a + \Delta a.$$

Таким образом, точное число можно рассматривать как приближенное с ошибкой, равной нулю.

Во многих случаях знак ошибки неизвестен. Тогда целесообразно пользоваться абсолютной погрешностью приближенного числа

$$\Delta = |\Delta a|.$$

Определение. Если A — точное значение некоторой величины и a — известное приближение к нему, то предельной абсолютной погрешностью приближенного значения a называют некоторую абсолютную величину $\Delta(a)$, про которую известно, что

$$|a - A| \leq \Delta(a).$$

Отсюда следует, что точное число A заключено в границах

$$a - \Delta(a) \leq A \leq a + \Delta(a).$$

Следовательно, $a - \Delta(a)$ есть приближение числа A по недостатку, а $a + \Delta(a)$ — приближение числа A по избытку.

В этом случае для краткости пользуются записью

$$A = a \pm \Delta(a).$$

Пример. Определить предельную абсолютную погрешность числа $a = 3,14$, заменяющего число π .

Решение. Так как имеет место неравенство

$$3,14 < \pi < 3,15,$$

то $|a - \pi| < 0,01$, и следовательно, можно принять $\Delta(a) = 0,01$.

Если учесть, что $3,14 < \pi < 3,142$, то будем иметь лучшую оценку $\Delta(a) = 0,002$.

Заметим, что сформулированное выше понятие предельной абсолютной погрешности является весьма широким, а именно: под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа a понимается любой представитель бесконечного множества неотрицательных чисел $\Delta(a)$, удовлетворяющих неравенству $|a - A| \leq \Delta(a)$. Отсюда логически вытекает, что всякое число, большее предельной абсолютной погрешности данного приближенного числа, также может быть названо предельной абсолютной погрешностью этого числа. Практически удобно в качестве $\Delta(a)$ выбирать возможно меньшее при данных обстоятельствах число.

Для точности измерений существенна абсолютная погрешность, приходящаяся на единицу измерения, которая носит название относительной погрешности.

Определение. Предельной относительной погрешностью приближенного значения числа a называют некоторую величину $\delta(a)$, про которую известно, что

$$\left| \frac{a - A}{a} \right| \leq \delta(a) \text{ или } \frac{\Delta(a)}{|a|} \leq \delta(a).$$

Зная предельную относительную погрешность $\delta(a)$, получают границы для точного числа:

$$A = a(1 \pm \delta(a)).$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Пример. При определении газовой постоянной для воздуха получили $R = 29,25$. Зная, что относительная погрешность этого значения равна 1%, найти пределы, в которых заключается R .

Решение. Имеем $\delta(R) = 0,001$, тогда $\Delta(R) = R\delta(R) \approx 0,03$.

Следовательно, $29,22 \leq R \leq 29,28$.

1.4. Запись приближенных чисел

Любое положительное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \alpha_{m-2} 10^{m-2} + \dots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \dots,$$

где α_i — цифры числа a ($\alpha_i = 0, 1, 2, \dots, 9$), причем старшая цифра $\alpha_m \neq 0$, а m — некоторое целое число (старший десятичный разряд числа a).

Каждая единица, стоящая на определенном месте в числе a , написанном в виде десятичной дроби, имеет свое значение. Единица, стоящая на первом месте, равна 10^m , на втором — 10^{m-1} , n -м — 10^{m-n+1} и т.д.

На практике преимущественно приходится иметь дело с приближенными числами, представляющими собой конечные десятичные дроби:

$$\beta = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \beta_{m-n+1} 10^{m-n+1} \quad (\beta_m \neq 0).$$

Все сохраняемые десятичные знаки β_i ($i = m, m-1, \dots, m-n+1$) называются значащими цифрами приближенного числа b , причем возможно, что некоторые из них равны нулю (за исключением β_m). При позиционном изображении числа b в десятичной системе счисления иногда приходится вводить лишние нули в начале или в конце числа.

Такие нули не считаются значащими цифрами.

Определение. Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример.

$$a = 0,02035 \quad a = 0,02035000.$$

Цифры, подчеркнутые линией, значащие.

Определение. Значащую цифру называют верной, если модуль погрешности числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Пример.

$$\begin{aligned} a &= 0,0\mathbf{2035} & \Delta(a) &= 0,000003 \\ a &= 0,0\mathbf{20350000} & \Delta(a) &= 0,00000007. \end{aligned}$$

Цифры, подчеркнутые линией, верные.

Определение. Число записано со всеми верными цифрами, если в его записи представлены только верные значащие цифры.

Иногда употребляется термин «число верных цифр после запятой»: подсчитывается число верных цифр после запятой от первой цифры до последней верной цифры.

Если приближенное число содержит лишние (или неверные) знаки, то его следует округлить.

1.5. Округление чисел

При решении вычислительных задач часто возникает необходимость в округлении некоторого приближенного и точного числа a , т.е. в замене его числом a_1 с меньшим количеством значащих цифр. Число a_1 выбирают так, чтобы *погрешность округления* $|a_1 - a|$ была минимальной.

Правило округления (по дополнению). Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры его, стоящие справа от n -й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

1) если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;

2) если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

3) если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр имеются ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;

3а) если же первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра сохраняется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (правило четной цифры).

Иными словами, если при округлении числа отбрасывается меньше половины единицы последнего сохраняемого десятичного разряда, то цифры всех сохраненных разрядов остаются неизмен-

ными; если же отброшенная часть числа составляет больше половины единицы последнего сохраненного десятичного разряда, то цифра этого разряда увеличивается на единицу. В исключительном случае, когда отброшенная часть в точности равна половине единицы последнего сохраненного десятичного разряда, для компенсации знаков ошибок округления используется правило четной цифры.

Очевидно, что при применении правила округления погрешность округления не превосходит $\frac{1}{2}$ единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

Пример. Округляя число $\pi = 3,1415926535\dots$ до пяти, четырех и трех значащих цифр, получим приближенные числа 3,1416; 3,142; 3,14 с абсолютными погрешностями, меньшими $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$; $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$; $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр. В тех случаях, когда приближенное число содержит излишнее количество неверных значащих цифр, прибегают к округлению. Обычно руководствуются следующим практическим правилом: при выполнении приближенных вычислений число значащих цифр промежуточных результатов не должно превышать числа верных цифр более чем на одну или две единицы.

Окончательный результат может содержать не более чем одну лишнюю значащую цифру по сравнению с верными. Если при этом абсолютная погрешность результата не превышает двух единиц последнего сохраненного десятичного разряда, то лишняя цифра называется сомнительной.

Приведенное правило позволяет без ущерба точности вычислений избегать написания лишних цифр и значительно экономит время вычислений. Сохранение запасных знаков имеет тот смысл, что обычно оценка погрешностей результатов производится для наилучших вариантов и фактическая погрешность может оказаться значительно меньше максимальной теоретической. Таким образом, во многих случаях те значащие цифры, которые считаются неверными, на самом деле являются верными.

Приходится также округлять точные числа, содержащие слишком много или бесконечное количество значащих цифр, сообразуясь с общей точностью вычислений.

Заметим, что если точное число A округлить по правилу дополнения до n значащих цифр, то полученное таким образом приближенное число a будет иметь n верных цифр (в узком смысле).

Если же приближенное число a , имеющее n верных цифр, округлить до n значащих цифр, то полученное новое приближенное число a_1 , вообще говоря, будет иметь n верных цифр в широком смысле. Действительно, в силу неравенства

$$|A - a_1| \leq |A - a| + |a - a_1|$$

предельная абсолютная погрешность числа a_1 складывается из абсолютной погрешности числа a и погрешности округления.

1.6. Вычислительная погрешность

Далее для краткости будем обозначать абсолютную погрешность числа x как Δ_x , относительную погрешность — δ_x .

Погрешность алгебраической суммы чисел $x \pm \Delta_x$, $y \pm \Delta_y$

Абсолютная погрешность:

$$u = (x \pm \Delta_x) + (y \pm \Delta_y) = (x + y) \pm (\Delta_x + \Delta_y).$$

Определение. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

Относительная погрешность:

$$\delta_u = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x + y|} = \frac{\Delta_x}{|x + y|} \frac{|x|}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|x + y|} \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x + y|} \delta_x + \frac{|y|}{|x + y|} \delta_y.$$

Определение. Предельная относительная погрешность суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых.

Правило. Чтобы сложить числа различной абсолютной точности, следует:

- 1) выделить числа, десятичная запись которых обрывается ранее других, и оставить их без изменения;
- 2) остальные числа округлить по образцу выделенных, сохраняя один или два запасных десятичных знака;
- 3) произвести сложение данных чисел, учитывая все сохраненные знаки;
- 4) полученный результат округлить на один знак.

При округлении по правилу дополнения слагаемых суммы

$$u = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

до m -го десятичного разряда погрешность округления суммы в самом неблагоприятном случае не превышает величины

$$\Delta_{\text{окр}} \leq n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^n.$$

Можно получить более точный расчет погрешности округления суммы, если учесть знаки ошибок округления слагаемых.

Пример. Найти сумму приближенных чисел: 0,348; 0,1834; 345,4; 235,2; 11,75; 9,27; 0,0849; 0,0214; 0,000354, каждое из которых имеет все верные значащие цифры (в широком смысле).

Решение. Выделяем числа наименьшей точности 345,4 и 235,2, абсолютная погрешность которых может достигать 0,1. Округляя остальные числа с точностью 0,01, получим

$$345,4 + 235,2 + 11,75 + 9,27 + 0,35 + 0,18 + 0,08 + 0,02 + 0,00 = 602,25.$$

Округляя результат до 0,1 по правилу четной цифры, получим приближенное значение суммы 602,2.

Полная погрешность результата складывается из трех слагаемых:

1) суммы предельных погрешностей исходных данных

$$\Delta_1 = 10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-1} + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-4} + 10^{-6} = \\ = 0,221301 < 0,222;$$

2) абсолютной величины суммы ошибок (с учетом их знаков) округления слагаемых

$$\Delta_2 = |-0,002 + 0,0034 + 0,0049 + 0,0014 + 0,000354| = \\ = 0,008054 < 0,009;$$

3) заключительной погрешности округления результата

$$\Delta_3 = 0,050.$$

Следовательно,

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \leq 0,222 + 0,009 + 0,050 = 0,281 < 0,3.$$

Таким образом, искомая сумма есть $602,2 \pm 0,3$.

Погрешность разности чисел $x \pm \Delta_x$, $y \pm \Delta_y$

Абсолютная погрешность:

$$u = (x \pm \Delta_x) - (y \pm \Delta_y) = (x - y) \pm (\Delta_x + \Delta_y).$$

Определение. Предельная абсолютная погрешность разности приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

Относительная погрешность:

$$\delta_u = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x - y|} = \frac{\Delta_x}{|x - y|} \frac{|x|}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|x - y|} \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x - y|} \delta_x + \frac{|y|}{|x - y|} \delta_y.$$

Замечание о потере точности при вычитании близких чисел. Если приближенные числа x_1 и x_2 достаточно близки друг к другу и имеют малые абсолютные погрешности, то результирующее число мало. Из этого вытекает, что предельная относительная погрешность в этом случае может быть весьма большой, в то время как относительные погрешности уменьшаемого и вычитаемого остаются малыми, т.е. здесь происходит потеря точности.

Вычислим, например, разность двух чисел: $x_1 = 45,232$ и $x_2 = 45,211$, каждое из которых имеет пять верных знаков. Вычитая, получим $u = 45,232 - 45,211 = 0,021$.

Таким образом, разность u имеет лишь две значащие цифры, из которых последняя сомнительна, так как предельная абсолютная погрешность разности

$$\Delta u = 0,0005 + 0,0005 = 0,001.$$

Предельные относительные погрешности вычитаемого, уменьшаемого и разности соответственно:

$$\delta_{x_1} = \frac{0,005}{47,132} \approx 0,00001;$$

$$\delta_{x_2} = \frac{0,005}{47,111} \approx 0,00001;$$

$$\delta_u = \frac{0,001}{0,021} \approx 0,05.$$

Предельная относительная погрешность разности здесь примерно в 5000 раз больше предельных относительных погрешностей исходных данных.

Поэтому при приближенных вычислениях полезно преобразовывать выражения, вычисление числовых значений которых приводит к вычитанию близких чисел.

Пример. Найти разность $u = \sqrt{2,01} - \sqrt{2}$ с тремя верными знаками.

Решение. Так как $\sqrt{2,01} = 1,41774469\dots$ и $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$, то искомым результатом есть $u = 0,00353 = 3,53 \cdot 10^{-3}$.

Этот результат можно получить, если записать искомую разность в виде выражения

$$u = \frac{0,01}{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}}$$

и взять корни $\sqrt{2,01}$ и $\sqrt{2}$ лишь с тремя верными знаками:

$$u = \frac{0,01}{1,42 + 1,41} = \frac{0,01}{2,83} = 10^{-2} \cdot 3,53 \cdot 10^{-1} = 3,53 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, можно определить следующее практическое правило: при приближенных вычислениях следует по возможности избегать вычитания двух почти равных приближенных чисел; если же в силу необходимости приходится вычитать такие числа, то следует уменьшаемое и вычитаемое брать с достаточным числом запасных верных знаков (если такая возможность имеется).

Погрешность произведения чисел $x \pm \Delta_x$, $y \pm \Delta_y$

Абсолютная погрешность:

$$\begin{aligned} u = (x \pm \Delta_x) \cdot (y \pm \Delta_y) &= x \cdot y \pm y \cdot \Delta_x \pm x \cdot \Delta_y \pm \Delta_x \cdot \Delta_y \approx \\ &\approx x \cdot y \pm y \cdot \Delta_x \pm x \cdot \Delta_y. \end{aligned}$$

Относительная погрешность:

$$\delta_u = \frac{|y| \cdot \Delta_x + |x| \cdot \Delta_y}{|x \cdot y|} = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y.$$

Определение. Предельная относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

Если все множители произведения u весьма точны, за исключением одного, то из этого следует, что предельная относительная погрешность произведения в этом случае будет практически совпадать с предельной относительной погрешностью множителя, обладающего наименьшей точностью. В частном случае, если приближенным является лишь множитель x_1 , имеем просто

$$\delta_u = \delta_{x_1}.$$

Зная предельную относительную погрешность δ_u произведения u , можно определить его предельную абсолютную погрешность Δu по формуле

$$\Delta_u = |u|\delta_u.$$

Правило. Чтобы найти произведение нескольких приближенных чисел с различным числом верных значащих цифр, достаточно:

1) округлить их так, чтобы каждое из них содержало на одну (или две) значащую цифру больше, чем число верных цифр в наименее точном из сомножителей;

2) в результате умножения сохранить столько значащих цифр, сколько верных цифр имеется в наименее точном из сомножителей (или удержать еще одну запасную цифру).

Правило. Если все сомножители имеют m верных десятичных знаков и число их не больше 10, то число верных (в широком смысле) знаков произведения на одну или на две единицы меньше m .

Следовательно, если нужно обеспечить в произведении m верных десятичных знаков, то сомножители следует брать с одним или двумя запасными знаками.

Если сомножители обладают различной точностью, то под m следует понимать число верных знаков в наименее точном из сомножителей. Таким образом, число верных знаков произведения небольшого числа сомножителей (порядка десяти) может быть на одну или две единицы меньше числа верных знаков в наименее точном из этих сомножителей.

Пример. Определить произведение u приближенных чисел $x_1 = 12,2$ и $x_2 = 73,56$ и число верных знаков в нем, если все написанные цифры сомножителей верные.

Решение. Имеем $\Delta_{x_1} = 0,05$ и $\Delta_{x_2} = 0,005$. Отсюда

$$\delta_u = \frac{0,05}{12,2} + \frac{0,005}{73,56} = 0,0042.$$

Так как произведение $u = 897,432$, то

$$\Delta_u = u\delta_u = 897 \cdot 0,004 \approx 3,6.$$

Отсюда u имеет лишь два верных знака и результат следует записать так: $u = 897 \pm 4$.

Следует отметить частный случай

$$u = kx,$$

где k — точный множитель, отличный от нуля. Имеем

$$\delta_u = \delta_x$$

и

$$\Delta_u = |k|\Delta_x,$$

т.е. при умножении приближенного числа на точный множитель k относительная предельная погрешность не изменяется, а абсолютная предельная погрешность увеличивается в $|k|$ раз.

Погрешность степени приближенного числа

Пусть $u = x^m$ (m — натуральное число), тогда $\ln u = m \ln x$, и следовательно,

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right| \leq m \left| \frac{\Delta x}{x} \right|.$$

Отсюда

$$\delta_u = m \delta_x.$$

Определение. Предельная относительная погрешность степени приближенного числа равна произведению показателя степени на предельную относительную погрешность основания.

Предельная относительная погрешность m -й степени числа в m раз больше предельной относительной погрешности самого числа.

Погрешность корня из приближенного числа

Пусть теперь $u = \sqrt[m]{x}$, тогда $u^m = x$. Отсюда

$$\delta_u = \frac{1}{m} \delta_x.$$

Определение. Предельная относительная погрешность корня из приближенного числа равна предельной относительно погрешности подкоренного числа, деленной на показатель корня.

Предельная относительная погрешность корня m -й степени в m раз меньше предельной относительной погрешности подкоренного числа.

Пример. Определить, с какой относительной погрешностью и со сколькими верными цифрами можно найти сторону a квадрата, если его площадь $s = 12,34$ (с точностью до 0,01).

Решение. Имеем $a = \sqrt{s} = 3,5128\dots$. Так как

$$\delta_s = \frac{0,01}{12,33} \approx 0,0008,$$

то $\delta_a = \frac{1}{2} \delta_s = 0,0004$. Поэтому

$$\Delta_a = 3,5128 \cdot 0,0004 = 1,4 \cdot 10^{-3}.$$

Отсюда число a будет иметь примерно четыре верных знака (в широком смысле), и следовательно, $a = 3,513$.

Погрешность частного $x \pm \Delta_x$, $y \pm \Delta_y$

Абсолютная погрешность:

$$u = \frac{x \pm \Delta_x}{y \pm \Delta_y} = \frac{(x \pm \Delta_x) \cdot (y \pm \Delta_y)}{(y \pm \Delta_y) \cdot (y \pm \Delta_y)} \approx \frac{x}{y} \pm \frac{(y \cdot \Delta_x) + (x \cdot \Delta_y)}{y^2}.$$

Относительная погрешность:

$$\delta_u = \frac{|y| \cdot \Delta_x + |x| \cdot \Delta_y}{\left| \frac{x}{y} \right|} = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y.$$

Определение. Предельная относительная погрешность частного от деления двух приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

Пусть делимое x и делитель y имеют по меньшей мере m верных цифр. Если α и β — их первые значащие цифры, то за предельную относительную погрешность частного u может быть принята величина

$$\delta_u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{1}{10} \right)^{m-1}.$$

Отсюда получаем правило:

1) если $\alpha \geq 2$ и $\beta \geq 2$, то частное u имеет по меньшей мере $m - 1$ верных знаков;

2) если $\alpha = 2$ или $\beta = 2$, то частное u заведомо имеет $m - 2$ верных знака.

Пример. Найти число верных знаков частного $u = \frac{25,7}{3,6}$, если все написанные знаки делимого и делителя верны.

Решение. Имеем $\delta_u = \frac{0,05}{25,7} + \frac{0,05}{3,6} = 0,002 + 0,014 = 0,016$.

Так как $u = 7,14$, то $\Delta_u = 0,016 \cdot 7,14 = 0,11$. Поэтому частное u имеет два верных знака в широком смысле, т.е. $u = 7,1$ или, более точно, $u = 7,14 \pm 0,11$.

1.7. Погрешности вычисления значений функции

1.7.1. Погрешность функции, зависящей от одной переменной

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x)$, вызываемая достаточно малой погрешностью аргумента Δ_x , оценивается величиной

$$\Delta_y = |f'(x)|\Delta_x.$$

Если значения функции $f(x)$ положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \frac{|f'(x)|}{f(x)}\Delta_x.$$

В частности, для основных элементарных функций получаем следующие правила.

Степенная функция $y = x^a$

Абсолютная погрешность степенной функции равна

$$\Delta_y = ax^{a-1}\Delta_x.$$

Относительная погрешность степенной функции равна

$$\delta_y = |a|\delta_x.$$

Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$)

Абсолютная погрешность показательной функции равна

$$\Delta_y = a^x \ln a \cdot \Delta_x.$$

Относительная погрешность показательной функции равна

$$\delta_y = \Delta_x \ln a.$$

Заметим, что здесь относительная погрешность функции пропорциональна абсолютной погрешности аргумента.

Для функции $y = e^x$ отсюда получаем

$$\delta_y = \Delta_x.$$

Логарифмическая функция $y = \ln x$

Абсолютная погрешность натурального логарифма числа равна относительной погрешности самого числа:

$$\Delta_y = \frac{1}{x} \Delta_x = \delta_x.$$

Тригонометрические функции

Абсолютные погрешности синуса и косинуса не превосходят абсолютных погрешностей аргумента:

$$\Delta_{\sin x} = |\cos x| \Delta_x \leq \Delta_x; \Delta_{\cos x} = |\sin x| \Delta_x \leq \Delta_x.$$

Абсолютная погрешность тангенса и котангенса всегда больше абсолютной погрешности аргумента:

$$\Delta_{\operatorname{tg} x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \Delta_x \geq \Delta_x; \Delta_{\operatorname{ctg} x} = (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \Delta_x \geq \Delta_x.$$

Пример. Угол $x = 25^\circ 20'$ измерен с точностью до $1'$. Определить $\sin x$ и его абсолютную погрешность.

Решение. Вычислим сначала абсолютную погрешность $\sin x$ по формуле $\Delta_{\sin x} = |\cos x| \Delta_x \leq \Delta_x$; для этого надо еще перевести $1'$ в радианы: $1' = 0,000291$ — и подсчитать $\Delta_{\sin x} = |\cos x| \Delta_x = \cos 25^\circ 20' \times 0,000291 = 0,00026$. Для вычисления $\sin x$ надо взять четырехзначные таблицы тригонометрических функций, что дает $\sin x = \sin 25^\circ 20' = 0,4279$.

1.7.2. Погрешность функции, зависящей от нескольких переменных

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вызываемая достаточно малыми погрешностями $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ аргументов x_1, x_2, \dots, x_n , оценивается величиной

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{df}{dx_i} \right| \Delta_{x_i}.$$

Если значения функции положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f} \left| \frac{df}{dx_i} \right| \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{d \ln f}{dx_i} \right| \Delta_{x_i}.$$

1.8. Определение допустимой погрешности аргументов по допустимой погрешности функции

На практике важна также обратная задача: каковы должны быть абсолютные погрешности аргументов функции, чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины.

Эта задача математически неопределенна, так как заданную предельную погрешность Δ_y функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно обеспечить, устанавливая по-разному предельные абсолютные погрешности Δ_{x_i} ее аргументов.

Простейшее решение обратной задачи дается так называемым принципом равных влияний. Согласно этому принципу предполагается, что все частные дифференциалы

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

одинаково влияют на образование общей абсолютной погрешности Δ_y функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть величина предельной абсолютной погрешности Δ_y задана. Тогда

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

Предполагая, что все слагаемые равны между собой, будем иметь

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 = \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 = \dots = \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n = \frac{\Delta_y}{n}.$$

Отсюда

$$\Delta x_i = \frac{\Delta_y}{n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Нередко при решении обратной задачи по принципу равных влияний мы можем столкнуться с таким случаем, когда найденные предельные абсолютные погрешности отдельных независимых переменных окажутся настолько малыми, что добиться соответствующей точности при измерении этих величин практически невозможно. В таких случаях следует отступить от принципа равных влияний и за счет разумного уменьшения погрешностей одной части переменных добиться увеличения погрешностей другой части переменных.

Иногда допускают, что предельная абсолютная погрешность всех аргументов x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) одна и та же. Тогда, полагая

$$\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \dots = \Delta_{x_n},$$

из формулы будем иметь

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_y}{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Наконец, можно предположить, что точность измерения всех аргументов x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) одинакова, т.е. предельные относительные погрешности δ_{x_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) аргументов равны между собой:

$$\delta_{x_1} = \delta_{x_2} = \dots = \delta_{x_n}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\Delta_{x_1}}{|x_1|} = \frac{\Delta_{x_2}}{|x_2|} = \dots = \frac{\Delta_{x_n}}{|x_n|} = k,$$

где k — общее значение отношений.

Следовательно,

$$\Delta_{x_i} = k|x_i| \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Подставляя эти значения в формулу, находим

$$\Delta_y = k \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|$$

и

$$k = \frac{\Delta_y}{\sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\Delta_{x_i} = \frac{|x_i| \Delta_y}{\sum_{j=1}^n \left| x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Можно также использовать и другие варианты.

Аналогично решается вторая обратная задача теории погрешности, когда задана предельная относительная погрешность функции

и ищутся предельные абсолютные или относительные погрешности аргумента.

Иногда в самой постановке задачи имеются условия, не позволяющие использовать принцип равных влияний.

1.9. Вычисления без точного учета погрешностей

В предыдущих параграфах были рассмотрены способы оценки предельной абсолютной погрешности действий. При этом предполагалось, что абсолютные погрешности компонент усиливают друг друга, что практически бывает сравнительно редко.

При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, рекомендуется пользоваться следующими правилами подсчета цифр.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел младший сохраненный десятичный разряд результата должен являться наибольшим среди десятичных разрядов, выражаемых последними верными значащими цифрами исходных данных.

2. При умножении и делении приближенных чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом верных значащих цифр.

3. При возведении в квадрат или куб приближенного числа в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет основание степени.

4. При извлечении квадратного и кубического корней из приближенного числа в результате следует брать столько значащих цифр, сколько верных цифр имеет подкоренное число.

5. Во всех промежуточных результатах следует сохранять на одну цифру больше, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта «запасная цифра» отбрасывается.

6. При вычислениях с помощью логарифмов рекомендуется подсчитать число верных значащих цифр в приближенном числе, имеющем наименьшее число верных значащих цифр, и воспользоваться таблицей логарифмов с числом десятичных знаков, на единицу большим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

7. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, которые, согласно предыдущим правилам, обеспечивают $k + 1$ верных цифр в результате.

Если некоторые данные имеют излишние младшие десятичные разряды (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр, чем другие (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), то их предварительно нужно округлить, сохраняя одну запасную цифру.

1.10. Статистический и технический подходы к учету погрешностей действий

Рассмотренный ранее аналитический или классический способ учета погрешностей действий, предполагающий точное оценивание погрешностей (основанное либо на правилах подсчета погрешностей арифметических действий, либо на параллельной работе с верхними и нижними границами исходных данных), имеет два существенных недостатка. Во-первых, этот способ чрезвычайно громоздок и не может быть рекомендован при массовых вычислениях. Во-вторых, он учитывает крайние, наихудшие случаи взаимодействия погрешностей, которые допустимы, но маловероятны. Понятно, что, например, при суммировании нескольких приближенных чисел (полученных в результате измерений, округлений или каким-либо другим путем) среди них наверняка будут слагаемые как с избытком, так и с недостатком, т.е. произойдет частичная компенсация погрешностей. При больших количествах однотипных вычислений вступают в силу уже вероятностные или статистические законы формирования погрешностей результатов действий. Например, методами теории вероятностей показывается, что математическое ожидание абсолютной погрешности суммы n слагаемых с одинаковым уровнем абсолютных погрешностей при достаточно большом n пропорционально \sqrt{n} . В частности, если $n > 10$ и все слагаемые округлены до m -го десятичного разряда, то для подсчета абсолютной погрешности суммы S применяют правило Чеботарева:

$$\Delta S \approx \sqrt{3n} \cdot 0,5 \cdot 10^{-m}.$$

Различие в результатах классического и статистического подходов к оцениванию погрешности суммы на примере оценки погрешности среднего арифметического нескольких приближенных чисел таково, что применение правила Чеботарева приводит к выводу о том, что арифметическое усреднение результатов измерений или наблюдений увеличивает точность, чего нельзя сказать на основе классической теории погрешностей.

Прямое применение вероятностно-статистических оценок погрешностей также является достаточно сложным делом и вряд ли может быть рекомендовано при рядовых массовых вычислениях. Однако именно такие оценки подкрепляют практические правила работы с приближенными числами, составляющие основу так называемого технического подхода. Этот подход связывают с именем известного русского кораблестроителя, математика и механика академика А.Н. Крылова. Согласно принципу А.Н. Крылова *приближенное число должно записываться так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верными и лишь последняя была бы сомнительна, и притом в среднем (в вероятностном смысле) не более чем на одну единицу.*

Чтобы результаты арифметических действий, совершаемых над приближенными числами, записанными в соответствии с принципом А.Н. Крылова, также соответствовали этому принципу, нужно придерживаться следующих простых правил:

1) при сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим количеством десятичных знаков;

2) при умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр;

3) результаты промежуточных вычислений должны иметь один-два запасных знака (которые затем должны быть отброшены).

Таким образом, при техническом подходе к учету погрешностей приближенных вычислений предполагается, что в самой записи приближенного числа содержится информация о его точности. И хотя прямая выгода от применения приведенных правил работы с приближенными числами может быть получена лишь при ручном счете (не нужно оперировать с цифрами, не влияющими на информативную часть приближенного результата), их знание и понимание помогают правильной интерпретации компьютерных расчетов, а иногда и самой организации таковых.

1.11. Погрешности решения задачи на ЭВМ

В качестве основных источников погрешности обычно рассматривают три вида ошибок. Это так называемые ошибки усечения, ошибки округления и ошибки распространения.

Ошибки усечения

Этот вид ошибок связан с погрешностью, заложенной в самой задаче. Он может быть обусловлен неточностью определения исход-

ных данных. Например, если в условии задачи заданы какие-либо размеры, то на практике для реальных объектов эти размеры известны всегда с некоторой точностью. То же самое касается любых других физических параметров. Сюда же можно отнести неточность расчетных формул и входящих в них числовых коэффициентов.

Если исходные данные известны с некоторой погрешностью, то не стоит пытаться получить результат с меньшей погрешностью.

Ошибки распространения

Данный вид ошибок связан с применением того или иного способа решения задачи. В ходе вычислений неизбежно происходит накопление или, иначе говоря, распространение ошибки. Помимо того что сами исходные данные не являются точными, новая погрешность возникает при их перемножении, сложении и т.п. Накопление ошибки зависит от характера и количества арифметических действий, используемых в расчете.

Ошибки округления

Этот тип ошибок связан с тем, что истинное значение числа не всегда точно сохраняется компьютером. При сохранении вещественного числа в памяти компьютера оно записывается в виде мантиссы и порядка.

Контрольные вопросы

1. Назовите стадии решения прикладной задачи.
2. Назовите источники возникновения погрешностей численного решения прикладной задачи.
3. Что такое неустранимая погрешность, погрешность метода и вычислительная погрешность?
4. Что такое абсолютная и относительная погрешность?
5. Что такое погрешность суммы, разности и частного чисел?
6. Что такое погрешность произведения чисел, степени приближенного числа и корня из приближенного числа?
7. Что такое погрешность функции, зависящей от одной переменной?
8. Что такое погрешность функции, зависящей от нескольких переменных?
9. Назовите правила подсчета цифр при вычислениях без точного учета погрешностей.
10. Назовите правила выполнения арифметических действий над приближенными числами, соответствующие принципу А.Н. Крылова.
11. Назовите источники погрешностей решения задачи на ЭВМ.

Глава 2

НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ МАТРИЦ

Проблема собственных значений и собственных векторов матриц является одной из самых сложных задач линейной алгебры. К этой проблеме приводят математические модели процессов из различных научных дисциплин. На практике в основном применяются численные методы решения проблемы собственных значений. В данной главе рассматриваются как прямые, так и численные методы вычисления собственных значений и векторов матриц.

2.1. Постановка задачи

Среди задач вычислительной математики часто встречаются спектральные задачи, т.е. задачи на определение множества собственных значений и собственных векторов матриц.

Определение. *Собственные значения* λ матрицы A представляют собой корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (2.1)$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A . По найденным собственным значениям далее можно вычислить и соответствующие собственные векторы. *Собственный вектор* матрицы A — это ненулевой вектор x , при умножении на который матрицы A получается он же сам с некоторым коэффициентом λ , т.е.

$$Ax = \lambda x.$$

Для каждого собственного значения можно найти один собственный вектор, т.е. задачу на собственные значения в общем виде можно записать так:

$$Az_n = \lambda_n z_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Количество координат у собственного вектора равно размерности исходной матрицы. С вычислительной точки зрения нахождение

собственных значений является более сложной задачей. Вычисление собственных векторов в общем случае сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Но существуют и специальные методы.

Собственные векторы и собственные значения определяются только для квадратных матриц. Для квадратной матрицы порядка N определены ровно N собственных значений. Причем некоторые из них могут быть кратными (совпавшими). Количество же собственных векторов может быть не более N . В общем случае матрица A имеет комплексные собственные значения. Матрицы, имеющие только вещественные собственные значения, называют Эрмитовыми матрицами. Обозначив символом H последовательное применение операций комплексного сопряжения и транспонирования, запишем условие, которому удовлетворяет Эрмитова матрица:

$$A = A^H.$$

Для определенности пронумеруем собственные значения следующим образом:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{N-1}| \leq |\lambda_N|.$$

Определение. Совокупность всех собственных значений матрицы называют ее *спектром*, а наибольшее по модулю собственное значение определяет *спектральный радиус* матрицы.

2.2. Основные характеристики матриц

Рассмотрим некоторые характеристики матриц, которые будут использованы в дальнейшем изложении материала.

Определение. Под *абсолютной величиной* матрицы $A = [a_{ij}]$ понимают матрицу $|A| = [|a_{ij}|]$.

Определение. Если в матрице $A = [a_{ij}]$ размерности $n \times n$ поменять местами столбцы и строки, то получится *транспонированная* матрица A^T :

$$A^T = [a_{ji}].$$

Определение. *Обратной* к матрице A называют матрицу A^{-1} , для которой выполняется равенство

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Определение. Под *нормой* матрицы $A = [a_{ij}]$ понимается действительное число $\|A\|$, удовлетворяющее условиям:

- $\|A\| \geq 0$, причем $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ и, в частности, $\|-A\| = \|A\|$;
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Наиболее распространены три нормы матрицы:

$$\|A\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}| \text{ — } m\text{-норма};$$

$$\|A\|_l = \max_j \sum_i |a_{ij}| \text{ — } l\text{-норма};$$

$$\|A\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \text{ — } k\text{-норма}.$$

Пример. Найдем нормы матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$:

$$\|A\|_m = \max(1 + 2 + 2, 3 + 4 + 5, 6 + 6 + 7) = \max(5, 12, 19) = 19;$$

$$\|A\|_l = \max(1 + 3 + 6, 2 + 4 + 5, 2 + 5 + 7) = \max(10, 11, 14) = 14;$$

$$\|A\|_k = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 5^2 + 7^2} = 13.$$

Определение. Если в матрице $A = [a_{ij}]$ размерности $n \times m$ выбрать $k \leq \min(n, m)$ строк и столбцов, то элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют матрицу A_k , определитель которой называют *минором* порядка k .

Определение. *Главным минором* матрицы A называют любой минор, построенный на непрерывном фрагменте диагонали матрицы A , начиная с элемента a_{11} .

Минор, полученный удалением i -й строки и j -го столбца матрицы A , обозначают M_{ij}^A .

Определение. *Диагональным минором* матрицы A называют минор, на главной диагонали которого расположены фрагменты главной диагонали матрицы A .

Определение. *Рангом* матрицы называют максимальный порядок главного минора, отличного от нуля. Разность между наименьшим из чисел m и n и рангом матрицы называют *дефектом* матрицы.

Обусловленность матрицы показывает ее близость к вырожденной. Для количественной характеристики обусловленности матрицы существует *число обусловленности*:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Определение. Пару $\{\lambda, \mathbf{x}\}$ называют *собственной парой* матрицы. Рассмотрим некоторые ее свойства.

- Для собственной пары $\{\lambda, \mathbf{x}\}$ матрицы A и любого числа $\alpha \neq 0$ $\{\lambda, \alpha \mathbf{x}\}$ также является собственной парой матрицы A . Это означает, что каждому собственному значению λ соответствует бесчисленное множество собственных векторов, различающихся лишь скалярным множителем.
- Для собственной пары $\{\lambda, \mathbf{x}\}$ обратной матрицы A пара $\left\{ \frac{1}{\lambda}, \mathbf{x} \right\}$ является собственной парой для матрицы A^{-1} .
- Собственными значениями для диагональных или треугольных матриц являются их диагональные элементы. Диагональные или треугольные вещественные матрицы имеют только вещественные собственные значения.

Пусть \mathbf{x}^* — собственный вектор матрицы A , тогда $\rho(\mathbf{x}^*)$ — ее собственное значение. Величину $\rho(\mathbf{x}) = \frac{(A\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ называют отношением Рэлея для квадратной матрицы A .

Определение. Матрица A называется *положительно определенной*, если она удовлетворяет условиям:

- $A = A^T$;
- $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ для любого вектора \mathbf{x} соответствующей размерности.

Определение. Матрицу A называют *симметричной*, если выполняется условие

$$A = A^T.$$

В такой матрице элементы расположены симметрично относительно главной диагонали.

При численном решении инженерных задач часто получают матрицы, диагональные элементы которой «преобладают» над остальными недиагональными элементами.

Преобладание может быть выражено в различных формах. Например, если для диагональных элементов матрицы $A = [a_{ij}]$ выполняется неравенство

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то такая матрица является матрицей с *диагональным преобладанием*.

2.3. Локализация собственных значений матрицы

Для решения полной задачи на собственные значения полезно обладать информацией о расположении последних на комплексной плоскости. Для этой цели существуют различные методы, один из которых основан на теореме Гершгорина: *любое собственное значение матрицы $A = [a_{ij}]$ лежит в одном из кругов*

$$G_i = \left\{ \lambda: |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| = \text{sum}_i \right\}. \quad (2.2)$$

Множество G_i называется i -м кругом Гершгорина матрицы A . В случае вещественных собственных значений круги Гершгорина представляют собой интервалы. Если n кругов образуют область G , изолированную от других кругов, тогда G содержит точно n собственных значений матрицы A . Объединение всех кругов Гершгорина содержит все собственные значения матрицы A . Иногда возможно выделить круг, который содержит единственное собственное значение. Это выполняется для матриц, имеющих специальные свойства, т.е. если при некотором значении i для всех $k = 1, \dots, N$ ($k \neq i$) справедливы неравенства

$$|a_{kk} - a_{ii}| < \text{sum}_k + \text{sum}_i, \quad (2.3)$$

то круг Гершгорина $|\lambda - a_{ii}| \leq \text{sum}_i$ содержит единственное собственное значение.

Пример. Дана симметричная матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. $\text{sum}_1 = 1$, $\text{sum}_2 = 2$, $\text{sum}_3 = 1$. В соответствии с формулой (2.2) собственные значения для данной матрицы лежат на отрезках $[0, 2]$, $[3, 7]$, $[0, 2]$. Условие (2.3) выполняется при $i = 2$, следовательно, отрезок $[3, 7]$ содержит единственное собственное значение, а два других значения лежат на отрезке $[0, 2]$.

Выполнив расчет собственных значений для исходной матрицы, получим: $\lambda_1 \approx 0,5505$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 \approx 5,4495$.

2.4. Методы нахождения собственных значений и векторов матриц

Существуют два подхода к решению характеристического уравнения (2.1):

- развертывание векового определителя в полином n -й степени

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

и дальнейшее решение уравнения $D(\lambda) = 0$ (*прямые методы*);

- приближенное определение корней характеристического уравнения методом итераций без предварительного развертывания векового определителя (*итерационные методы*).

Определение. Под *вековым определителем* матрицы A понимают определитель вида

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

В прямых методах решение характеристического уравнения может осуществляться любым способом, в том числе и численным. Использовать такие методы надо с осторожностью, поскольку они чувствительны к ошибкам округления результатов промежуточных вычислений.

В итерационных методах исходную матрицу путем преобразований подобия, не изменяющих ее собственных значений, либо приводят к диагональному или треугольному виду — тогда диагональные элементы и будут являться собственными значениями матрицы, либо получают характеристический полином в обход непосредственного разворачивания векового определителя.

Рассмотрим некоторые методы нахождения собственных значений и соответствующих им собственных векторов матриц.

2.4.1. Метод непосредственного развертывания векового определителя

Приравняем вековой определитель матрицы A (2.4) к нулю, получим характеристическое уравнение $D(\lambda) = 0$. Развертывая вековой определитель, получим

$$D(\lambda) = (-1)^n[\lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n\sigma_n]. \quad (2.5)$$

В выражении (2.5)

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\alpha}$$

есть сумма всех диагональных миноров первого порядка;

$$\sigma_2 = \sum_{\alpha < \beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix}$$

есть сумма всех диагональных миноров второго порядка;

$$\sigma_3 = \sum_{\alpha < \beta < \gamma} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}$$

есть сумма всех диагональных миноров третьего порядка и т.д.

Наконец,

$$\sigma_n = \det(A).$$

Количество диагональных миноров порядка k для матрицы порядка n определяется формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Для получения коэффициентов уравнения (2.4) потребуется вычислить $2^n - 1$ определителей различных порядков.

После определения коэффициентов характеристического уравнения необходимо его решить любым методом (например, методом Ньютона—Рафсона). В результате получим собственные значения матрицы, по которым нетрудно вычислить и собственные векторы.

При больших размерностях матриц такая задача может оказаться технически трудно выполнимой.

Пример. Найдём характеристический полином для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Вековой определитель (2.4) примет вид

$$D(\lambda) = \lambda^4 - \sigma_1\lambda^3 + \sigma_2\lambda^2 - \sigma_3\lambda + \sigma_4.$$

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^4 a_{\alpha\alpha} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum_{\alpha < \beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -40. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \sum_{\alpha < \beta < \gamma} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$$\sigma_3 = 56.$$

$$\sigma_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20.$$

В итоге получим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20 = 0,$$

решив которое мы получим собственные значения матрицы A .

2.4.2. Метод Крылова

Метод Крылова является прямым методом и позволяет развернуть вековой определитель следующим образом.

Пусть

$$D(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n \quad (2.6)$$

— характеристический полином матрицы A . Согласно тождеству Гамильтона—Кели матрица A обращает в нуль свой характеристический полином, т.е.

$$A^n + p_1A^{n-1} + \dots + p_nE = 0, \quad (2.7)$$

где A^n — n -я степень матрицы A .

Выберем ненулевой вектор

$$y_i^{(2)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(1)}; \tag{2.11}$$

.....

$$y_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(n-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В итоге получили, что для определения коэффициентов p_i характеристического уравнения методом А.Н. Крылова необходимо решить систему линейных уравнений (2.10). Бывают случаи, когда данная система имеет больше одного решения. Тогда необходимо изменить начальный вектор $\mathbf{y}^{(0)}$. Получив коэффициенты, следует решить характеристическое уравнение и найти из него λ_i .

Для определения собственных векторов предположим, что характеристический полином (2.6) имеет различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые определены. Найдем собственные векторы $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Разложим вектор $\mathbf{y}^{(0)}$ по собственным векторам $\mathbf{x}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\mathbf{y}^{(0)} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)},$$

где c_i — некоторые числовые коэффициенты. Учтя, что

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}^{(i)} &= \lambda_i \mathbf{x}^{(i)}, \\ A^2\mathbf{x}^{(i)} &= \lambda_i^2 \mathbf{x}^{(i)}, \\ &\dots\dots\dots \\ A^n\mathbf{x}^{(i)} &= \lambda_i^n \mathbf{x}^{(i)}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= c_1 \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n \mathbf{x}^{(n)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} &= c_1 \lambda_1^{n-1} \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \lambda_2^{n-1} \mathbf{x}^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^{n-1} \mathbf{x}^{(n)}. \end{aligned}$$

Введем систему полиномов порядка n

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1(\lambda) &= \lambda^{n-1} + q_{11}\lambda^{n-2} + \dots + q_{n-1,1}, \\ \varphi_2(\lambda) &= \lambda^{n-1} + q_{12}\lambda^{n-2} + \dots + q_{n-1,2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_i(\lambda) &= \lambda^{n-1} + q_{1i}\lambda^{n-2} + \dots + q_{n-1,i}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(\lambda) &= \lambda^{n-1} + q_{1n}\lambda^{n-2} + \dots + q_{n-1,n} \end{aligned} \right.$$

и составим линейную комбинацию векторов $\mathbf{y}^{(n-1)}, \mathbf{y}^{(n-2)}, \dots, \mathbf{y}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{y}^{(n-1)} + q_{1i}\mathbf{y}^{(n-2)} + \dots + q_{n-1,i}\mathbf{y}^{(0)} = \\ & = c_1\varphi_i(\lambda_1)\mathbf{x}^{(1)} + c_2\varphi_i(\lambda_2)\mathbf{x}^{(2)} + \dots + c_n\varphi_i(\lambda_n)\mathbf{x}^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Обозначив

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda_j) &= 0 \text{ при } i \neq j, \\ \varphi_i(\lambda_i) &= D'(\lambda_i) \neq 0. \end{aligned}$$

Тогда (2.10) примет вид

$$c_i\varphi_i(\lambda_j)\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{y}^{(n-1)} + q_{1i}\mathbf{y}^{(n-2)} + \dots + q_{n-1,i}\mathbf{y}^{(0)}. \quad (2.13)$$

В результате имеем, что если $c_i \neq 0$, то полученная линейная комбинация векторов $\mathbf{y}^{(n-1)}, \mathbf{y}^{(n-2)}, \dots, \mathbf{y}^{(0)}$ дает собственный вектор $\mathbf{x}^{(i)}$. Коэффициенты q_{ji} ($j = 1, 2, \dots, n-1$) определяются по схеме Горнера:

$$\begin{cases} q_{0i} = 1, \\ q_{ji} = \lambda_i q_{j-1,i} + p_j. \end{cases}$$

Пример. Найдем характеристический полином матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Зададим начальный вектор

$$\mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно формулам (2.9) определим координаты векторов $\mathbf{y}^{(k)} = A^k \mathbf{y}^{(0)}$, $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = A\mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(3)} = A\mathbf{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(4)} = A\mathbf{y}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{bmatrix}.$$

Система (2.8) в нашем случае примет вид

$$\begin{cases} p_1 y_1^{(3)} + p_2 y_1^{(2)} + p_3 y_1^{(1)} + p_4 y_1^{(0)} = -y_1^{(4)}, \\ p_1 y_2^{(3)} + p_2 y_2^{(2)} + p_3 y_2^{(1)} + p_4 y_2^{(0)} = -y_2^{(4)}, \\ p_1 y_3^{(3)} + p_2 y_3^{(2)} + p_3 y_3^{(1)} + p_4 y_3^{(0)} = -y_3^{(4)}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 208p_1 + 30p_2 + p_3 + p_4 = -2108, \\ 178p_1 + 22p_2 + 2p_3 = -1704, \\ 192p_1 + 18p_2 + 3p_3 = -1656, \\ 242p_1 + 20p_2 + 4p_3 = -1992. \end{cases}$$

Решение полученной системы имеет вид:

$$p_1 = -4; p_2 = -40; p_3 = -56; p_4 = -20.$$

Характеристический полином тогда будет иметь вид

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20.$$

Решив полученный характеристический полином любым численным методом, можно определить все собственные значения исходной матрицы.

2.4.3. Метод Данилевского

Идея метода Данилевского заключается в приведении векового определителя (2.2) к нормальному виду Фробениуса:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первой строки:

$$D(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - p_3 \lambda^{n-3} - \dots - p_n). \quad (2.14)$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad P = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

где A — исходная матрица; P — подобная ей матрица Фробениуса.

Таким образом,

$$P = S^{-1}AS,$$

где S — неособенная матрица.

В силу того что подобные матрицы обладают одинаковыми характеристическими полиномами, имеем

$$\det(A - \lambda E) = \det(P - \lambda E).$$

Получить из матрицы A матрицу Фробениуса можно посредством $n - 1$ преобразований подобия исходной матрицы, начав преобразования с последней строки матрицы A .

2.4.4. Метод Леверрье

Метод предполагает раскрытие векового определителя с помощью формул Ньютона для сумм степеней корней алгебраического уравнения.

Имеем характеристическое уравнение (2.4), исходную матрицу A и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — полную совокупность его корней, где каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность.

Пусть $s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

При $k \leq n$ справедливы формулы Ньютона

$$s_k + p_1 s_{k-1} + \dots + p_{k-1} s_1 = -k p_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.15)$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{(1)}}{x_i^{(0)}},$$

где $x_i^{(1)}$ — координаты вектора $\mathbf{x}^{(1)}$; $x_i^{(0)}$ — координаты вектора $\mathbf{x}^{(0)}$.
В общем случае $(k + 1)$ -е приближение собственного значения $\lambda^{(k+1)}$ определяется по формуле

$$\lambda^{(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}.$$

В результате получим сходящуюся к максимальному собственному значению последовательность $\{\lambda^{(k)}\}$.

При удачно выбранном векторе $\mathbf{x}^{(0)}$ последовательность (2.19) сходится к собственному вектору \mathbf{x} , а постоянный множитель будет соответствовать наибольшему собственному значению матрицы A .

Заметим, что в результате итерационных процессов координаты вектора \mathbf{x} неограниченно возрастают и их необходимо «сбрасывать» после некоторого количества итераций. Сброс можно осуществить, например выполнив нормировку вектора $\mathbf{x}^{(k)}$:

$$\frac{\mathbf{x}^{(k)}}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|}.$$

Итерационный процесс завершается при выполнении следующего условия:

$$\frac{\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}}{\lambda^{(k)}} < \varepsilon,$$

где ε — заданная относительная погрешность.

Пример. Найдем данным методом максимальное собственное значение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение. За начальное приближение возьмем вектор $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Начнем итерационный процесс:

$$A \cdot \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{4} \left[\frac{10}{1} + \frac{8}{1} + \frac{8}{1} + \frac{10}{1} \right] = 9;$$

$$A \cdot \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 74 \\ 74 \\ 90 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{1}{4} \left[\frac{90}{10} + \frac{74}{8} + \frac{74}{8} + \frac{90}{10} \right] = 9,125.$$

Третья и последующие итерации дадут результаты:

$$\lambda^{(3)} = 9,097; \lambda^{(4)} = 9,099; \lambda^{(5)} = 9,099.$$

После четвертой итерации вычисления можно останавливать, так как заданная точность достигнута.

2.4.6. Интерполяционный метод нахождения всех собственных значений матрицы

Данный метод применяется для определения всех собственных значений матрицы и является прямым методом. Характеристическое уравнение (2.1) представляет собой многочлен степени n . Чтобы установить вид характеристического многочлена без его разворачивания, можно поступить следующим образом.

Произвольно зададим $n + 1$ произвольных собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. В каждой из заданных точек λ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) найдем значение $f(\lambda_i) = \det(A - \lambda_i E)$. Получим сеточную функцию со значениями $\lambda_i, f(\lambda_i)$, по которой можно построить интерполяционный многочлен Ньютона $P_n(\lambda)$ степени n . Этот многочлен и будет являться характеристическим в силу единственности его построения. Приравняв его к нулю, можно определить корни — собственные значения матрицы A .

Решать уравнение $P_n(\lambda) = 0$ можно любым численным методом.

Если известны границы, в пределах которых расположены собственные значения, то имеет смысл размещать узловые точки λ_i интерполяционного полинома в этих границах. Желательно выбрать равномерный шаг для уменьшения ошибок округления. Определить границы спектра можно, воспользовавшись условием

$$|\lambda_i| \leq \|A\|,$$

которое справедливо для любой нормы матрицы A .

Пример. Найдем характеристический полином для матрицы A из примера выше.

Решение. Так как порядок матрицы $n = 4$, то для построения интерполяционного полинома выберем пять произвольных значений λ_i и найдем значения характеристического полинома в этих точках. Сразу же подсчитаем разделенные разности до четвертого порядка включительно для дальнейшего составления интерполяционного полинома Ньютона. Результаты поместим в таблицу.

λ_i	$f(\lambda_i)$	[,]	[,]	[,,]	[,,,]
1	-119	-228	-18	12	1
3	-575	-264	6	14	
5	-1175	-204	38		
7	-1343	0			
9	-119				

$$P_4(\lambda) = -119 + (\lambda - 1) \cdot \{-228 + (\lambda - 3)[-18 + (\lambda - 5)(12 + (\lambda - 7) \cdot 1)]\}.$$

После преобразований полином примет вид

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20.$$

Решив уравнение $P_4(\lambda) = 0$ методом Ньютона—Рафсона, найдем корни (собственные значения):

$$\lambda_1 \approx -3,41; \lambda_2 \approx -1,10; \lambda_3 \approx -0,59; \lambda_4 \approx 9,10.$$

Данный метод плохо «работает» с матрицами большого порядка ($n \geq 10$) в силу ряда причин:

- с ростом порядка матрицы число выполняемых арифметических операций возрастает как n^4 ;
- при составлении интерполяционного полинома Ньютона вычисляются разделенные разности, которые при высоких порядках приводят к большой потере точности.

2.4.7. Метод обратной итерации

Метод обратной итерации является итерационным методом, только примененный к матрице, обратной исходной. Применяется для нахождения наименьшего собственного значения матрицы.

Умножая (2.2) на матрицу A^{-1} , обратную исходной, приведем задачу на собственные значения к виду

$$A^{-1}z_n = \frac{1}{\lambda_n}z_n, n = 1, 2, \dots, N; \det(A) \neq 0.$$

Получим, что собственный вектор матрицы A является собственным вектором матрицы A^{-1} и $\lambda_n(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_n(A)}$. Зададим некоторый начальный вектор $\mathbf{x}^{(0)}$ и разложим его по собственным векторам матрицы A :

$$\mathbf{x}^{(0)} = \sum_{n=1}^N \alpha_n z_n.$$

Умножая начальный вектор k раз на матрицу A^{-1} , получим векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(k)} &= (A^{-1})^k \mathbf{x}^{(0)} = \sum_{n=1}^N \alpha_n (A^{-1})^k z_n = \sum_{n=1}^N \alpha_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^k z_n = \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^k \left(\alpha_1 z_1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^k \alpha_n z_n \right). \end{aligned}$$

При $k \rightarrow \infty$, вектор $\mathbf{y}^{(k)}$ стремится к вектору, коллинеарному с вектором z_1 . Последовательные степени матрицы A^{-1} дают информацию о наименьшем по модулю собственном значении λ_1 матрицы A .

При практическом применении данного метода обратную матрицу вычислять нецелесообразно в силу того, что решение системы $A\mathbf{y} = \mathbf{x}$ относительно вектора \mathbf{y} требует меньше затрат, чем вычисление $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x}$.

Поэтому можно предложить следующую последовательность действий для реализации метода обратной итерации:

- 1) задать начальный вектор $\mathbf{x}^{(0)}$;
- 2) для $k = 0, 1, 2, \dots$ решить систему линейных уравнений

$$A\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)};$$

- 3) новое приближение вычислять по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{y}^{(k+1)}}{\|\mathbf{y}^{(k+1)}\|};$$

4) при выполнении условия $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon_p$ (ε_p — заданная погрешность вычислений) итерационный процесс прекращается и вектор $\mathbf{x}^{(k+1)}$ будет являться приближенным собственным вектором,

а $\mathbf{s}_1 = \rho(\mathbf{x}^{(k+1)})$ — приближенное минимальное по модулю собственное значение исходной матрицы.

К вопросу о сходимости данного метода следует заметить, что скорость сходимости метода зависит от того, насколько $|\lambda_1|$ меньше чем $|\lambda_2|$, т.е.

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{z}_1\|}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{z}_1\|} \leq \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^k = C^k.$$

Пример. Для матрицы A вычислить наименьшее собственное значение λ_1 с точностью ε_p :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \varepsilon_p = 10^{-3}; \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Для $k = 1$ имеем

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решая получившуюся систему из четырех уравнений, находим компоненты вектора $\mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{bmatrix}$.

Далее вычисляем новое приближение:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{\mathbf{y}^{(1)}}{\|\mathbf{y}^{(1)}\|}; \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{4,69} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,170 \\ 0,128 \\ 0,085 \\ 0,043 \end{bmatrix}.$$

Рассчитаем погрешность после первой итерации:

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,17 \\ 0,128 \\ 0,085 \\ 0,043 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0,17 \\ 0,128 \\ 0,085 \\ 0,043 \end{bmatrix} \right\| = 0,845 > 10^{-3}.$$

Определим собственное значение, соответствующее полученному собственному вектору с помощью отношения Рэля:

$$\rho(x^{(1)}) = \frac{(x^{(1)}, Ax^{(1)})}{(x^{(1)}, x^{(1)})} = \lambda_1^{(1)} = 0,666,$$

где в числителе и знаменателе стоят скалярные произведения.

На этом первая итерация заканчивается, далее следует повторить расчеты при $k = 2, 3, \dots$. Результаты первых пяти итераций приведены в таблице ниже.

Номер итерации k	Погрешность $x^{(k)} - x^{(k-1)}$	$\rho(x^{(k)})$
1	$7,43 \cdot 10^{-1}$	0,667
2	$3,52 \cdot 10^{-1}$	0,400
3	$9,40 \cdot 10^{-2}$	0,383
4	$2,51 \cdot 10^{-2}$	0,382
5	$6,86 \cdot 10^{-3}$	0,382

Собственный вектор, соответствующий собственному значению при $k = 5$, имеет вид

$$x^{(5)} \approx \begin{bmatrix} 0,373 \\ 0,602 \\ 0,600 \\ 0,370 \end{bmatrix}.$$

Для данной матрицы метод обратной итерации довольно быстро сходится.

Метод обратной итерации требует больших вычислительных затрат, поскольку на каждой итерации необходимо решать систему линейных уравнений. Объем вычислений можно уменьшить, опираясь на то, что матрица A остается постоянной на каждой итерации. Следовательно, перед началом вычислений ее можно разложить на произведение двух треугольных матриц. Тогда решение системы линейных уравнений сведется к решению двух систем с треугольными матрицами, что, в свою очередь, сократит количество операций.

2.4.8. Итерации со сдвигом начала

Введем в рассмотрение матрицу $B = A - \sigma I$, где σ — отличная от нуля константа (сдвиг начала); I — единичная матрица. Собственные векторы матрицы B будут совпадать с собственными значениями матрицы A и $\lambda_n(A) = \lambda_n(B) + \sigma$. В этом случае степенной

метод сходится к некоторому собственному вектору \mathbf{z}_n , который соответствует собственному значению

$$|\lambda_n(B)| = \max_n |\lambda_n(A) - \sigma|,$$

и асимптотическая константа сходимости будет определяться как

$$C = \frac{\max_{m \neq n} |\lambda_m(A) - \sigma|}{\max_n |\lambda_n(A) - \sigma|}.$$

Метод же обратной итерации будет сходиться к собственному вектору \mathbf{z}_n , который соответствует собственному значению

$$|\lambda_n(B)| = \min_n |\lambda_n(A) - \sigma|,$$

а асимптотическая константа сходимости определится как

$$C = \frac{\min_n |\lambda_n(A) - \sigma|}{\min_{m \neq n} |\lambda_m(A) - \sigma|}.$$

Данный метод следует использовать в нескольких случаях.

Первый случай. Матрица A имеет два близких по величине собственных значения, т.е. $|\lambda_N| = |\lambda_{N-1}|$ (или $|\lambda_N| \approx |\lambda_{N-1}|$). Если будем использовать степенной метод, то не добьемся сходимости ни к вектору \mathbf{z}_N , ни к \mathbf{z}_{N-1} . Когда $\sigma \neq 0$, все собственные значения матрицы B $\lambda_n(B)$ различны по модулю и сходимость появится.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

с собственными значениями $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \approx 1,732$, $\lambda_3 \approx -1,732$.

Решение. Зададим начальный вектор

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и применим степенной метод. Результаты первых пяти итераций приведем в таблице.

Номер итерации k	Норма вектора невязки $\ \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})\ = \ A\mathbf{x}^{(k)} - \rho(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(k)}\ $	$\rho(\mathbf{x}^{(k)})$
1	1,2247	1
2	1,3416	1
3	1,3887	1
4	1,4055	1
5	1,4113	1

Из таблицы видно, что сходимость отсутствует.

Зададим $\sigma = 2$ и применим степенной метод к матрице $B = A - \sigma I$ с тем же начальным вектором. Результаты поместим в таблицу.

Номер итерации k	Норма вектора невязки $\ \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})\ $	$\rho(\mathbf{x}^{(k)}) + \sigma$
1	1,2247	-1
2	0,4178	-1,6666
3	0,1141	-1,7272
4	0,0306	-1,7217
5	0,0082	-1,7320

Из последнего столбца таблицы видно, что сдвиг начала обеспечил сходимость метода, и асимптотическая константа сходимости равна

$$C = \frac{|\lambda_1(A) - \sigma|}{|\lambda_3(A) - \sigma|} \approx 0,2679.$$

Второй случай. Пусть необходимо найти собственное значение матрицы A , ближайшее к заданному числу β . В этом случае собственное значение должно удовлетворять неравенству

$$|\lambda_m(A) - \beta| < \min_{n \neq m} |\lambda_n(A) - \beta|.$$

Тогда метод обратной итерации со сдвигом $\sigma = \beta$ сходится к собственному вектору \mathbf{z}_m .

Пример. Возьмем матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

и начальный вектор

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственное значение матрицы A , ближайшее к числу $\beta = 3,5$, методом обратной итерации.

Решение. Результаты поместим в таблицу.

Номер итерации k	Погрешность $\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ $	$\rho(\mathbf{x}^{(k)}) + \sigma$
1	1,2895	3,5520
2	$2,6116 \cdot 10^{-1}$	3,6171
3	$3,3306 \cdot 10^{-2}$	3,6180
...
6	$7,8765 \cdot 10^{-5}$	3,6180

Выбрав сдвиг близким к собственному значению матрицы, получили достаточно быструю сходимость к собственному вектору. Асимптотическая константа сходимости

$$C = \frac{|\lambda_4(A) - \sigma|}{|\lambda_3(A) - \sigma|} \approx 0,104.$$

Контрольные вопросы

1. Что называют собственным значением квадратной матрицы?
2. Что такое собственный вектор?
3. Что такое спектр и спектральный радиус матрицы?
4. Сделайте постановку задачи на нахождение собственных значений и векторов матрицы.
5. Что называют собственной парой матрицы?
6. Назовите два класса методов решения задач на собственные значения.
7. Опишите метод непосредственного разворачивания векового определителя.
8. Опишите метод Крылова.
9. Опишите итерационный метод нахождения наибольшего собственного значения.
10. Опишите интерполяционный метод нахождения всех собственных значений матрицы.
11. Подумайте, возможно ли в интерполяционном методе использовать вместо полинома Ньютона полином Лагранжа.
12. В каких случаях удобно применять степенной метод, а в каких — метод обратной итерации?
13. Для какой цели задают сдвиг начала?

Глава 3

НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

При проведении вычислений на ЭВМ часто возникают ситуации, когда необходимо вычислить значение какой-либо функции в некоторой точке, принадлежащей области определения функции. При этом имеет значение, в каком виде записана данная функция. В данной главе рассматриваются методы, позволяющие снизить величину погрешности вычислений при использовании ЭВМ.

3.1. Постановка задачи

С точки зрения приближенных вычислений (вычислений на ЭВМ) математически эквивалентные выражения часто оказываются неравноценными. Поэтому возникает практически важная задача о нахождении для элементарных функций наиболее удобных аналитических выражений.

От вида функции, значения которой необходимо найти, будет зависеть способ этого вычисления. Рассмотрим некоторые из этих способов.

3.2. Вычисление значений функций по схеме Горнера

Очень часто возникают ситуации, в которых вычисляемая функция имеет вид многочлена (полинома). Если производить вычисления «в лоб», т.е. находить значения каждого члена и затем суммировать их, то при большом порядке многочлена потребуется выполнить большое количество операций, что приведет к накоплению существенной погрешности округления. Представив многочлен в более удобном для ЭВМ виде, можно ее уменьшить. Рассмотрим вычисление значений полинома по *схеме Горнера*.

Пусть дан полином степени n :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (3.1)$$

в котором a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) — действительные коэффициенты. Требуется вычислить значение этого полинома в точке $x = \xi$:

$$P(\xi) = a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\xi + a_n. \quad (3.2)$$

Вычисление удобнее производить следующим образом. Представим многочлен (3.2) в виде

$$P(\xi) = (\dots(((a_0\xi + a_1)\xi + a_2)\xi + a_3)\xi + \dots + a_{n-1}\xi) + a_n. \quad (3.3)$$

Далее будем последовательно вычислять числа

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= a_1 + b_0\xi, \\ b_2 &= a_2 + b_1\xi, \\ b_3 &= a_3 + b_2\xi, \\ &\dots\dots\dots \\ b_n &= a_n + b_{n-1}\xi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Последнее число и является значением многочлена в заданной точке, т.е. $b_n = P(\xi)$.

Числа b_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) являются коэффициентами полинома $Q(x)$, который получается при делении исходного полинома $P(x)$ на двучлен $x - \xi$.

На практике схема Горнера применяется в следующем виде. Вычисления удобно представить в таблице. В первой строке выписываются коэффициенты многочлена (3.1) по убыванию степеней и искомая точка ξ . Далее идет поочередное вычисление коэффициентов $b_i\xi$ и b_{i+1} для $i = 0, 1, \dots, n - 1$, которые записываются во вторую и третью строки таблицы соответственно.

	a_0	a_1	a_2	...	a_n	ξ
+		$b_0\xi$	$b_1\xi$...	$b_{n-1}\xi$	
	b_0	b_1	b_2	...	$b_n = P(\xi)$	

Пример. Рассчитаем значение полинома

$$P(x) = 0,883x^5 - 1,217x^4 + 1,452x^3 + 0,572x^2 - 2,343x + 1,158$$

в точке $x = 0,50$.

Решение. Заполним таблицу:

	0,883	-1,217	1,452	0,572	-2,343	1,158	0,50
+		0,4415	-0,38775	5,32125	0,55205	-0,89546	
	0,883	-0,7755	1,06425	1,1041	-1,79095	0,2625	

Таким образом, значение многочлена в точке $x = 0,50$ равно $P(x) = 0,2625 \approx 0,263$.

Для вычисления значения многочлена по правилу Горнера требуется n умножений и n сложений. При непосредственном же вычислении многочлена количество умножений составляет

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

В вычислительном плане данная схема выгодно отличается от прямого нахождения значения многочлена.

3.3. Вычисление сумм числовых рядов

Для нахождения значения функции, не являющейся полиномом, в заданной точке обычно применяют разложение этой функции в окрестности точки в ряд Тейлора с различными остаточными членами. Данный ряд является сходящимся с бесконечным количеством членов. Затем находят сумму этого ряда с заданной степенью точности (погрешностью), оставляя несколько первых членов и отбрасывая все последующие.

На практике приходится иметь дело с конечными и бесконечными рядами.

Определение. Бесконечный числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3.6)$$

называется сходящимся, если существует предел последовательности его частичных сумм

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (3.7)$$

где

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Из формулы (3.7) можно получить

$$S = S_n + R_n,$$

где R_n называется *остатком ряда*. При этом $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для нахождения суммы ряда (3.6) с заданной точностью ε необходимо выбрать столько n первых слагаемых, чтобы выполнялось условие

$$|R_n| < \varepsilon.$$

В этом случае частичная сумма S_n может быть принята за точную сумму S ряда (3.6).

Следует заметить, что члены ряда a_1, a_2, \dots могут быть определены приближенно. Частичная сумма S_n также может округляться до заданного числа десятичных знаков. При таких условиях применима следующая методика вычислений суммы.

Необходимо выбрать три положительных числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, удовлетворяющих условию

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon.$$

Выберем n первых членов ряда такое, чтобы *остаточная погрешность* удовлетворяла условию

$$|R_n| \leq \varepsilon_1.$$

Каждое из слагаемых a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) вычислим с предельной абсолютной погрешностью, не превышающей $\frac{\varepsilon_2}{n}$, и обозначим приближенные значения через \bar{a}_k ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$|\bar{a}_k - a_k| \leq \frac{\varepsilon_2}{n}.$$

Вычислим сумму приближенных значений \bar{a}_k :

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k,$$

погрешность которой (*погрешность суммирования*) определяется неравенством

$$|S_n - \bar{S}_n| \leq \varepsilon_2.$$

Округлим полученный результат до числа $\bar{\bar{S}}_n$:

$$|\bar{S}_n - \bar{\bar{S}}_n| \leq \varepsilon_3,$$

где ε_3 — *погрешность округления*. Получим приближенное значение суммы S с заданной точностью ε .

Числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ определяются исходя из требуемого объема вычислений. Например, для $\varepsilon = 10^{-m}$ и m верных значащих цифр после запятой для результата можно принять:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}; \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4}; \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Бывают случаи, когда расчет погрешности представляет весьма трудоемкую процедуру. Тогда для достижения заданной точности

поступают следующим образом: все промежуточные вычисления производят с одним или двумя запасными знаками.

3.4. Вычисление значений функций методом разложения в ряд Тейлора

Для вычисления значений функций, вид которых отличен от многочлена, применяется разложение в ряд Тейлора, в результате которого разлагаемая функция принимает многочленный вид.

Как известно, дифференцируемую непрерывную функцию $f(x)$ в окрестности точки ξ можно представить в виде бесконечного степенного ряда (*ряда Тейлора*):

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \xi)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - \xi)^k. \quad (3.8)$$

При $\xi = 0$ получим *ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \quad (3.9)$$

Взяв n первых членов ряда, получим *полином Тейлора*, который и используется при расчетах на ЭВМ:

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - \xi)^k. \quad (3.10)$$

Разность $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора и представляет собой ошибку при замене искомой функции полиномом Тейлора.

Заметим, что вычисление значения полинома Тейлора можно реализовать на ЭВМ с помощью схемы Горнера.

Для сеточных функций существует формальный аналог ряда Тейлора, который имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(0)}{k!}x^{(k)},$$

где $\Delta^k f(0)$ — конечная разность в точке ноль порядка k ;

$x^{(k)} = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$ — факториальный многочлен порядка k .

Для расчетов на ЭВМ применяется следующая формула (аналог полинома Тейлора):

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{(k)}. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) представляет собой *интерполяционную формулу Ньютона*.

При практическом вычислении значений функций с помощью рядов Тейлора следует помнить, что разложение хорошо «работает» лишь в окрестности заданной точки и при удалении от нее погрешность метода возрастает.

3.4.1. Вычисление значений показательной функции

Для функции $f(x) = e^x$ справедливо разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (3.12)$$

Вычисления удобно вести по следующей схеме:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k; \\ u_k &= \frac{x}{k} u_{k-1}; \\ S_k &= S_{k-1} + u_k \quad (k = 1, 2, \dots, n); \\ u_0 &= 1; S_0 = 1. \end{aligned}$$

Процесс вычислений следует прекратить при выполнении условия

$$|u_n| < \varepsilon,$$

где ε — заданная погрешность.

Тогда частичная сумма

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

и будет являться искомым результатом разложения функции e^x с погрешностью ε .

При больших x формула (3.12) малоприменна и необходимо сделать некоторые преобразования.

3.4.2. Вычисление значений логарифмической функции

Логарифмическая функция в окрестности единицы разлагается в ряд следующим образом:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (3.13)$$

Данной формулой не всегда удобно пользоваться, поскольку мал диапазон чисел, для которых она применима. Воспользуемся некоторыми преобразованиями.

Рассмотрим разложение

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad (3.14)$$

Вычтем из (3.13) выражение (3.14) и обозначим

$$z = \frac{1-x}{1+x}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \ln(z) &= -2 \left[\frac{1-z}{1+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^5 + \dots \right], \\ \ln(z) &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{2k-1}. \end{aligned}$$

При таком представлении переменная z может изменяться в пределах $0 < z < +\infty$.

Вычисления ведутся по следующей схеме. Пусть x — положительное число. Представим его в виде

$$x = 2^m z,$$

где m — целое; $\frac{1}{2} \leq z < 1$. Обозначив

$$\xi = \frac{1-z}{1+z} \left(0 < \xi \leq \frac{1}{3} \right),$$

получим

$$\ln(x) = \ln(2^m z) = m \cdot \ln(2) + \ln(z) = m \cdot \ln(2) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \xi^{2k-1}.$$

Далее, введя обозначение

$$u_k = \frac{\xi^{2k-1}}{2k-1},$$

получим рекуррентное соотношение

$$\ln(x) = m \cdot \ln(2) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k + R_n(x),$$

$$u_1 = \xi, u_{k+1} = \frac{(2k-1)\xi^2}{2k+1} u_k.$$

При выполнении неравенства $u_n < 4\epsilon$ вычисления прекращаются.

Чтобы вычислить десятичный логарифм, достаточно воспользоваться формулой перехода к другому основанию:

$$\begin{aligned} \lg(x) &= \lg(e) \cdot \ln(x), \\ \lg(e) &\approx 0,43429448190. \end{aligned}$$

3.4.3. Вычисление значений тригонометрических функций

Как известно, разложение тригонометрических функций в ряд Тейлора для больших углов практически неприменимо. Чтобы избежать использования таких углов, необходимо воспользоваться свойством периодичности этих функций.

Для функции $f(x) = \sin(x)$ справедливо разложение в ряд

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Аналогично разложим в ряд функцию $f(x) = \cos(x)$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Полученные ряды удобно вычислять по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\sin(x) = \sum_{k=1}^n u_k + R_n(x), \quad u_1 = x, \quad u_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(k+1)} u_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$\cos(x) = \sum_{k=1}^n v_k + R_n(x), \quad v = 1, \quad v_{k+1} = -\frac{x^2}{(2k-1)2k} v_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Процесс вычислений завершается при выполнении неравенства $u_n < \varepsilon$ ($v_n < \varepsilon$).

3.4.4. Вычисление значений гиперболических функций

Гиперболические функции также можно раскладывать в ряд для приближенного вычисления значений.

Функции гиперболического синуса и косинуса имеют вид соответственно:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Как известно, гиперболический синус — нечетная функция, т.е. $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$, а гиперболический косинус — четная, т.е. $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$. Этими свойствами можно пользоваться при нахождении значений функций для $x < 0$.

Для гиперболического синуса при $x > 0$ справедливо разложение

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Рекуррентные соотношения имеют вид:

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=1}^n u_k + R_n(x); u_1 = x; u_{k+1} = \frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Гиперболический косинус при $x > 0$ можно разложить в ряд

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Рекуррентные соотношения имеют вид:

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=1}^n v_k + R_n(x); v_1 = 1; v_{k+1} = \frac{x^2}{(2k)(2k+1)} v_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Как и ранее, вычисления следует прекратить при выполнении неравенства $|u_n| \leq \varepsilon$ ($|v_n| \leq \varepsilon$).

3.5. Вычисление значений функций методом итераций

Рассмотрим еще один метод вычисления значений функции в заданной точке или на заданном промежутке. Пусть дана непрерывная функция

$$y = f(x). \quad (3.15)$$

Представим (3.15) в виде

$$F(x, y) = 0. \quad (3.16)$$

Для применения итерационного метода необходимо, чтобы функция $F(x, y)$ была непрерывной и имела непрерывную частную производную $F'_y(x, y) \neq 0$.

Определим величину y_n — приближенное значение y . Согласно теореме Лагранжа непрерывная и дифференцируемая на отрезке функция имеет некоторую точку \bar{y}_n , для которой

$$F(x, \bar{y}_n) = F(x, y_n) - F(x, y) = (y_n - y)F'_y(x, \bar{y}_n),$$

где \bar{y}_n — некоторое промежуточное значение между y_n и y . Выразив y , получим

$$y = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, \bar{y}_n)}.$$

Так как значение \bar{y}_n неизвестно, то можно положить $\bar{y}_n \approx y_n$. В результате получим *итерационный процесс*

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, y_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.17)$$

Геометрически при приближении $\bar{y}_n \approx y_n$ хорда заменяется касательной, т.е. имеет место итерационный процесс Ньютона. Он применяется и при нахождении нулей функций (достаточно положить $y = 0$).

Сходимость процесса (3.17) будет обеспечена при условии, что производные $F'_y(x, y)$ и $F''_{yy}(x, y)$ сохраняют постоянные знаки на рассматриваемом интервале, содержащем корень y .

От способа преобразования (3.15) в (3.16) зависит скорость сходимости итерационного процесса. Таких способов может быть очень много.

Начальное значение y_0 в общем случае выбирается произвольным образом, но для лучшей сходимости следует придерживаться опре-

деленных правил. Итерационный процесс (3.17) останавливается при выполнении условия

$$|y_{n-1} - y_n| < \varepsilon.$$

После остановки вычислений можно записать, что

$$f(x) \approx y_{n+1}.$$

Рассмотрим ниже несколько примеров применения итерационного метода.

3.5.1. Вычисление значений функции $y = \frac{1}{x}$

Пусть $x > 0$. Определим функцию

$$F(x, y) = x - \frac{1}{y} = 0.$$

Тогда

$$F'_y(x, y) = \frac{1}{y^2}.$$

Применяя формулу (3.17), получим

$$y_{n+1} = y_n - \frac{x - \frac{1}{y_n}}{\frac{1}{y_n^2}}, \quad (3.18)$$
$$y_{n+1} = y_n(2 - xy_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для выбора начального приближения y_0 представим аргумент x в двоичной форме:

$$x = 2^m x_1,$$

где $\frac{1}{2} \leq x_1 < 1$; m — целое число. Тогда $y_0 = 2^{-m}$.

Для сходимости итерационного процесса (3.18) необходимо и достаточно выполнение условия

$$|1 - xy_0| < 1.$$

3.5.2. Вычисление значений функции $y = \sqrt{x}$

Из функции $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$) путем преобразований получим

$$F(x, y) = y^2 - x = 0.$$

Производная равна

$$F'_y(x, y) = 2y.$$

Согласно формуле (3.17) получим

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^2 - x}{2y_n}, \quad (3.19)$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{x}{y_n} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Формула (3.19) называется *процессом Герона*. Данный процесс обладает важным свойством: число верных цифр примерно удваивается при каждой итерации по сравнению с первоначальным количеством. Представив аргумент x в двоичной форме

$$x = 2^m x_1$$

$\left(\frac{1}{2} \leq x_1 < 1, m — \text{целое число}\right)$, получим условие сходимости

$$y_0 = 2^{E\left(\frac{m}{2}\right)},$$

где $E\left(\frac{m}{2}\right)$ — целая часть числа $\frac{m}{2}$.

3.5.3. Вычисление значений функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Преобразуем функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) следующим образом:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Используя формулу (3.19), получим итерационный процесс

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2} (3 - xy_n^2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.20)$$

При $x = 2^m x_1$ $\left(\frac{1}{2} \leq x_1 < 1\right)$ в качестве начального приближения выбирают значение

$$y_0 = 2^{-E\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

3.5.4. Вычисление значений функции $y = \sqrt[3]{x}$

Функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ($x > 0$) преобразуем к виду

$$F(x, y) = y^3 - x = 0.$$

Тогда

$$F'_y(x, y) = 3y^2.$$

Применяя формулу (3.17), получим

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^3 - x}{3y_n^2}, \quad (3.21)$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2y_n + \frac{x}{y_n^2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В качестве начального приближения берем величину

$$y_0 = 2^{\frac{E}{3}} > 0.$$

3.6. Вычисление значений функций путем разложения по многочленам Чебышева

Как известно, ряды Тейлора дают хороший результат при вычислении значения функции в конкретной точке. При удалении от нее погрешность метода сильно увеличивается. Иногда необходимо более равномерно распределить ошибку по интервалу, который содержит данную точку. Для этого применяются полиномы (многочлены) Чебышева.

Полиномы Чебышева определяются следующим образом:

$$T_n(x) = \cos(n\theta);$$
$$x = \cos(\theta). \quad (3.22)$$

То есть можно записать

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)).$$

Первые четыре полинома имеют вид:

$$T_0(x) = \cos(0) = 1;$$
$$T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x;$$
$$T_2(x) = \cos(2 \cdot \arccos(x)) = 2x^2 - 1;$$
$$T_3(x) = \cos(3 \cdot \arccos(x)) = 4x^3 - 3x.$$

Для расчетов остальных полиномов Чебышева получим рекуррентное соотношение, связывающее $T_{n+1}(x)$, $T_n(x)$ и $T_{n-1}(x)$:

$$T_{n+1}(x) = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta);$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(n\theta - \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta).$$

Складывая $T_{n+1}(x)$ и $T_{n-1}(x)$, получим

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) = 2xT_n(x).$$

Окончательно получим

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

На рис. 3.1 изображены первые четыре полинома Чебышева. С увеличением порядка полинома наблюдается уменьшение периода колебаний.

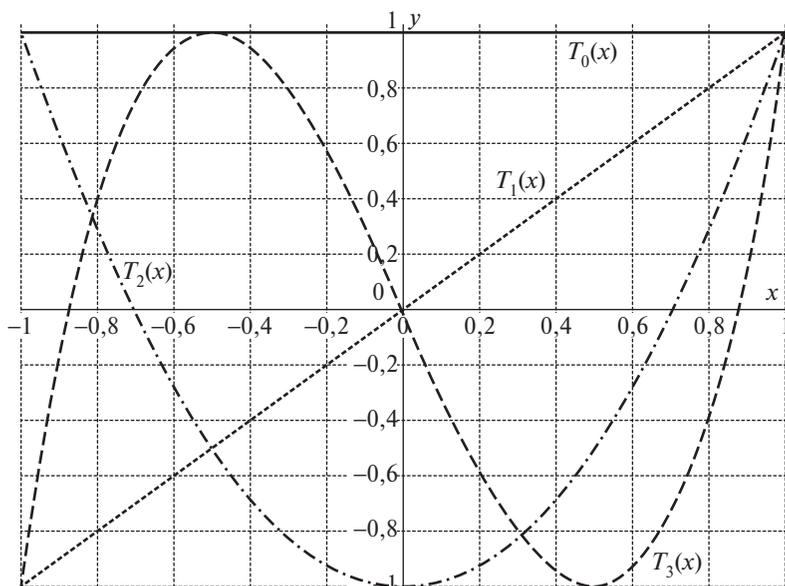


Рис. 3.1. Первые четыре полинома Чебышева

Подобно разложению функции в ряд Тейлора, можно составить для этой функции ряд, состоящий из многочленов Чебышева (*ряд Чебышева*). Таким образом, данная функция будет разложена по чебышевскому базису.

Определение. *Базис* — это система из k линейно независимых элементов k -мерного линейного векторного пространства.

Например, $\{x^k\}$ — степенной базис, $\{T_k(x)\}$ — чебышевский базис ($k = 0, 1, \dots, n$).

При использовании чебышевского базиса для разложения функции (и при вычислении значений этой функции) можно получить многочлен, подобный многочлену Тейлора, но более короткий и обладающий той же погрешностью.

Стоит отметить, что вычисление коэффициентов ряда Чебышева является непростой задачей. Поэтому такое разложение применяется в тех случаях, где действительно это оправдано.

Пример. Пусть требуется вычислить значение функции $f(x) = \ln(x)$ в точке $x = 2$.

Решение. Возьмем первые пять членов ряда (3.13):

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}.$$

Заменим каждую степень x соответствующими комбинациями многочленов Чебышева:

$$1 = T_0(x);$$

$$x = T_1(x);$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x));$$

$$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x));$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x));$$

$$x^5 = \frac{1}{16}(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)).$$

В итоге получим разложение логарифмической функции по чебышевскому базису:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\approx T_1(x) - \frac{1}{4}(T_0(x) + T_2(x)) + \frac{1}{12}(3T_1(x) + T_3(x)) - \\ &- \frac{1}{32}(3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)) + \frac{1}{80}(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)) = \\ &= -\frac{11}{32}T_0(x) + \frac{11}{8}T_1(x) - \frac{3}{8}T_2(x) + \frac{7}{48}T_3(x) - \frac{1}{32}T_4(x) + \frac{1}{80}T_5(x). \end{aligned}$$

Оставив в полученном выражении только первые три члена, получим более точный результат, чем пять членов разложения (3.13):

$$\ln(1+x) \approx -\frac{11}{32}T_0(x) + \frac{11}{8}T_1(x) - \frac{3}{8}T_2(x). \quad (3.23)$$

Или, перейдя к степенному разложению:

$$\ln(1+x) \approx \frac{1}{32} + \frac{11}{8}x - \frac{3}{4}x^2. \quad (3.24)$$

В общем случае длинный отрезок степенного ряда после переразложения по чебышевскому базису дает приближающий многочлен значительно меньшей степени, так как многие старшие члены чебышевского разложения изменяют значение вычисляемой величины в пределах ошибки первоначального разложения, и их без особого ущерба можно отбросить. Описанный выше пример представляет собой *экономизацию* степенных рядов.

3.7. Рациональные приближения

Значение функции в заданной точке можно вычислить, представив ее в виде дробно-рационального выражения.

В общем случае такое представление имеет вид

$$f(z) = \frac{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n}{c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_mz^m}, \quad z = x - x_0,$$

где x_0 — точка, в которой осуществляется разложение функции в ряд. К такому приближению приходят различными путями. Рассмотрим один из них.

Пусть $m = n = 3$, $x_0 = 0$. Представим функцию $f(x)$ в виде отношения многочленов третьей степени:

$$f(x) = \frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3}{1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3}. \quad (3.25)$$

В знаменателе мы приняли значение свободного члена $c_0 = 1$, что не будет нарушать общности выражения (3.25) в силу того, что и числитель, и знаменатель можно поделить на $c_0 \neq 0$. Случай, когда $c_0 = 0$, рассматривать не будем. Преобразуем (3.25):

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 = (1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3)f(x). \quad (3.26)$$

Далее разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора и ограничимся первыми шестью членами разложения:

$$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6, \quad a_i = \frac{f^i(0)}{i!}.$$

Подставим в (3.26) полученное разложение и выполним преобразование правой части:

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 = a_0 + x(a_1 + a_0c_1) + x^2(a_2 + a_1c_1 + a_0c_2) + x^3(a_3 + a_2c_1 + a_1c_2 + a_0c_3) + x^4(a_4 + a_3c_1 + a_2c_2 + a_1c_3) + x^5(a_5 + a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3) + x^6(a_6 + a_5c_1 + a_4c_2 + a_3c_3).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и право частях, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0; \\ b_1 &= a_1 + a_0c_1; \\ b_2 &= a_2 + a_1c_1 + a_0c_2; \\ b_3 &= a_3 + a_2c_1 + a_1c_2 + a_0c_3; \\ 0 &= a_4 + a_3c_1 + a_2c_2 + a_1c_3; \\ 0 &= a_5 + a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3; \\ 0 &= a_6 + a_5c_1 + a_4c_2 + a_3c_3. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Решив систему (3.27), определим коэффициенты $b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2, c_3$ и тем самым получим дробно-рациональное выражение для функции $f(x)$.

Пример. Дана функция $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Составим для нее дробно-рациональное приближение.

Решение. Воспользуемся тем, что данная функция нечетная, и поэтому в числителе оставим только члены с нечетными степенями x , а в знаменателе — с четными. Остальные коэффициенты равны нулю: $b_0 = b_2 = c_1 = c_3 = 0$.

Разложим функцию $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ в ряд Тейлора и оставим только первые шесть членов:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi^3}{8 \cdot 3!}x^3 + \frac{\pi^5}{32 \cdot 5!}x^5.$$

Система уравнений (3.27) примет вид:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\pi}{2}; \\ b_3 &= -\frac{\pi^3}{8 \cdot 3!} + \frac{\pi}{2}c_2; \\ 0 &= \frac{\pi^5}{32 \cdot 5!} - \frac{\pi^3}{8 \cdot 3!}c_2. \end{aligned}$$

Решая полученную систему, имеем:

$$b_1 = \frac{\pi}{2}; b_3 = -\frac{7\pi^3}{480}; c_3 = \frac{\pi^2}{80}.$$

Таким образом, дробно-рациональное приближение для функции $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ имеет вид

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \approx \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)x - \left(\frac{7\pi^3}{480}\right)x^3}{1 + \frac{\pi^2}{80}x^2}.$$

Полученное разложение функции имеет более короткую формулу по сравнению с ее разложением в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ при одинаковом порядке точности.

Контрольные вопросы

1. Опишите схему Горнера. Для какого класса функций она применима?
2. Каким образом вычисляются суммы бесконечных и конечных числовых рядов?
3. Что называют остатком числового ряда?
4. Поясните смысл погрешностей: остаточная погрешность; погрешность суммирования; погрешность округления.
5. Каким условиям должна удовлетворять функция, чтобы ее можно было разложить в ряд Тейлора?
6. Опишите идею нахождения значений функции методом итераций. Приведите примеры.
7. Что такое многочлены Чебышева?
8. Для какой цели применяются многочлены Чебышева?
9. В чем состоит сложность использования многочленов Чебышева?
10. Что называют чебышевским базисом?
11. Назовите преимущества и недостатки разложения функции по многочленам Чебышева.
12. Приведите примеры экономизации степенных рядов.
13. Чем выгоднее использовать рациональные приближения по сравнению с рядами Тейлора?

В случае аналитического решения системы без округления промежуточных вычислений и результата мы получим вектор \mathbf{x} . Если же будем применять округление или использовать итерационные методы решения системы уравнений, то в качестве результата получится вектор

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix},$$

отличающийся от вектора \mathbf{x} на величину погрешности, задаваемой перед началом вычислений:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_1 - x_2^* \\ \vdots \\ x_1 - x_n^* \end{bmatrix}.$$

Качество полученного решения не всегда характеризуется малостью погрешности \mathbf{e} . Оценить качество решения можно с помощью критерия малости невязки:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^*.$$

Вектор \mathbf{r} показывает, насколько левая часть системы уравнений отличается от правой при подстановке в нее приближенного решения \mathbf{x}^* . Погрешность и невязка связаны равенством

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{r}.$$

4.2. Типы используемых матриц

Эффективность применения того или иного метода решения СЛАУ зависит от типа матрицы коэффициентов. Рассмотрим некоторые типы матриц.

Определение. Квадратная матрица A называется *диагональной*, если ее элементы удовлетворяют условию $a_{ij} = 0, i \neq j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если все элементы главной диагонали $a_{ii} = 1$, такую матрицу называют *единичной*:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует заметить, что норма диагональной матрицы равна единице, т.е. $\|E\| = 1$.

Особое место в линейной алгебре занимают *треугольные* матрицы.

Определение. Квадратная матрица L называется *нижней треугольной*, если все ее элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю ($l_{ij} = 0$ для $i < j$).

Определение. Квадратная матрица U называется *верхней треугольной*, если равны нулю все элементы, стоящие ниже главной диагонали ($u_{ij} = 0$ для $i > j$):

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Такие матрицы обладают рядом замечательных свойств, знание которых упрощает вычислительный процесс. Например, определитель треугольной матрицы L легко вычисляется по формуле

$$\det(L) = l_{11}l_{22}\dots l_{nn}$$

Определение. Квадратная матрица называется *симметричной*, если она совпадает со своей транспонированной матрицей A^T , т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Одной из вычислительных трудностей является хранение матриц больших размерностей в памяти ЭВМ. Для хранения матрицы порядка n требуется n^2 машинных слов. Для хранения диагональной матрицы достаточно отвести массив длины n и расположить в нем диагональные элементы матрицы. Для хранения треугольной матрицы достаточно $\frac{m}{2}(m+1)$ ячеек памяти. Такое же количество ячеек потребуется и для хранения симметричной матрицы.

Очень часто процесс решения инженерных задач приводит к матрицам, число ненулевых элементов которых много меньше общего числа элементов. Такие матрицы называют *разреженными*. Простой пример разреженной матрицы — *трехдиагональная матрица*, все не-

нулевые элементы которой расположены на главной и двух соседних с ней диагоналях. Число таких элементов равно $3n - 2$. Пример трехдиагональной матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Некоторые задачи приводят к *ленточным* матрицам.

Определение. Матрица A называется ленточной с полушириной ленты l , если $a_{ij} = 0$ для $|i - j| > l$. Все ненулевые элементы такой матрицы расположены на $s = 2l + 1$ ближайших к главной диагоналях матрицы.

Определение. Число s называют *шириной ленты*. Трехдиагональная матрица является частным случаем ленточной матрицы при $s = 3$.

4.3. Обусловленность СЛАУ

Перед решением системы уравнений желательно провести анализ, по результатам которого можно сделать вывод о применимости того или иного метода для получения решения.

Система линейных алгебраических уравнений может иметь единственное решение, бесконечное множество решений или не иметь решения вообще. Рассмотрим эти случаи на простых примерах.

Первый случай. Решение системы уравнений существует и является единственным. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Решение этой системы: $x = 1$; $y = 2$.

На рис. 4.1 показано геометрическое представление решения системы двух линейных уравнений, имеющей единственное решение. Угол между прямыми довольно большой. Координаты этой точки и соответствуют искомому решению.

Второй случай. Система уравнений имеет бесконечное множество решений. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 4x + 6y = 12, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

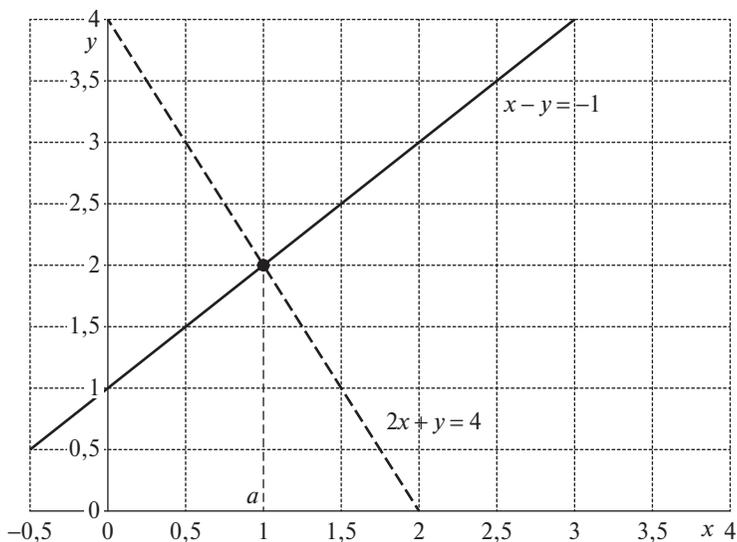


Рис. 4.1. Возможные случаи решения СЛАУ: решение единственно

Как видно из рис. 4.2, эти два уравнения описывают одну и ту же прямую. Любая точка, лежащая на этой линии, и будет являться решением данной системы.

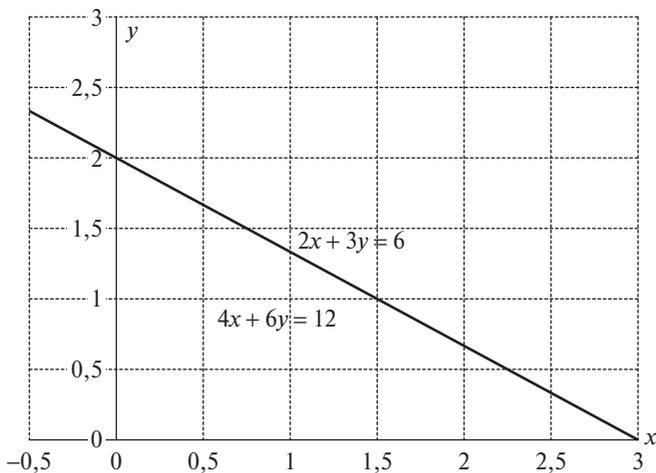


Рис. 4.2. Возможные случаи решения СЛАУ:
бесконечное множество решений

Третий случай. Система уравнений не имеет корней. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Взаимное расположение прямых линий, соответствующих данной системе, показано на рис. 4.3.

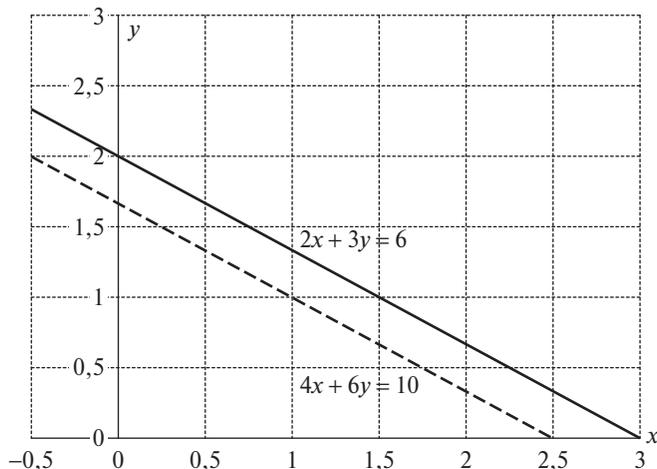


Рис. 4.3. Возможные случаи решения СЛАУ: решение отсутствует

Системы уравнений второго и третьего случаев называют вырожденными. Вырожденность можно проверить, вычислив определитель такой системы: он будет равен нулю. На практике часто бывает, что подсчитать определитель ничуть не легче, чем решить систему уравнений.

С точки зрения математики система всегда является либо вырожденной, либо невырожденной. Однако практические вычисления показывают, что возможны такие случаи, когда система является *почти вырожденной*.

Рассмотрим систему уравнений (рис. 4.4)

$$\begin{cases} 5x + 7y = 12, \\ 7x + 10y = 17, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Далее подставим пару значений $x = 2,415$, $y = 0$ в исходные уравнения. Получим

$$\begin{cases} 5x + 7y = 12,075, \\ 7x + 10y = 16,905. \end{cases}$$

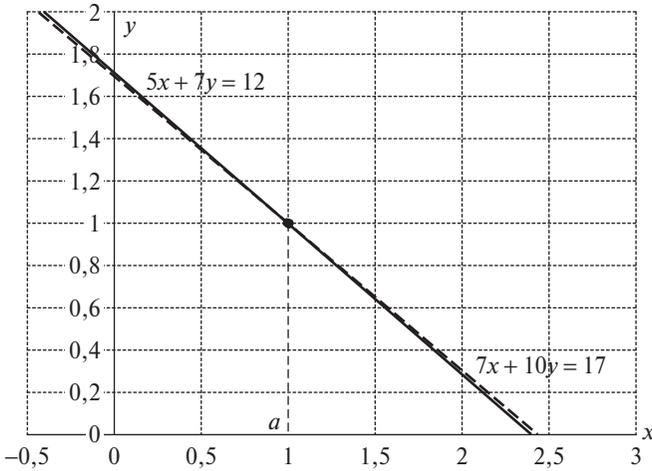


Рис. 4.4. Возможные случаи решения СЛАУ: плохо обусловленная система

После округления до двух значащих цифр правые части совпадут с правыми частями исходных уравнений. А так как исходные уравнения были заданы только с точностью до двух значащих цифр, то решение $x = 2,415$, $y = 0$ также хорошо отвечает условию поставленной задачи.

Из рис. 4.4 видно, что прямые линии, описываемые двумя уравнениями этой системы, почти параллельны. Точка $x = 2,415$, $y = 0$ хотя и не лежит ни на одной из этих линий, но близка к ним. Системы данного типа называют *плохо обусловленными*.

Количественной мерой обусловленности системы уравнений (матрицы коэффициентов) служит число обусловленности (см. гл. 2):

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|.$$

Определение. В системе уравнений (4.2) матрицу A называют плохо обусловленной, если $\text{cond}(A) \gg 1$. Для такой системы существуют решения, обладающие очень высокой чувствительностью к малым погрешностям задания вектора \mathbf{b} , а также к элементам самой матрицы A .

В плохо обусловленной системе применение итерационных методов дает более точное решение, а использование прямых (точных) методов из-за большой ошибки округления может привести к бессмысленным результатам.

4.4. Методы решения СЛАУ

Методы численного решения СЛАУ разделяются на два больших класса: прямые и итерационные.

В *прямых* методах используются конечные соотношения для вычисления неизвестных. Решение получается после выполнения конечного числа операций. Методы данного класса сравнительно просты и универсальны. Однако такие методы обладают и недостатками:

- необходимо хранить в памяти ЭВМ всю матрицу коэффициентов. При большом количестве уравнений требуется большое количество памяти;
- нет учета типа матрицы коэффициентов, что влечет за собой расход памяти и дополнительные затраты времени на вычисления;
- при реализации методов на ЭВМ накапливается ошибка округления, которая при большой размерности матрицы коэффициентов может оказаться недопустимо большой.

Итерационные методы — методы последовательных приближений. Для получения решения необходимо задать так называемое *начальное приближение*, т.е. вектор

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Далее осуществляется *итерация* — один цикл вычислений. По ее окончании получается первое приближение и вновь повторяется итерация. Количество итераций может быть любым (от 10 до 1000 и более). Вычислительный процесс останавливается по достижении заданной точности. Заранее определить количество итераций — трудная задача.

Достоинства:

- в памяти ЭВМ хранится не вся матрица, а только необходимая для данной итерации ее часть;
- погрешность вычислений зависит только от результатов предыдущей итерации, поэтому накопления ошибки не происходит;
- подходят для решения плохо обусловленных систем.

Недостатки:

- для данных методов существует проблема сходимости итераций;
 - количество итераций зависит от выбора начального приближения.
- По своей сути итерационные методы являются приближенными.

4.4.1. Метод Гаусса

Данный метод является наиболее известным прямым методом решения СЛАУ, суть которого рассмотрим на примере.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (4.3)$$

Заметим, что в данной системе хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{21}, a_{31} должен быть отличен от нуля. Если $a_{11} = 0$, то необходимо переставить уравнения так, чтобы коэффициент при x был отличен от нуля. При перестановке решение системы не изменится. Введем множитель

$$m_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}.$$

Умножим первое уравнение системы (4.3) на этот множитель и вычтем его из второго уравнения системы:

$$(a_{21} - m_2 a_{11})x_1 + (a_{22} - m_2 a_{12})x_2 + (a_{23} - m_2 a_{13})x_3 = b_2 - m_2 b_1.$$

В силу того что

$$(a_{21} - m_2 a_{11}) = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} = 0,$$

переменная исключена из второго уравнения системы.

Определим теперь новые коэффициенты:

$$a'_{22} = a_{22} - m_2 a_{12};$$

$$a'_{23} = a_{23} - m_2 a_{13};$$

$$b'_2 = b_2 - m_2 b_1.$$

Тогда второе уравнение системы (4.3) примет вид

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2.$$

Введем множитель

$$m_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}.$$

Умножим первое уравнение системы на m_3 и вычтем его из третьего уравнения. Коэффициент при x_1 снова становится нулевым, и третье уравнение примет вид

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3,$$

где $a'_{32} = a_{32} - m_3a_{12}$; $a'_{33} = a_{33} - m_3a_{13}$; $b'_3 = b_3 - m_3b_1$.

В соответствии с полученными уравнениями новая система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases} \quad (4.4)$$

Новая система полностью эквивалентна старой, за исключением лишь того, что x_1 входит только в первое уравнение и второе и третье уравнения представляют систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Исключим теперь x_2 из последних двух уравнений.

В случае если $a'_{22} = 0$, необходимо снова переставить уравнения системы (4.4) местами. Пусть

$$m'_3 = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}.$$

Умножим второе уравнение системы (4.4) на m'_3 и вычтем его из третьего уравнения:

$$(a'_{32} - m'_3a'_{22})x_2 + (a'_{33} - m'_3a'_{23})x_3 = b'_3 - b'_2m'_3.$$

Как и ранее, $a'_{32} - m'_3a'_{22} = 0$.

Обозначив

$$a''_{33} = a'_{33} - m'_3a'_{23},$$

$$b''_3 = b'_3 - b'_2m'_3,$$

получим

$$a''_{33}x_3 = b''_3.$$

С учетом обозначений новая система будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases} \quad (4.5)$$

Для решения системы (4.5) необходимо сначала найти x_3 из третьего уравнения, потом x_2 из второго и, подставив x_3 и x_2 в первое уравнение, найти x_1 :

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}};$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3}{a'_{22}};$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} & b_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}.$$

Выберем ненулевой, как правило наибольший по модулю, не принадлежащий столбцу свободных членов элемент a_{pq} . Назовем его *главным элементом* матрицы M . Вычислим множители

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}, \quad i \neq p.$$

Строка с номером p , содержащая главный элемент, называется *главной строкой*. Далее, умножим главную строку на множитель m_1 и прибавим результат к первой строке матрицы M ; умножим главную строку на m_2 и прибавим результат ко второй строке и т.д. То есть m_i вычисляется для каждой неглавной строки. В результате получим новую матрицу, q -й столбец которой будет состоять из нулей. Отбросим этот столбец и главную p -ю строку и получим новую матрицу $M^{(1)}$, размерность которой на единицу меньше размерности матрицы M .

Над матрицей $M^{(1)}$ повторяем те же операции, что и над матрицей M . В результате получим матрицу $M^{(2)}$ и т.д. Таким образом, мы построим последовательность матриц

$$M, M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(n-1)}.$$

Матрица $M^{(n-1)}$ представляет собой двучленную матрицу-строку. Ее также надо считать главной строкой.

Для определения неизвестных x_i необходимо объединить в систему все главные строки, начиная с последней, входящей в матрицу $M^{(n-1)}$. Следует запомнить, какие переменные стояли при главных элементах, а какие — при исключенных коэффициентах, и впоследствии изменить их нумерацию таким образом, чтобы получилась система, эквивалентная исходной. Новая система будет иметь треугольный вид, найти из которой неизвестные не составит особого труда. Отметим, что метод главных элементов применим, когда определитель системы (4.1) отличен от нуля.

$$\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

который и является решением системы уравнений (4.9).

Формулы приближений в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \\ \alpha_{ii} = 0; i = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Процесс итерации сходится хорошо (за малое число итераций достигается заданная точность решения), если все коэффициенты α_{ij} невелики по абсолютному значению. Другими словами, модули диагональных элементов должны быть велики по сравнению с модулями недиагональных элементов системы (4.8). Сходящийся процесс итерации обладает свойством самоисправляемости, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на окончательном результате в силу того, что ошибочное приближение можно рассматривать как новый начальный вектор.

Пример. Решим СЛАУ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{cases} 6,25x_1 - x_2 + 0,5x_3 = 7,5, \\ -x_1 + 5x_2 + 2,12x_3 = -8,68, \\ 0,5x_1 + 2,12x_2 + 3,6x_3 = -0,24. \end{cases}$$

Решение. Приведем систему к виду, удобному для итераций:

$$\begin{cases} x_1 = 0,16x_2 - 0,08x_3 + 1,2, \\ x_2 = 0,2x_1 - 0,424x_3 - 1,736, \\ x_3 = -0,1389x_1 - 0,5889x_2 - 0,0667. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов и вектор β приведенного уравнения имеют вид:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0,16 & -0,08 \\ 0,2 & 0 & -0,424 \\ -0,1389 & -0,5889 & 0 \end{bmatrix}; \beta = \begin{bmatrix} 1,2 \\ -1,736 \\ -0,0667 \end{bmatrix}.$$

Норма матрицы α удовлетворяет условию сходимости метода простой итерации. Приняв в качестве начального приближения вектор

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

начнем итерационный процесс. Результаты занесем в таблицу.

k	0	1	2	3	...	15
$x_1^{(k)}$	0	1,2000	0,9276	0,9020	...	0,8001
$x_2^{(k)}$	0	-1,7360	-1,4677	-1,8850	...	-1,8392
$x_3^{(k)}$	0	-0,0667	0,7890	0,6688	...	0,9181
$\ \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\ $	0	1,7360	0,8557	0,4173	...	0,2493

Требуемая точность достигнута на 15-й итерации.

4.4.5. Метод Гаусса—Зейделя

Данный метод является итерационным. Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Предположим, что $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$, и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3), \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3), \\ x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2). \end{cases}$$

Обозначим первое приближение через $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$. Подставим это решение в выражение для x_1 и вычислим новое значение $x_1^{(1)}$:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}).$$

Используя только что найденное значение $x_1^{(1)}$ и начальное значение $x_3^{(0)}$, вычислим значение $x_2^{(1)}$:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}).$$

Значение $x_3^{(1)}$ получим, используя $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}).$$

Этим заканчивается первая итерация. Далее можно заменить исходные значения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ на $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ и вычислить следующее приближение. В общем случае k -е приближение определяется формулами

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}), \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}), \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}). \end{cases}$$

Обобщим данный метод на случай системы из n уравнений (система (4.1)).

В общем случае компоненты $(k+1)$ -й итерации вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \alpha_{23}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2, \\ x_3^{(k+1)} = \alpha_{31}x_1^{(k+1)} + \alpha_{32}x_2^{(k+1)} + \dots + \alpha_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{n2}x_2^{(k+1)} + \alpha_{n3}x_3^{(k+1)} + \dots + \beta_n, \end{cases}$$

где $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$; $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$.

Введем треугольные матрицы B_1 и B_2 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда расчетные формулы примут вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = A_1\mathbf{x}^{(k+1)} + A_2\mathbf{x}^{(k)}.$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока все $x_i^{(k)}$ не станут достаточно близки к $x_i^{(k-1)}$. Например, критерий близости можно сформулировать в виде абсолютной разности

$$M^{(k)} = \max|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$$

или в виде относительной разности

$$M^{(k)} = \max \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon.$$

4.4.6. Метод прогонки

Метод прогонки следует применять, когда матрица коэффициентов имеет трехдиагональный вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{t,t-1}x_{t-1} + a_{tt}x_t + a_{t,t+1}x_{t+1} = b_t, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}, \\ a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (4.11)$$

Преобразуем первое уравнение системы (4.11) к виду

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1,$$

где $\alpha_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$; $\beta_1 = \frac{a_{11}}{a_{11}}$. Подставим полученное выражение во второе уравнение системы (4.11):

$$a_{21}(\alpha_1 x_2 + \beta_1) + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2.$$

Полученное выражение преобразуем к виду

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2,$$

где $\alpha_2 = -\frac{a_{23}}{a_{22} + a_{21}\alpha_1}$; $\beta_2 = \frac{b_2 - a_{21}\beta_1}{a_{22} + a_{21}\alpha_1}$.

Полученное выражение для x_2 подставим в третье уравнение системы (4.11) и т.д. На шаге t процесса t -е уравнение системы преобразуется к виду

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha_t x_{t+1} + \beta_t, \\ \alpha_t &= -\frac{a_{t,t-1}}{a_{tt} + a_{t,t-1}\alpha_{t-1}}, \quad \beta_t = \frac{b_t - a_{t,t-1}\beta_{t-1}}{a_{tt} + a_{t,t-1}\alpha_{t-1}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

На шаге n подстановка в последнее уравнение системы выражения $x_{n-1} = \alpha_{n-1}x_n + \beta_{n-1}$ дает

$$a_{n,n-1}(\alpha_{n-1}x_n + \beta_{n-1}) + a_{nn}x_n = b_n.$$

Отсюда можно выразить значение x_n :

$$x_n = \beta_n = \frac{b_n - a_{n,n-1}\beta_{n-1}}{a_{nn} + a_{n,n-1}\alpha_{n-1}}.$$

Значения остальных неизвестных x_t ($t = n - 1, n - 2, \dots, 1$) можно определить по формуле (4.12).

Метод прогонки является двухпроходным:

- прямой ход состоит в вычислении прогоночных коэффициентов α_t, β_t ($1 \leq t < n$);
- обратный ход заключается в вычислении неизвестных x_t , начиная с последнего x_n и заканчивая x_1 .

Пример. Дана СЛАУ

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2,0, \\ 2x_1 + 4,6x_2 - x_3 = 3,3, \\ 2x_2 - 3,6x_3 - 0,8x_4 = 2,6, \\ 3,0x_3 + 4,4x_4 = 7,2. \end{cases}$$

Решение. Результаты прямого и обратного ходов приведены в таблице.

Прямой ход		Обратный ход
$\alpha_1 = 5$	$\beta_1 = 0,4$	$x_1 = 0,5256$
$\alpha_2 = 0,2$	$\beta_2 = 0,5$	$x_2 = 0,628$
$\alpha_3 = 0,2$	$\beta_3 = 0,4$	$x_3 = 0,64$
—	$\beta_4 = 1,2$	$x_4 = 1,2$

4.4.7. Метод Холецкого

Пусть в системе линейных уравнений (4.2) матрица коэффициентов A является симметричной, положительно определенной. В основе метода лежит алгоритм LU -разложения матрицы A , в результате которого она приводится к виду

$$A = LL^T, \quad (4.13)$$

где

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если разложение (4.13) получено, то решение поставленной задачи сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами:

$$\begin{aligned} Ly &= \mathbf{b}; \\ L^T \mathbf{x} &= \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Для нахождения элементов матрицы L вычислим элементы матрицы LL^T и приравняем их к соответствующим элементам матрицы A . В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} l_{11}^2 &= a_{11}; \\ l_{i1}l_{11} &= a_{i1}, \quad i = 2, 3, \dots, n; \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 &= a_{22}; \\ l_{i1}l_{21} + l_{i2}l_{22} &= a_{i2}, \quad i = 3, 4, \dots, n; \\ &\dots\dots\dots \\ l_{k1}^2 + l_{k2}^2 + \dots + l_{kk}^2 &= a_{kk}; \\ l_{i1}l_{k1} + l_{i2}l_{k2} + \dots + l_{ik}l_{kk} &= a_{ik}, \quad i = k + 1, \dots, n; \\ l_{n1}^2 + l_{n2}^2 + \dots + l_{nn}^2 &= a_{nn}. \end{aligned}$$

Решая полученную выше систему, находим элементы матрицы L :

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}}; \\ l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \quad i = 2, 2, \dots, n; \\ l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}; \\ l_{i2} &= \frac{a_{i2} - l_{i1}l_{21}}{l_{22}}, \quad i = 3, 4, \dots, n; \\ &\dots\dots\dots \\ l_{kk} &= \sqrt{a_{kk} - l_{k1}^2 - l_{k2}^2 - \dots - l_{k,k-1}^2}; \\ l_{ik} &= \frac{a_{ik} - l_{i1}l_{k1} - l_{i2}l_{k2} - \dots - l_{i,k-1}l_{k,k-1}}{l_{kk}}, \quad i = k + 1, \dots, n; \\ &\dots\dots\dots \\ l_{nn} &= \sqrt{a_{nn} - l_{n1}^2 - l_{n2}^2 - \dots - l_{n,n-1}^2}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Для вычисления диагональных элементов используется операция извлечения квадратного корня. Поэтому данный метод еще называют *методом квадратных корней*. Так как матрица A положительно определенная, то подкоренные выражения есть неотрицательные величины.

Пример. Требуется решить СЛАУ

$$\begin{cases} 6,25x_1 - x_2 + 0,5x_3 = 7,5, \\ -x_1 + 5x_2 + 2,12x_3 = -8,68, \\ 0,5x_1 + 2,12x_2 + 3,6x_3 = -0,24. \end{cases}$$

Решение. Вычисляя коэффициенты матрицы по формулам (4.14), получим матрицу L :

$$L = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ -0,4 & 2,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 1,6 \end{bmatrix}.$$

Система $Ly = \mathbf{b}$ примет вид

$$\begin{cases} 2,5y_1 = 7,5, \\ -0,4y_1 + 2,2y_2 = -8,68, \\ 0,2y_1 + y_2 + 1,6y_3 = -0,24. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид: $y_1 = 3$; $y_2 = -3,4$; $y_3 = 1,6$.

Далее из системы $L^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$, имеющей вид

$$\begin{cases} 2,5x_1 - 0,4x_2 + 0,2x_3 = 3, \\ 2,2x_2 + x_3 = -3,4, \\ 1,6x_3 = 1,6, \end{cases}$$

получаем решение: $x_1 = 0,8$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$.

4.4.8. Метод релаксации

Метод релаксации является одним из самых широко применяемых методов решения СЛАУ с положительно определенной матрицей коэффициентов.

После вычисления компоненты \tilde{x}_i по методу Гаусса—Зейделя на $(k + 1)$ -й итерации

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i^{(k+1)} &= \alpha_{i1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{i2}x_2^{(k+1)} + \dots + \alpha_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} + \\ &+ \alpha_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} + \dots + \alpha_{in}x_n^{(k)} + \alpha_i \end{aligned}$$

производят смещение этой компоненты на величину

$$(\omega - 1)(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}),$$

где ω — *параметр релаксации*. В результате новое приближение определится соотношением

$$x_i^{(k+1)} = \tilde{x}_i^{(k+1)} + (\omega - 1)(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}),$$

$$x_i^{(k+1)} = \omega \tilde{x}_i^{(k+1)} - (1 - \omega)x_i^{(k)}.$$

Используя обозначения параграфа 4.4.5, компактная формула для вычисления $(k + 1)$ -го приближения будет иметь вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1 - \omega)\mathbf{x}^{(k)} + \omega A_1 \mathbf{x}^{(k+1)} + \omega A_2 \mathbf{x}^{(k)} + \omega \beta.$$

Если $\omega = 1$, то метод релаксации совпадает с методом Гаусса—Зейделя. При $\omega > 1$ имеем метод *последовательной верхней релаксации*, при $\omega < 1$ имеем метод *последовательной нижней релаксации*. Выбор параметра релаксации ($0 < \omega < 2$) иногда является довольно непростой задачей, которая порой решается экспериментальным путем.

Пример. Дана СЛАУ

$$\begin{cases} 6,25x_1 - x_2 + 0,5x_3 = 7,5, \\ -x_1 + 5x_2 + 2,12x_3 = -8,68, \\ 0,5x_1 + 2,12x_2 + 3,6x_3 = -0,24. \end{cases}$$

Решение. Решим данную систему при значении параметра релаксации $\omega = 1,12$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. В качестве начального приближения возьмем вектор

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Приведем систему к виду, удобному для итераций:

$$\begin{cases} x_1 = 0,16x_2 - 0,08x_3 + 12, \\ x_2 = 0,2x_1 - 0,424x_3 - 1,736, \\ x_3 = -0,1389x_1 - 0,5889x_2 - 0,0667. \end{cases}$$

Последовательные приближения будем вычислять по формулам ниже, а результаты занесем в таблицу:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (1 - \omega)x_1^{(k)} + \omega(0,16x_2^{(k)} - 0,08x_3^{(k)} + 12); \\ x_2^{(k+1)} &= \omega \cdot 0,2x_1^{(k+1)} + (1 - \omega)x_2^{(k)} + \omega(-0,424x_3^{(k)} - 1,736); \\ x_3^{(k+1)} &= \omega(-0,1389x_1^{(k+1)} - 0,5889x_2^{(k+1)}) + (1 - \omega)x_3^{(k)} - \omega \cdot 0,6667. \end{aligned}$$

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0	1,3440	0,8166	0,8094	0,7995	0,8001
$x_2^{(k)}$	0	-1,6433	-1,9442	-1,9973	-1,9998	-2,000
$x_3^{(k)}$	0	0,8001	0,9846	0,9986	1,0001	1,000

4.4.9. Критерии сходимости и оценки погрешности итерационных методов

Чтобы применять итерационные методы для решения СЛАУ, последнюю необходимо преобразовать к виду, удобному для итераций. Иногда встречаются системы, уже готовые для итерационных процессов.

Для сходимости итерационного процесса должно выполняться следующее *достаточное* условие.

Если для системы (4.7), приведенной к виду, удобному для итераций, выполнено по меньшей мере одно из условий:

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, i = 1, 2, \dots, n \text{ или } \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, j = 1, 2, \dots, n,$$

то процесс итерации сходится к единственному решению данной системы независимо от выбора начального приближения.

Для исходной системы (4.1) условие сходимости можно записать как

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n,$$

т.е. модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей для всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Контрольные вопросы

1. Перечислите характерные случаи, возникающие при решении СЛАУ.
2. Что такое плохо обусловленная система? Приведите пример.
3. На какие классы разделяются методы решения СЛАУ?
4. В чем состоит метод Гаусса?
5. В каких случаях применяется уточнение полученного решения СЛАУ?
6. Что такое главный элемент и главная строка?
7. Какой метод является более общим: метод Гаусса или метод главных элементов?
8. Опишите метод простой итерации решения СЛАУ.
9. Назовите отличия метода Гаусса—Зейделя от метода простой итерации.
10. Опишите метод релаксации.
11. Опишите метод прогонки.
12. Опишите метод Холецкого.
13. Какие условия должны выполняться для обеспечения сходимости решения СЛАУ?

Глава 5

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нелинейные уравнения часто встречаются при проведении математического моделирования процессов в различных научных дисциплинах. На практике в основном применяются численные методы решения нелинейных уравнений. Некоторые из них рассмотрены в данной главе.

5.1. Постановка задачи

Нахождение корней уравнения является одной из древнейших математических проблем. В общем случае задача нахождения корней выглядит так: имеется некоторая функция $F(x)$, необходимо найти такие значения аргумента x , при которых выполняется равенство

$$F(x) = 0. \quad (5.1)$$

Графически это означает, что необходимо определить все точки пересечения графика функции $F(x)$ с осью абсцисс.

Функция $F(x)$ может быть алгебраической или трансцендентной. Мы будем предполагать, что она дифференцируема.

Алгебраическую функцию посредством преобразований можно привести к каноническому виду

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Тогда можно сделать вывод о количестве корней соответствующего уравнения. Как известно, многочлен степени n имеет не более n корней (действительных или комплексных).

Если функция $F(x)$ является трансцендентной, то соответствующее ей трансцендентное уравнение может иметь также бесконечное количество решений. В некоторые случаях решение таких уравнений возможно свести к решению алгебраических уравнений.

Поиск приближенного корня обычно осуществляется в два этапа:

- отыскание приближенного значения корня (*начального приближения*);

- уточнение приближенного значения до некоторой заданной степени точности.

На первом этапе приближенное значение корня можно найти либо из физических соображений, либо с помощью графических методов или воспользоваться специальными методами нахождения приближенного корня. Если корней несколько, то каждый корень будет иметь свое начальное приближение.

Второй этап заключается в применении какого-либо итерационного метода для уточнения с заданной точностью найденного на первом этапе корня. Соответственно, для каждого начального приближения следует выполнить процедуру уточнения.

От выбора начального приближения будет зависеть количество итераций, необходимых для получения решения. Чем ближе оно будет расположено к искомому корню, тем меньше итераций потребуются.

5.2. Методы нахождения корней нелинейных уравнений

Все методы решения нелинейных уравнений можно разделить на два больших класса: прямые и итерационные.

Прямые методы позволяют получить аналитическую формулу для определения корня. Например, нахождение корней квадратного уравнения через дискриминант по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

относят к аналитическому решению.

Если выполнять вычисления без процедуры округления, то решение будет являться точным. Однако на практике, даже имея такую формулу, очень трудно получить точное значение корня, поскольку в ЭВМ можно хранить и оперировать только числами конечной разрядности.

Итерационные методы позволяют решать уравнения с заданной степенью точности.

Определение. Итерационный метод называют *одношаговым*, если для получения очередного приближения x_{k+1} требуется только одно предыдущее приближение x_k .

Определение. Если для вычисления x_{k+1} требуется m предыдущих значений $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m+1}$, то такой метод называют *m-шаговым*. Заметим, что начать решение многошаговым методом нельзя, по-

сколько потребуется m начальных приближений. Рассмотрим итерационные методы отыскания корней нелинейных уравнений.

5.2.1. Локализация корней

Для отделения корней полезно применить следующую теорему. Если непрерывная функция $F(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. $F(\alpha) \cdot F(\beta) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по крайней мере один корень уравнения $F(x) = 0$, т.е. найдется хотя бы одно число $\xi \in (\alpha, \beta)$ такое, что $F(\xi) = 0$ (рис. 5.1).

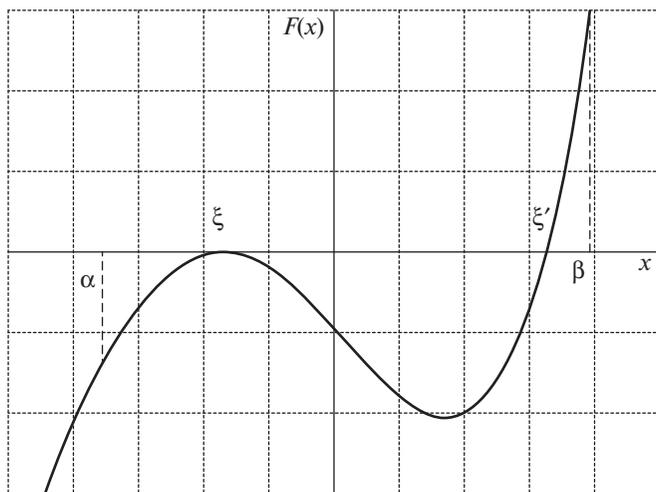


Рис. 5.1. Процесс отделения корней

Кроме того, если на данном интервале существует производная $F'(x)$ и сохраняет знак на нем, то корень ξ будет единственным. Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $F(x)$ в граничных точках $x = a$, $x = b$ в границах области ее существования.

Далее определяются знаки функции в промежуточных точках $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$, выбор которых учитывает особенности функции $F(x)$. Если окажется, что $F(\alpha_k) \cdot F(\alpha_{k+1}) < 0$, то на интервале (α_k, α_{k+1}) имеется корень уравнения (5.1). Нужно любым способом убедиться, является ли этот корень единственным.

Перед началом табулирования следует определить диапазон (диапазоны) изменения переменной x . Это делается из анализа функции $y = F(x)$, исследования на точки разрыва, поведения производной или из интуитивных соображений. Далее выбирается шаг табулиро-

вания. Следует при этом учитывать, что слишком мелкий шаг приведет к большому количеству данных, обработка которых может оказаться затруднительной. Слишком крупный шаг может привести к потере корней. Далее для каждого значения из диапазона табулирования переменной x вычисляется значение функции $y = F(x)$ там, где функция меняет знак, и находятся корни уравнения.

Пример. Локализуем корни уравнения

$$F(x) = 4(1 - x^2) - e^x = 0.$$

Решение. Способ графический. Построив график данного уравнения, увидим, что он пересекает ось абсцисс в двух точках $-a_1$ и a_2 , т.е. уравнение имеет два корня (рис. 5.2). Таким образом, корень a_1 принадлежит отрезку $[-1; -0,5]$, а корень a_2 принадлежит отрезку $[0,5; 1]$. В качестве начальных приближений можно выбрать середины полученных отрезков.

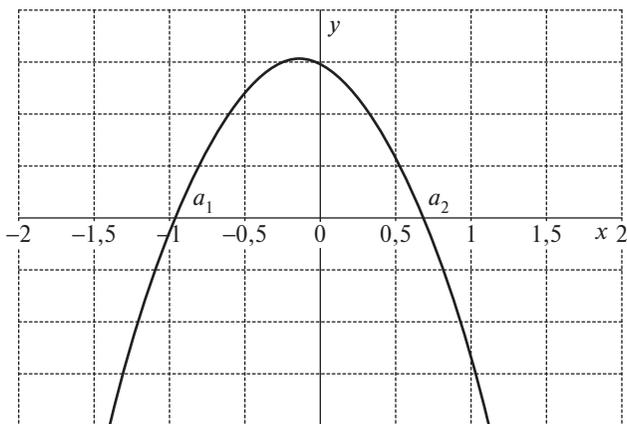


Рис. 5.2. Графический способ локализации корней

-1,4	-4,087	0	3,000	1,4	-7,895
-1,2	-2,061	0,2	2,619	1,6	-11,193
-1	-0,368	0,4	1,868	1,8	-15,010
-0,8	0,991	0,6	0,738	2	-19,389

Найдем отрезки, на которых функция меняет знак. Из таблицы видно, что это отрезки $[-1; -0,8]$ и $[0,6; 0,8]$. За приближенные значения следует взять середины полученных отрезков.

Как графический, так и метод табулирования функции обладают следующим недостатком: если неправильно определить диапазон и шаг изменения переменной x , то можно потерять корни уравнения.

5.2.2. Метод половинного деления

На практике полезен *метод половинного деления*. Определим корень a уравнения (5.1) с заданной точностью ϵ . Будем считать, что он локализован на отрезке $[\alpha_0; \beta_0]$, функция $F(x)$ непрерывна внутри этого отрезка и на его концах принимает значения разных знаков, т.е. $F(\alpha_0) \cdot F(\beta_0) < 0$ (рис. 5.3).

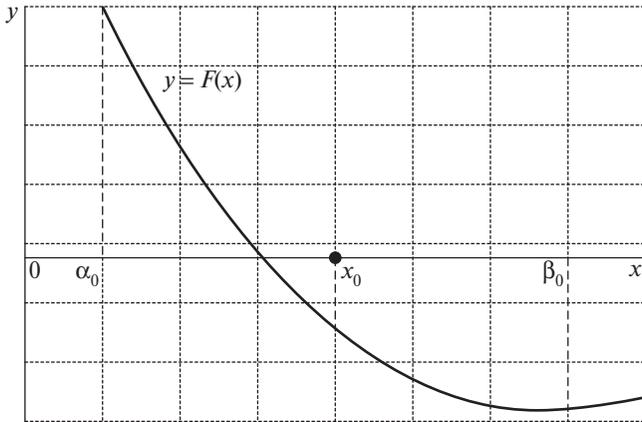


Рис. 5.3. Иллюстрация к методу половинного деления

Примем за приближенное значение x_0 середину отрезка $[\alpha_0; \beta_0]$:

$$x_0 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}.$$

Так как положение корня a внутри отрезка локализации неизвестно, то можно считать, что погрешность этого приближения не превышает половины длины отрезка локализации:

$$|x_0 - a| \leq \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2}.$$

Уменьшить погрешность приближения можно, уточняя отрезок локализации. Согласно методу половинного деления в качестве отрезка $[\alpha_1; \beta_1]$ берут тот из отрезков $[\alpha_0; x_0]$ и $[x_0; \beta_0]$, на концах которого выполняется условие $F(\alpha_1) \cdot F(\beta_1) \leq 0$. Этот отрезок содержит искомый корень.

Если $F(\alpha_1) \cdot F(\beta_1) < 0$, то согласно рассмотренной выше теореме внутри отрезка $[\alpha_1; \beta_1]$ имеется корень. Если $F(\alpha_1) \cdot F(\beta_1) = 0$, то корнем является один из концов отрезка $[\alpha_1; \beta_1]$.

Первое приближение определяется формулой

$$x_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}.$$

За очередное уточнение отрезка локализации $[\alpha_2; \beta_2]$ берут тот из отрезков $[\alpha_1; x_1]$ и $[x_1; \beta_1]$, на концах которого выполняется условие $F(\alpha_2) \cdot F(\beta_2) \leq 0$.

Для $(k + 1)$ -й итерации процесса половинного деления можно записать алгоритм. Пусть отрезок $[\alpha_k; \beta_k]$ уже найден и вычислены значения $x_k, F(\alpha_k), F(\beta_k)$.

1. Вычислить $F(x_k)$.
2. Если $F(\alpha_k) \cdot F(x_k) \leq 0$, то в качестве отрезка локализации $[\alpha_{k+1}; \beta_{k+1}]$ берем отрезок $[\alpha_k; x_k]$.
3. Если $F(\beta_k) \cdot F(x_k) \leq 0$, то в качестве отрезка локализации $[\alpha_{k+1}; \beta_{k+1}]$ берем отрезок $[x_k; \beta_k]$.
4. Вычислить $(k + 1)$ -е приближение:

$$x_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}}{2}.$$

В качестве критерия окончания итерационного процесса можно взять следующее неравенство:

$$\beta_k - \alpha_k \leq 2\varepsilon,$$

где ε — заданная погрешность вычислений.

Пример. С точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ методом половинного деления уточнить значение локализованного на отрезке $[0,5; 1]$ корня скалярного уравнения

$$F(x) = 4(1 - x^2) - e^x = 0.$$

Решение. Положим $\alpha_0 = 0,5, \beta_0 = 1, x_0 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$. Тогда $F(x_0) = -0,3670, F(\alpha_0) = 1,3513, F(\beta_0) = -2,7183$, т.е. за следующий отрезок локализации принимаем отрезок $[0,5; 0,75]$. Все итерации приведены в таблице.

k	α_k	β_k	$F(\alpha_k)$	$F(\beta_k)$	x_k	$F(x_k)$	$\beta_k - \alpha_k$
0	0,5	1	+	-	0,75	-0,3670	0,5000
1	0,5	0,75	+	-	0,625	0,5693	0,2500
2	0,625	0,75	+	-	0,6875	0,1206	0,1250
3	0,6875	0,75	+	-	0,7187	-0,1182	0,0625
4	0,6875	0,7187	+	-	0,7031	0,0222	0,0312
5	0,7031	0,7187	+	-	0,7109		0,0156

За пять итераций заданная точность была достигнута.

5.2.3. Метод сканирования

Данный метод предусматривает разбиение всего отрезка $[a, b]$, на котором локализован один корень, на отрезки, длина которых равна заданной погрешности ϵ (рис. 5.4). Затем производят вычисление значений функции $F(x)$ в полученных точках $x_k = a + k\epsilon$, $k = 0, 1, \dots, n$. Затем выбирают тот отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, внутри которого функция меняет знак ($F(x_{k-1}) \cdot F(x_k) < 0$). За корень уравнения принимают середину полученного отрезка:

$$x^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

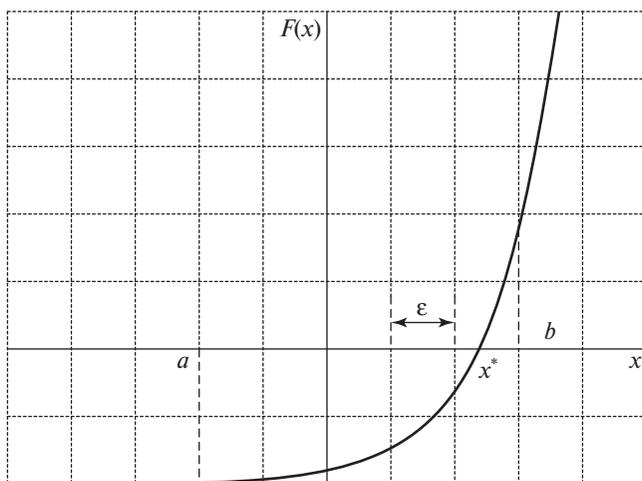


Рис. 5.4. Иллюстрация метода сканирования

5.2.4. Метод последовательных приближений

Перепишем уравнение (5.1) в виде

$$x = f(x), \quad (5.2)$$

прибавив, например, к обеим частям переменную x . Примем за начальное приближение значение x_0 . Тогда первое приближение будет равно

$$x_1 = f(x_0).$$

Второе приближение

$$x_2 = f(x_1),$$

n -е приближение выразится формулой

$$x_k = f(x_{k-1}).$$

Основной вопрос, который необходимо выяснить при использовании данного метода, — сходится ли последовательность x_k к решению уравнения (5.1) при возрастании k . Существуют *достаточные* условия сходимости метода: при их выполнении последовательные значения сойдутся к точному решению. Данные условия не являются *необходимыми*, т.е. существуют функции, для которых они не выполняются, но, тем не менее, итерационный процесс сходится.

Рассмотрим геометрическое представление процесса. При отыскании решения уравнения (5.2) на графике отыскивается точка пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = f(x)$. Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$, производная которой удовлетворяет условию $0 < f'(x) < 1$.

Абсциссу точки их пересечения обозначим a . Зададим начальное приближение x_0 . Первое приближение будет равно $x_1 = f(x_0)$.

Графически найти x можно, проведя горизонтальную прямую через точку A до пересечения с прямой $y = x$ в точке B . Для нахождения $x_2 = f(x_1)$ необходимо провести вертикальную прямую через точку B до пересечения с кривой $y = f(x)$. Проводя через точку C горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$, получаем x_2 . Из рис. 5.5 видно, что последовательность x_1, x_2, \dots, x_k сходится к $x = a$.

Рассмотрим теперь другую кривую, производная которой удовлетворяет условию $-1 < f'(x) < 0$.

График такой кривой показан на рис. 5.6. Из рисунка видно, что итерационный процесс сходится к решению $x = a$. Заметим, что при каждой итерации новое приближение оказывается с противоположной стороны от корня a .

Рассмотрим случаи, когда производная функции больше 1 и меньше -1 , т.е.

$$1 < f'(x) \text{ и } f'(x) < -1.$$

В обоих случаях метод расходится, что видно из рис. 5.7.

Метод последовательных приближений сходится, если производная $f'(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f'(x)| < 1.$$

Докажем это с помощью простых выкладок. Заметим, что

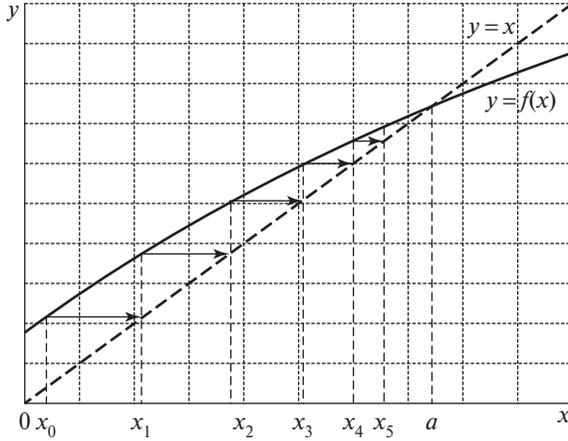


Рис. 5.5. Процесс сходимости для функции, производная которой удовлетворяет условию $0 < f'(x) < 1$

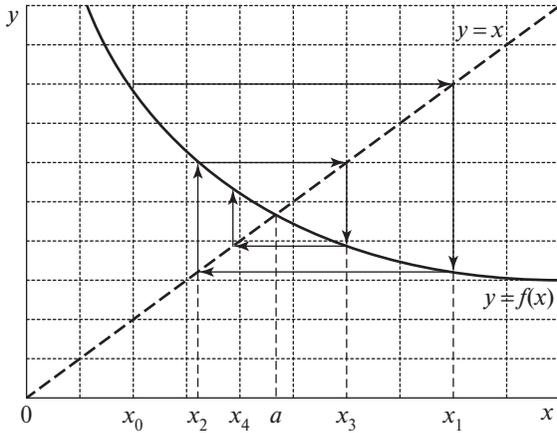


Рис. 5.6. Процесс сходимости для функции, производная которой удовлетворяет условию $-1 < f'(x) < 0$

$$a = f(a), x_k = f(x_{k-1}).$$

Найдем разность:

$$x_k - a = f(x_{k-1}) - f(a).$$

Умножим правую часть на $\frac{x_{k-1} - a}{x_{k-1} - a}$. Используя теорему о среднем, получим

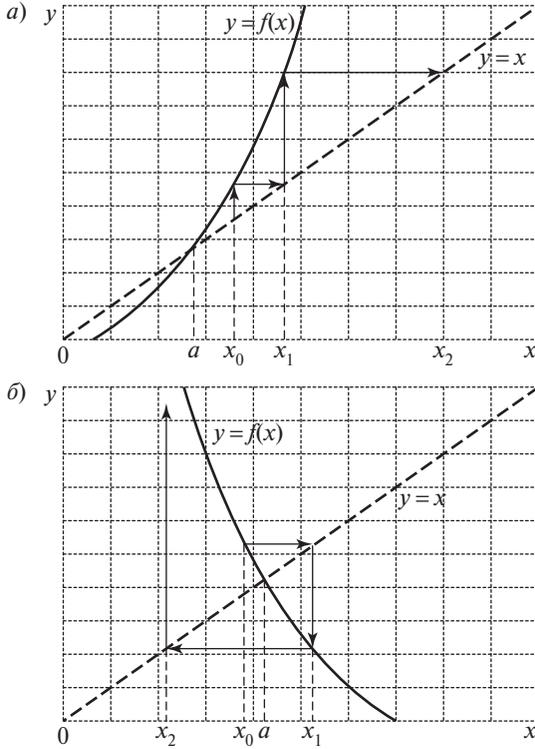


Рис. 5.7. Процессы сходимости для функций, производные которых удовлетворяет условию:

$$a - 1 < f'(x); \quad b - f'(x) < -1$$

$$x_k - a = f'(\xi)(x_{k-1} - a),$$

где ξ находится между x_{k-1} и a . Теорема о среднем утверждает, что если производная функции $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале (a, b) , то справедливо равенство

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

где α — угол наклона хорды, проведенной между a и b .

Пусть m — максимальное значение $f'(x)$ на всем рассматриваемом интервале. Тогда

$$\begin{aligned} |x_k - a| &\leq m|x_{k-1} - a|, \\ |x_{k-1} - a| &\leq m|x_{k-2} - a|, \end{aligned}$$

$$|x_k - a| \leq m^2|x_{k-2} - a|,$$

$$|x_k - a| \leq m^k|x_0 - a|.$$

Очевидно, что если на всем интервале $m < 1$, то независимо от выбора начального значения x_0 с возрастанием k правая часть неравенства становится малой и x_k сходится к a .

Таким образом, если $|f'(x)| < 1$, то итерационный процесс сходится, а если $|f'(x)| > 1$, то процесс расходится. Данные неравенства должны выполняться для всех значений x_n , вычисляемых в ходе решения задачи. В случае когда в некоторых точках $|f'(x)| < 1$, а в некоторых $|f'(x)| > 1$, однозначно ответить на вопрос сходимости нельзя: процесс иногда сходится, а иногда расходится.

В качестве критерия окончания итерационного процесса на практике обычно используется неравенство

$$|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-m}{m}\varepsilon,$$

где $m \in [0; 1)$ — некоторая постоянная величина.

Также может быть использована величина

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

Пример. Найдем положительный корень уравнения

$$F(x) = 4(1 - x^2) - e^x = 0$$

с точностью $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$.

Решение. Преобразуем это уравнение к виду, удобному для итераций:

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{e^x}{4}}.$$

Положительный корень лежит на отрезке $[0; 1]$. В качестве величины m выберем $m = \max_{[0;1]}|f'(x)| \approx 0,600$. Условие сходимости выполняется. Зададим начальное приближение $x_0 = 0,7$ и занесем результаты вычислений в таблицу.

k	x_k	$\frac{m}{1-m} x_k - x_{k-1} $
0	0,7000000000	
1	0,7046714292	$7 \cdot 10^{-3}$
2	0,7029968319	$3 \cdot 10^{-3}$

k	x_k	$\frac{m}{1-m} x_k - x_{k-1} $
3	0,7035984939	$9 \cdot 10^{-4}$
4	0,7033824994	$3 \cdot 10^{-4}$
5	0,7034600632	$1 \cdot 10^{-4}$

5.2.5. Усовершенствованный метод последовательных приближений

Данный метод позволяет добиться более быстрой сходимости благодаря внесению на каждом шаге итерации большей поправки к очередному значению x_n . Для расчета значения x_{k+1} воспользуемся формулой

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \Delta x,$$

где $\Delta x = f(x_k) - x_k$.

На рис. 5.8 показана эта идея.

Пусть производная функции $0 < f'(x) < 1$. Наилучшим выбором α является тот, когда $x_{k+1} = a$. Определим наилучшее значение α .

Расстояние между x_{k+1} и a равно $(\alpha - 1)\Delta x$. Так как прямая $y = x$ составляет с осью Ox угол 45° , то расстояние между $f(a)$ и $f(x_k)$ также равно $(\alpha - 1)\Delta x$. Поэтому тангенс угла θ равен.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(\alpha - 1)\Delta x}{\alpha \Delta x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

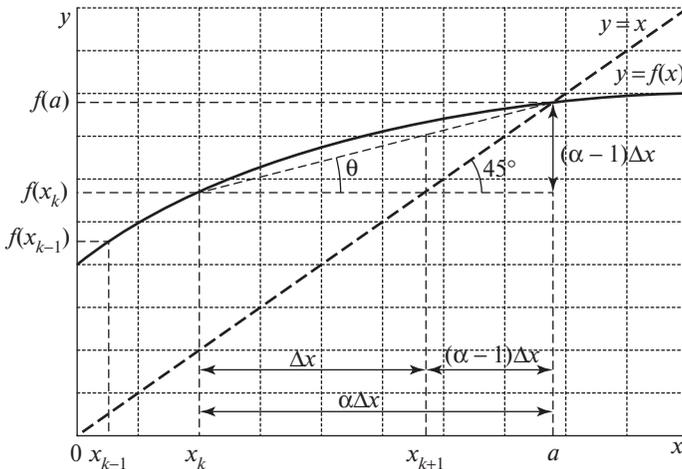


Рис. 5.8. Графическая иллюстрация усовершенствованного метода последовательных приближений

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{f(a) - f(x_k)}{a - x_k}.$$

По теореме о среднем $\operatorname{tg} \theta = f'(\xi)$, где $x_k \leq \xi \leq a$. Тогда

$$\alpha = \frac{1}{1 - f'(\xi)}. \quad (5.4)$$

Значение $f'(\xi)$ остается неизвестным, и поэтому для его вычисления можно принять приближение

$$f'(\xi) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{f(x_k) - x_k}{x_k - x_{k-1}}. \quad (5.5)$$

Геометрически процесс отыскания следующего приближения сводится к тому, что строится хорда между точками $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ и определяется точка ее пересечения с прямой $y = x$.

Формула итерационного процесса имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(f(x_k) - x_k), \quad (5.6)$$

где α рассчитывается на каждом шаге по формулам (5.4) и (5.5).

Заметим, что в формуле (5.6) присутствуют индексы $(k + 1)$, n и $(k - 1)$. То есть для выполнения первого шага итерации данным методом недостаточно информации. Взяв за начальное приближение x_0 , для вычисления x_1 нам потребуется еще одно значение, предшествующее значению x_0 (x_{k-1} в формуле (5.5)). В этом случае первая итерация выполняется методом последовательных приближений, а все последующие итерации — усовершенствованным методом последовательных приближений.

5.2.6. Метод Ньютона—Рафсона

Выберем для простоты вычислений $\xi = x_k$. Тогда выражение (5.4) приобретает вид

$$\alpha = \frac{1}{1 - f'(x_k)}.$$

Итерационная формула процесса имеет вид

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k) - x_k f'(x_k)}{1 - f'(x_k)}.$$

Итерационный процесс Ньютона—Рафсона сходится, если выполнены следующие условия:

- x_0 выбрано достаточно близко к корню уравнения;
- производная $f''(x)$ не становится слишком большой;
- производная $f'(x)$ не слишком близка к единице.

Итерационную формулу Ньютона—Рафсона записывают обычно в виде

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \quad F(x) = f(x) - x = 0. \quad (5.7)$$

Рассмотрим геометрическое толкование метода. Мы выбрали точку $\xi = x_k$, что соответствует равенству угла θ углу наклона касательной к $y = f(x)$ в точке $x = x_k$. Нахождение следующего приближения сводится к тому, что строится касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_k$ и отыскивается точка ее пересечения с прямой $y = x$. Эта точка и будет являться новым приближением x_{k+1} . Для отыскания $f(x_{k+1})$ проводится вертикальная линия. Далее проводится новая касательная, точка пересечения которой с прямой $y = x$ даст новое приближение x_{k+2} . Геометрически данный метод показан на рис. 5.9.

В качестве критерия окончания итерационного процесса на практике обычно используется неравенство $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, где ε — заданная точность.

Пример. Требуется определить положительный корень скалярного уравнения

$$4(1 - x^2) - e^x = 0$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Решение. В результате процедуры локализации корней данного уравнения выявлено, что положительный корень лежит внутри отрезка $[0; 1]$. Для функции $F(x) = 4(1 - x^2) - e^x$ производная $F'(x) = -8x - e^x$. Тогда согласно формуле (5.5) получим

$$x_{k+1} = x_k + \frac{4(1 - x_k^2) - e^{x_k}}{8x_k + e^{x_k}}.$$

Зададим начальное приближение $x_0 = 0,5$ и результаты итераций поместим в таблицу.

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	0,5000000000	
1	0,7392185177	$2,4 \cdot 10^{-1}$
2	0,7042444088	$3,5 \cdot 10^{-2}$
3	0,7034399951	$8,0 \cdot 10^{-4}$
4	0,7034395712	$4,3 \cdot 10^{-7}$

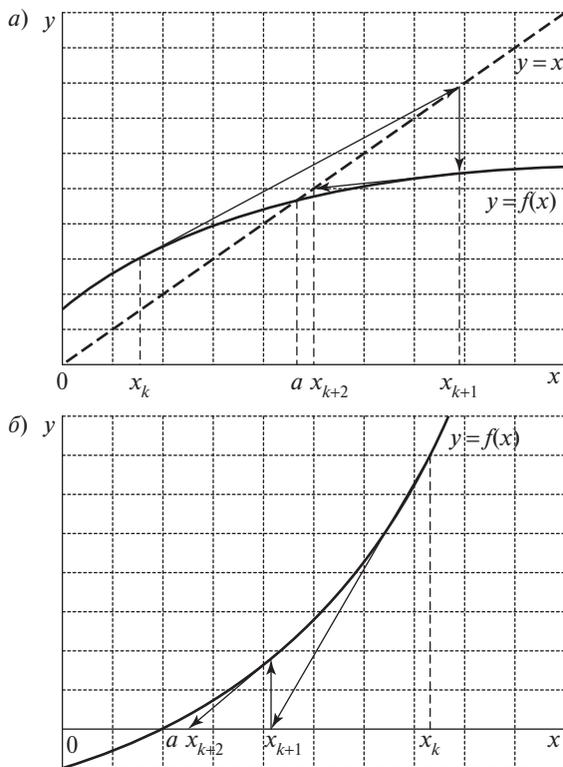


Рис. 5.9. Графическая иллюстрация метода Ньютона—Рафсона:
 a — для уравнения $x = f(x)$; b — для уравнения $F(x) = 0$

Как видно из таблицы, за четыре итерации заданная точность была достигнута.

5.2.7. Случай почти равных корней

При использовании метода Ньютона—Рафсона могут возникнуть трудности, если корни расположены очень близко друг к другу. В этом случае производная $f'(x)$ становится близка к единице для x , близких к значениям корней. На рис. 5.10 показан такой случай. На основании теоремы о среднем можно утверждать, что производная $f'(x)$ равна единице на промежутке (a_1, a_2) .

Примем за начальное приближение корня a_1 значение x_0 . Касательная, проведенная через точку C , пересечет прямую $y = x$ в точке A , и следующее приближение будет равно x_1 . Касательная, проведенная через точку B , пересечет прямую $y = x$ в точке D , и в ка-

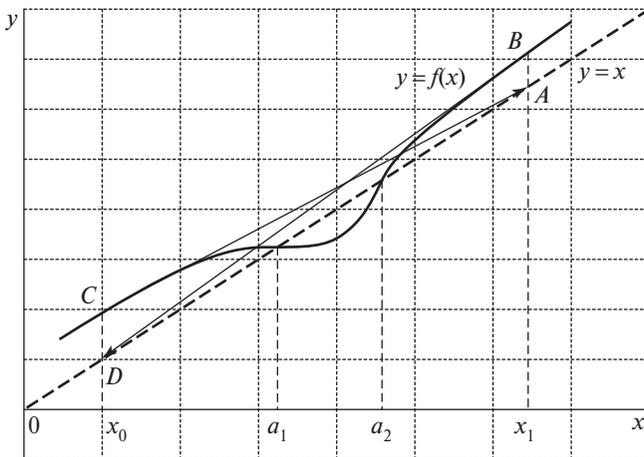


Рис. 5.10. Иллюстрация заклинивания метода Ньютона—Рафсона

честве нового приближения вновь получится x_0 . Итерационный процесс заклинился между двумя точками x_0 и x_1 . Ни к одному значению корня он не сойдется. Отделение корней станет возможным, если начальное приближение взять как можно ближе к какому-либо корню.

5.2.8. Упрощения метода Ньютона—Рафсона

Сложность применения формулы (5.7) заключается в необходимости вычисления производной на каждой итерации. Существуют различные упрощения метода Ньютона—Рафсона, позволяющие получить решение за меньшее количество шагов. Рассмотрим некоторые из них.

Упрощенный метод Ньютона. Самым простым способом является замена шагового множителя $\frac{1}{F'(x_n)}$ на множитель $\frac{1}{F'(x_0)}$, т.е. производная вычисляется один раз в начальной точке x_0 . Формула для расчета приобретает вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_0)}. \quad (5.8)$$

Геометрическая интерпретация данного метода показана на рис. 5.11.

В начальной точке x_0 строится касательная к графику функции $F(x)$. На последующих шагах (в последующих точках x_1, x_2, \dots) про-

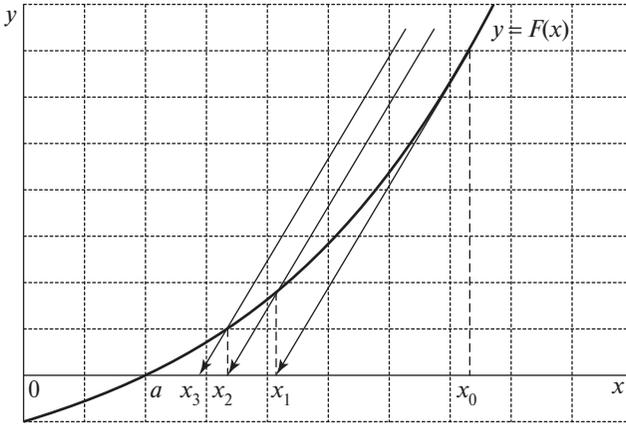


Рис. 5.11. Иллюстрация упрощенного метода Ньютона—Рафсона

водятся прямые, параллельные касательной в начальной точке. При таком упрощении скорость сходимости существенно снижается по сравнению с обычным методом.

Разностный метод Ньютона. Заменяем производную в знаменателе формулы (5.7) ее конечно-разностным аналогом. Согласно определению производная функции $F(x)$ в точке x_k определяется выражением

$$F'(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_k + \Delta x) - F(x_k)}{\Delta x}.$$

При малых значениях Δx выражение для производной можно записать в виде

$$F'(x_k) \approx \frac{F(x_k + h) - F(x_k)}{h},$$

$$h = \Delta x.$$

Окончательно формула для конечно-разностного метода Ньютона—Рафсона будет иметь вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k) \cdot h}{F(x_k + h) - F(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.9)$$

В общем случае величину шага h в (5.9) можно задавать на каждой итерации, т.е. принять h как функцию номера итерации k :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k) \cdot h_k}{F(x_k + h) - F(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.10)$$

Итерационный процесс, определяемый формулами (5.9), (5.10), называют *разностным методом* Ньютона—Рафсона.

Метод Стеффенсена. Выбор величины h в (5.10) для каждой итерации должен осуществляться так, чтобы с ростом k величина $|h|$ убывала. При этом чем ближе x_k к корню, тем точнее производная $F'(x_k)$ будет аппроксимироваться конечно-разностным отношением:

$$F'(x_k) \approx \frac{F(x_k + h) - F(x_k)}{h}.$$

Можно задать h_0 , а затем вычислять последующие значения согласно формуле

$$h_{k+1} = \delta h_k, \delta \in (0; 1).$$

Например, возможна такая последовательность: $h_0 = 0,1; h_1 = 0,01; h_2 = 0,001 \dots$

Когда значения $|F(x_k)|$ достаточно малы, можно положить $h_k = F(x_k)$ и формула (5.9) примет вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(F(x_k))^2}{F(x_k + F(x_k)) - F(x_k)}, k = 0, 1, \dots \quad (5.11)$$

Выражение (5.11) называют *методом Стеффенсена*. Его сходимость носит локальный характер.

Метод секущих. Рассмотренные выше модификации метода Ньютона—Рафсона являются одношаговыми и требуют два вычисления функции на каждой итерации. Однако можно построить такую модификацию метода, в которой на каждом шаге функция вычислялась бы только один раз.

Запишем величину шага для итерации с номером k как разность предыдущего и текущего значений переменной x :

$$h_k = x_{k-1} - x_k.$$

Тогда выражение (5.10) примет вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k) \cdot (x_{k-1} - x_k)}{F(x_{k-1}) - F(x_k)}, k = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Формула (5.12) определяет двухшаговый метод, поскольку для вычисления последующего значения x_{k+1} необходимо знать два предыдущих — x_{k-1} и x_k . Каждая итерация требует только одного вычисления функции $F(x_k)$, а значение $F(x_{k-1})$ берется из предыдущей итерации.

Геометрический смысл полученной формулы заключается в том, что координата x_{k+1} есть абсцисса точки пересечения прямой, проведенной через точки $(x_{k-1}; F(x_{k-1}))$ и $(x_k; F(x_k))$, с осью Ox , т.е. секущей (рис. 5.12). Данный метод называется *методом секущих*.

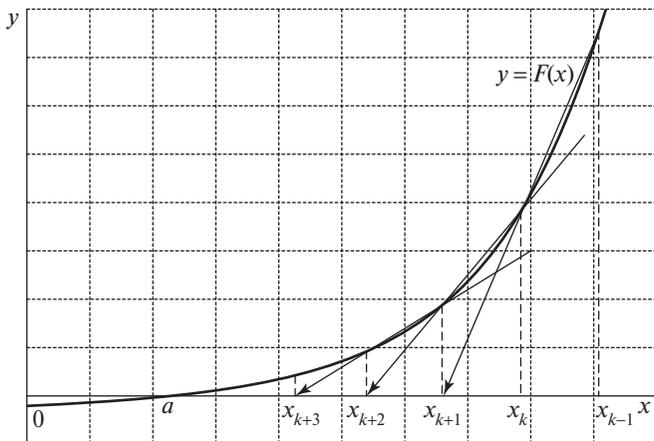


Рис. 5.12. Иллюстрация метода секущих

5.2.9. Гибридный метод Ньютона и половинного деления

Рассмотренные выше методы либо обладают высокой скоростью сходимости и имеют локальный характер сходимости, либо при глобальном характере сходимости обладают невысокой скоростью сходимости. Разработаны *гибридные* методы решения нелинейных уравнений на базе двух или более методов, объединяя глобальную сходимость с высокой ее скоростью.

Принципы комбинирования методов различны. Например, можно начать решение глобальным методом, а по мере приближения к корню подключить быстросходящийся локальный метод. Возможен и другой вариант: начать решение локальным методом, а получающиеся значения периодически корректировать глобальным.

Рассмотрим алгоритм простейшего варианта гибридного метода — *метод Ньютона и половинного деления*:

- 1) задать начальное приближение x_0 , $k = 0$;
- 2) вычислить приближение $\tilde{x}_k = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$;
- 3) если $|F(\tilde{x}_k)| < |F(x_k)|$, то $x_{k+1} = \tilde{x}_k$;
- 4) если $|F(\tilde{x}_k)| \geq |F(x_k)|$, то $\tilde{x}_k = \frac{1}{2}(x_k + \tilde{x}_k)$ и переход на шаг 3;

5) если достигнута заданная погрешность, то $\xi = x_{k+1}$, иначе переход на шаг 2 с инкрементированием k ($k = k + 1$).

Согласно приведенному алгоритму метод Ньютона—Рафсона определяет правильное направление, а метод дихотомии корректирует его.

На рис. 5.13 показан первый шаг рассматриваемого метода.

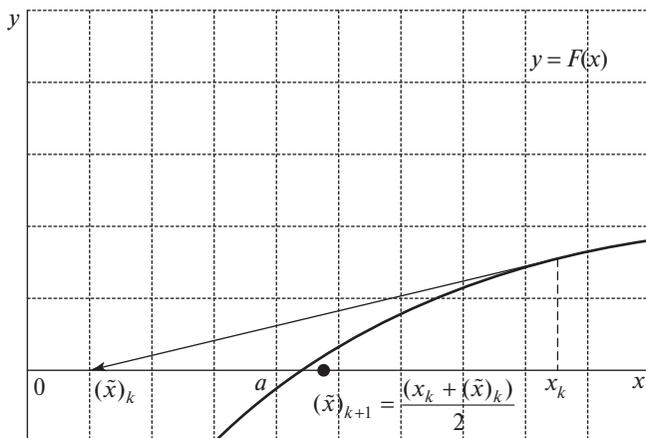


Рис. 5.13. Иллюстрация гибридного метода Ньютона и половинного деления

Положение точки x_k определяется методом Ньютона—Рафсона. Затем согласно методу дихотомии отрезок $[\tilde{x}_k; x_k]$ делится пополам, что определяет положение точки \tilde{x}_{k+1} . Данный метод возможно применять в условиях неопределенности знаков производных. Важную роль играет сопряжение задаваемой погрешности вычислений с погрешностью метода и точностью выполнения арифметических операций в ЭВМ.

5.3. Преобразование уравнения к виду, удобному для итераций

Преобразовать уравнение (5.1) к итерационному виду можно следующим образом:

$$x = x - mF(x),$$

где m — отличная от нуля константа.

Тогда получим

$$f(x) = x - mF(x).$$

Продифференцируем функцию $f(x)$:

$$f'(x) = 1 - mF'(x).$$

Константу m подбираем таким образом, чтобы для любых $x \in (a, b)$ выполнялось условие

$$|1 - mF'(x)| \leq 1. \quad (5.13)$$

Выполнение условия (5.13) удобно проверять графически, построив график функции $y(x) = |1 - mF'(x)|$. Изменяя величину константы m , следует добиваться, чтобы кривая была ограничена прямой $y = -1$ снизу и прямой $y = 1$ сверху.

5.4. Типы сходимостей итерационных последовательностей

Для оценки скорости сходимости того или иного метода решения нелинейного уравнения полезно рассмотреть типы сходимостей итерационных последовательностей.

Как известно, любой итерационный метод требует задания некоторой отправной точки, т.е. начального приближения. В случае СЛАУ в качестве начального приближения используется начальный вектор $\mathbf{x}^{(0)}$, а для скалярных нелинейных уравнений — это некоторое скалярное значение x_0 . От выбора начального приближения зависит количество итераций, требуемых для получения решения.

В общем случае *итерационный процесс* порождает множество *итерационных последовательностей*, отличающихся начальными значениями x_0 . И не каждая итерационная последовательность будет сходиться в рамках этого итерационного процесса.

Определение. Итерационный процесс, порождающий сходящиеся итерационные последовательности при любом x_0 , называют *глобально сходящимся*.

Определение. Итерационный процесс, порождающий сходящиеся итерационные последовательности только при некоторых значениях x_0 , взятых из достаточно малой окрестности точки x^* , называют *локально сходящимся*.

Обозначим через $\{x_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ последовательность, которая генерируется в результате некоторого итерационного процесса и имеет своим пределом величину x^* .

Определение. Последовательность $\{x_k\}$ называется *линейно сходящейся* к x^* , если существует постоянная $C \in (0; 1)$ и такой номер k_0 , начиная с которого выполняется неравенство

$$|x^* - x_{k+1}| \leq C|x^* - x_k|, \forall k \geq k_0.$$

Определение. Последовательность $\{x_k\}$ называется *сверхлинейно сходящейся* к x^* , если существует такая положительная последовательность $\{C_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$ и

$$|x^* - x_{k+1}| \leq C_k|x^* - x_k|, \forall k \geq k_0.$$

Определение. Последовательность сходится по меньшей мере с p -м порядком, если найдутся такие постоянные $C > 0$ и $p \geq 1$, что

$$|x^* - x_{k+1}| \leq C|x^* - x_k|^p, \forall k \geq k_0.$$

Если $p = 1$, то имеет место *линейно сходящаяся* последовательность; $p = 2$ — *квадратично сходящаяся* последовательность; $p = 3$ — *кубическая сходимост*.

Существуют и другие подходы к определению типа сходимости итерационных последовательностей.

Контрольные вопросы

1. Что называют нелинейным скалярным уравнением?
2. Поясните процедуру локализации корней. Для чего она нужна?
3. Расскажите про метод последовательных приближений.
4. В чем отличие усовершенствованного метода последовательных приближений от метода из вопроса № 3?
5. Поясните смысл метода Ньютона—Рафсона.
6. Расскажите об упрощениях метода Ньютона.
7. При каких обстоятельствах может произойти заикливание метода Ньютона—Рафсона?
8. Чем привлекательны гибридные методы решения нелинейных уравнений?
9. В чем отличие итерационного процесса от итерационной последовательности?
10. Какие типы итерационных последовательностей бывают?
11. Назовите критерии сходимости итерационных последовательностей.
12. Укажите условие прекращения итерационного процесса.
13. Опишите общий подход к приведению уравнения к удобному для итераций виду.

Глава 6

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

В этой главе излагаются наиболее широко используемые способы вычисления приближенных значений функции и ее производных в случае, когда известны значения функции в некоторых фиксированных точках. Множество этих точек может быть задано как внешними обстоятельствами, так и выбрано произвольно.

6.1. Постановка задачи интерполирования

Аппроксимация, или приближение, — это замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов.

Аппроксимацией (приближением) функции $f(x)$ называется нахождение такой функции $g(x)$ (аппроксимирующей функции), которая была бы близка заданной. Критерии близости функций $f(x)$ и $g(x)$ могут быть различны.

В том случае, когда приближение строится на дискретном наборе точек, аппроксимацию называют точечной или дискретной. В том случае, когда аппроксимация проводится на непрерывном множестве точек (отрезке), аппроксимация называется непрерывной или интегральной.

Интерполяция — это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

В научных и инженерных расчетах часто приходится оперировать набором значений, полученных экспериментальным путем или методом случайной выборки. Как правило, на основании этих наборов требуется построить функцию, на которую могли бы с высокой точностью попадать другие получаемые значения.

Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через

имеющиеся точки данных. Найдя интерполирующую функцию $g(x)$, можно вычислить значения функции $f(x)$ между узлами (провести интерполяцию в узком смысле слова), а также определить значение функции $f(x)$ за пределами заданного интервала (провести экстраполяцию).

Простейшая задача интерполирования заключается в следующем. На отрезке $[a, b]$ заданы $n + 1$ точки x_0, x_1, \dots, x_n , которые называются узлами интерполяции, и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках:

$$f(x_0) = y_0; f(x_1) = y_1; \dots; f(x_n) = y_n.$$

Требуется построить функцию $F(x)$ (интерполирующая функция), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т.е. такую, что

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (6.1)$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y = F(x)$ некоторого определенного типа, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) (рис. 6.1)

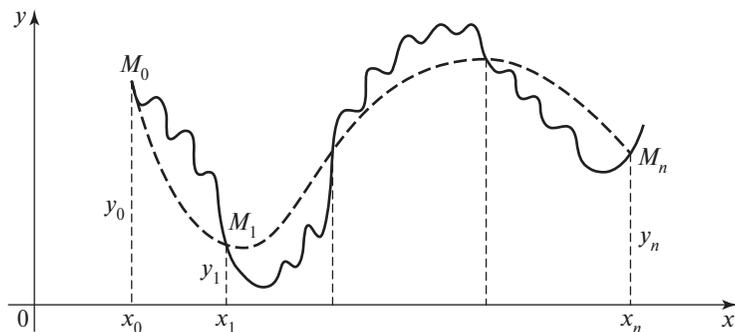


Рис. 6.1. Геометрическая интерпретация задачи интерполирования

В такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений или совсем не иметь решений.

Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям (6.1), т.е. такой, что $P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n$.

Полученную интерполяционную формулу $y = F(x)$ обычно используют для приближенного вычисления значений данной функции $f(x)$ для значений аргумента x , отличных от узлов интерполирования.

ния. Такая операция называется *интерполированием функции* $f(x)$. При этом различают *интерполирование в узком смысле*, когда $x \in [x_0, x_n]$, т.е. значение x является промежуточным между x_0 и x_n , и *экстраполирование*, когда $x \notin [x_0, x_n]$. В дальнейшем под термином «интерполирование» будем понимать как первую, так и вторую операции.

6.2. Конечные разности различных порядков

Пусть $y = f(x)$ — заданная функция. Обозначим через $\Delta x = h$ фиксированную величину приращения аргумента (шаг). Тогда выражение

$$\Delta y \equiv \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (6.2)$$

называется *первой конечной разностью* функции y . Аналогично определяются конечные разности высших порядков:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \text{ при } n = 2, 3, \dots$$

Например,

$$\begin{aligned} \Delta^2 y &= \Delta[f(x + \Delta x) - f(x)] = \\ &= [f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)] - [f(x + \Delta x) - f(x)] = \\ &= f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x). \end{aligned}$$

Справедливо утверждение: если $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ — полином n -й степени, то $\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n = \text{const}$, где $\Delta x = h$.

Следствие. $\Delta^s P_n(x) = 0$ при $s > n$.

Символ Δ (дельта) можно рассматривать как оператор, ставящий в соответствие функции $y = f(x)$ функцию $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (Δx постоянно).

По определению $\Delta^0 y = y$.

Из формулы (6.2) имеем

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x).$$

Отсюда, рассматривая Δ как символический множитель, получим

$$f(x + \Delta x) = (1 + \Delta)f(x).$$

Последовательно применяя это соотношение n раз, будем иметь

$$f(x + n\Delta x) = (1 + \Delta)^n f(x). \quad (6.3)$$

Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, окончательно выводим:

$$f(x + n\Delta x) = \sum_{m=0}^n C_n^m \Delta^m f(x), \quad (6.4)$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m .

Таким образом, с помощью формулы (6.4) последовательные значения функции $f(x)$ выражаются через ее конечные разности различных порядков.

Воспользовавшись тождеством

$$\Delta = (1 + \Delta) - 1 \quad (6.5)$$

и применяя бином Ньютона и формулу (6.3), получаем

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= f(x + n\Delta x) - C_n^1 f(x + (n-1)\Delta x) + \\ &+ C_n^2 f(x + (n-2)\Delta x) - \dots + (-1)^n f(x). \end{aligned}$$

Эта формула дает выражение конечной разности n -го порядка функции $f(x)$ через последовательные значения этой функции.

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на отрезке $[x, x + n\Delta x]$. В этом случае справедлива формула

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + \theta n\Delta x),$$

где $0 < \theta < 1$.

Тогда при малых Δx справедлива приближенная формула

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}.$$

6.3. Таблица разностей

Часто приходится рассматривать функции $y = f(x)$, заданные табличными значениями $y_i = f(x_i)$ для системы равноотстоящих точек x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$.

Используя формулу бинома Ньютона, получим

$$y_{i+n} = y_i + C_n^1 \Delta y_i + C_n^2 \Delta^2 y_i + \dots + \Delta^n y_i.$$

Обратно имеем

$$\begin{aligned} \Delta^n y_i &= [(1 + \Delta) - 1]^n y_i = (1 + \Delta)^n y_i - C_n^1 (1 + \Delta)^{n-1} y_i + \\ &+ C_n^2 (1 + \Delta)^{n-2} y_i - \dots + (-1)^n y_i \end{aligned}$$

или

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \dots + (-1)^n y_i.$$

Например, $\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$, $\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$.

Заметим, что для вычисления n -й разности $\Delta^n y_i$ нужно знать $n + 1$ членов $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+n}$ данной последовательности.

Конечные разности различных порядков удобно располагать в форме таблиц двух видов: горизонтальной таблицы разностей или диагональной таблицы разностей (табл. 6.1, 6.2).

Таблица 6.1

Горизонтальная таблица разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
...
...

Таблица 6.2

Диагональная таблица разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
x_1	y_1	Δy_0		
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$

6.4. Обобщенная степень

Определение. Обобщенной n -степенью числа x называется произведение n сомножителей, первый из которых равен x , а каждый последующий на h меньше предыдущего:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-1)h], \quad (6.6)$$

где h — некоторое фиксированное постоянное число.

Показатель обобщенной степени обычно записывается в квадратных скобках. Полагают $x^{[0]} = 1$.

При $h = 0$ обобщенная степень (6.6) совпадает с обычной, т.е. $x^{[n]} = x^n$.

Конечные разности для обобщенной степени при $\Delta x = h$ имеют следующую общую формулу:

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\dots[n-(k-1)]h^k x^{[n-k]},$$

где $k = 1, 2, \dots, n$.

Очевидно, $\Delta^k x^{[n]} = 0$ при $k > n$.

6.5. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов

6.5.1. Первая интерполяционная формула Ньютона

Узлы интерполяции называются *равноотстоящими*, если

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = \text{const} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Первая интерполяционная формула Ньютона имеет вид

$$y = P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (6.7)$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Заметим, что в формуле используется верхняя горизонтальная строка таблицы разностей.

Остаточный член $R_n(x)$ формулы (6.7) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

При наличии дополнительного узла x_{n+1} на практике пользуются более удобной приближенной формулой

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\dots(q-n). \quad (6.8)$$

Последняя формула полезна, например, в случае эмпирически заданных функций.

Число n желательно выбирать так, чтобы разности $\Delta^n y_i$ были практически постоянными.

Формула (6.7) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x , близких к началу таблицы x_0 .

При $n = 1$ и $n = 2$ из формулы (6.7) получаем частные случаи.

Линейная интерполяция:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

Квадратичная интерполяция:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

6.5.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Вторая интерполяционная формула Ньютона имеет следующий вид:

$$y(x) = P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (6.9)$$

где $q = \frac{x - x_n}{h}$.

В формуле используется нижняя наклонная строка разностей (рис. 6.2).

Остаточный член $R_n(x)$ формулы (6.9) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi), \quad (6.10)$$

где ξ — внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) и точку x .

Формула (6.9) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x , близких к концу таблицы, т.е. к x_n .

Таким образом, первая интерполяционная формула Ньютона обычно используется для *интерполирования вперед* и *экстраполирования назад*, а вторая интерполяционная формула Ньютона, наоборот, — для *интерполирования назад* и *экстраполирования вперед*.

Заметим, что операция экстраполирования, вообще говоря, менее точна, чем операция интерполирования в узком смысле слова.

6.6. Таблица центральных разностей

При построении интерполяционных формул Ньютона используются лишь значения функции, лежащие по одну сторону от выбранного начального значения, т.е. эти формулы носят односторонний характер.

Во многих случаях оказываются полезными интерполяционные формулы, содержащие как последующие, так и предшествующие значения функции по отношению к ее начальному значению. Наиболее употребительными из них являются те, которые содержат разности, расположенные в горизонтальной строке диагональной таблицы разностей данной функции, соответствующей начальным значениям x_0 и y_0 , или в строках, непосредственно примыкающих к ней.

Эти разности Δy_{-1} , Δy_0 , $\Delta^2 y_{-1}$ называются *центральными разностями* (табл. 6.3), где

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad y_i = f(x_i);$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad \text{и т.д.}$$

Соответствующие интерполяционные формулы носят название *интерполяционных формул с центральными разностями*. К числу их относятся формулы Гаусса, Стирлинга и Бесселя.

Таблица 6.3

Диагональная таблица разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
		Δy_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$				
		Δy_3					
x_4	y_4						

6.6.1. Интерполяционные формулы Гаусса

Первая интерполяционная формула Гаусса (для интерполирования вперед) имеет вид

$$\begin{aligned}
 P(x) = & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\
 + & \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \\
 & + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \\
 & + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$, используемые в этой формуле, образуют нижнюю ломаную линию в таблице разностей (см. табл. 6.3).

Вторая интерполяционная формула Гаусса (для интерполирования назад) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 P(x) = & y_0 + q\Delta y_{-1} \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \\
 + & \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\
 & + \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Разности $\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$, используемые в этой формуле, образуют верхнюю ломаную линию в таблице разностей. Остаточный член формул (6.11) и (6.12) может быть записан в виде

$$R_{2n} = \frac{h^{2n+1} f^{2n+1}(\xi)}{(2n+1)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)\dots(q^2 - n^2), \quad (6.13)$$

где ξ — внутренняя точка промежутка, содержащего все узлы x_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) и точку x .

Формулы Гаусса применяются для интерполирования в середине таблицы вблизи x_0 . При этом первая формула Гаусса применяется при $x > x_0$, а вторая — при $x < x_0$.

6.6.2. Интерполяционная формула Стирлинга

Эта формула представляет собой среднее арифметическое первой и второй формул Гаусса:

$$\begin{aligned}
 P(x) = & y_0 + q \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1^2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{5!} \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{6!} \Delta^6 y_{-3} + \dots + \\
 & + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2) \dots (q^2 - (n-1)^2)}{(2n-1)!} \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1^2) \dots (q^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}, \tag{6.14}
 \end{aligned}$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Остаточный член этой формулы имеет тот же вид (6.13).

Формула применяется для интерполирования в середине таблицы при значениях q , близких к нулю. Практически ее используют при $|q| \leq 0,25$.

6.6.3. Интерполяционная формула Бесселя

Эта формула имеет вид

$$\begin{aligned}
 P(x) = & \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\
 & + \frac{(q-0,5)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \\
 & + \frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \\
 & + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!} \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots + \\
 & + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2) \dots (q-n)(q+n-1)}{(2n)!} \times \\
 & \times \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\
 & + \frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2) \dots (q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n},
 \end{aligned}$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Остаточный член можно записать в виде

$$R_n(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2) \dots (q^2 - n^2)(q - n - 1),$$

где ξ лежит между $x_0 - nh$ и $x_0 + nh$.

Формула Бесселя используется для интерполирования в середине таблицы при значениях q , близких к 0,5. Практически она используется при $0,25 \leq q \leq 0,75$. Наиболее простой вид имеет формула при $q = 0,5$, так как все члены, содержащие разности нечетного порядка, пропадают. Этот специальный случай формулы Бесселя называется *формулой интерполирования на середину*. Ее используют для уплотнения таблиц, т.е. для составления таблиц с более мелким шагом. Для остаточного члена при $q = 0,5$ имеем

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1))^2}{2^{2n+2}}.$$

6.7. Общая характеристика интерполяционных формул с постоянным шагом

Давая общую характеристику интерполяционным формулам, отметим следующее: при построении интерполяционных формул Ньютона в качестве начального значения x_0 выбирается первый или последний узел интерполирования; для центральных же формул интерполирования начальный узел является средним.

Более детальное рассмотрение интерполяционных формул показывает, что при $q \leq 0,25$ целесообразно применять формулу Стирлинга, а при $0,25 \leq q \leq 0,75$ — формулу Бесселя. Первую и вторую интерполяционные формулы Ньютона выгодно применять тогда, когда интерполирование производится в начале или, соответственно, в конце таблицы и нужных центральных разностей не хватает.

6.8. Интерполяционная формула Лагранжа. Схема Эйткена

Пусть x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) — произвольные узлы, а $y_i = f(x_i)$ — значения функции $f(x)$. Многочленом степени n , принимающим в точках x_i значения y_i , является интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_i^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Остаточный член равен

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

где ξ есть некоторая точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) и точку x .

Выражения

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

называются *коэффициентами Лагранжа*.

Для вычисления $L_i^{(n)}(x)$ удобно применить следующее расположение разностей, подчеркнув разности, расположенные на главной диагонали:

$$\left. \begin{array}{cccccc} \underline{x-x_0} & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \dots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & \underline{x-x_1} & x_1-x_2 & \dots & x_1-x_n \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & \underline{x-x_2} & \dots & x_2-x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \dots & \underline{x-x_n} \end{array} \right\}.$$

Обозначим произведение элементов i -й строки через D_i , а произведение элементов главной диагонали — через $\Pi_{n+1}(x)$, т.е.

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Тогда

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{D_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Иногда бывает полезным для упрощения вычислений использовать инвариантность коэффициентов Лагранжа относительно линейной подстановки:

$$\text{если } x = at + b, \quad x_j = at_j + b \quad (j = 0, 1, \dots, n), \text{ то } L_i^{(n)}(x) = L_i^{(n)}(t).$$

В случаях равноотстоящих узлов имеются таблицы для лагранжевых коэффициентов и процесс вычисления значительно облегчается.

Если требуется найти не общее выражение $L_n(x)$, а лишь его значения при конкретных x и при этом значения функции даны в достаточно большом количестве узлов, то удобно пользоваться интерполяционной схемой Эйткена. Согласно этой схеме последовательно вычисляются многочлены

$$L_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left| \begin{array}{cc} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{array} \right|,$$

$$L_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2} - x_i} \left| \begin{array}{cc} L_{i,i+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{array} \right|,$$

$$L_{i,i+1,i+2,i+3}(x) = \frac{1}{x_{i+3} - x_i} \left| \begin{array}{cc} L_{i,i+1,i+2}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2,i+3}(x) & x_{i+3} - x \end{array} \right|$$

и т.д.

Интерполяционный многочлен n -й степени, принимающий в точках x_i значения y_i ($i = 0, 1, \dots, n$), запишется следующим образом:

$$L_{01\dots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \left| \begin{array}{cc} L_{01\dots(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{12\dots n}(x) & x_n - x \end{array} \right|.$$

Вычисления по схеме Эйткена удобно расположить в такой таблице (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Интерполяционная схема Эйткена

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$...
x_0	y_0	$x_0 - x$				
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$...
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$...

Вычисления по схеме Эйткена обычно ведут до тех пор, пока последовательные значения $L_{01\dots n}(x)$ и $L_{01\dots(n+1)}(x)$ не совпадут в пределах заданной точности. Схема Эйткена легко реализуется на ЭВМ и обеспечивает возможность автоматического контроля точности вычислений.

6.9. Разделенные разности

Ранее мы рассматривали функции, в которых значения аргумента были равноотстоящие, т.е. имели постоянный шаг. Однако на практике часто встречаются таблицы для неравноотстоящих значений аргумента, т.е. с переменным шагом. Для таблиц с переменным шагом понятие конечных разностей обобщается и вводятся так называемые разделенные разности.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично и $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — значения аргумента, а $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ — соответствующие значения функции, где разности $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0$ ($i = 0, 1, \dots$) не равны между собой.

Отношения

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$, называются *разделенными разностями первого порядка*. Например:

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; [x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ и т.д.}$$

Аналогично определяются *разделенные разности второго порядка*:

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$. Например,

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

и т.д.

Вообще, разделенные разности n -го порядка получаются из разделенных разностей $(n - 1)$ -го порядка с помощью рекуррентного соотношения

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - [x_i, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $i = 0, 1, 2, \dots$

Заметим, что разделенные разности не меняются при перестановке элементов, т.е. представляют собой симметрические функции своих аргументов. Например,

По определению получаем

$$\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = P(x, x_0).$$

Отсюда

$$P(x) = P(x_0) + P(x, x_0)(x - x_0). \quad (6.15)$$

Из определения разделенных разностей следует, что

$$P(x, x_0, \dots, x_m) = \frac{P(x, x_0, \dots, x_{m-1}) - P(x_0, \dots, x_m)}{x - x_m}.$$

Отсюда

$$P(x, x_0, \dots, x_{m-1}) = P(x_0, \dots, x_m) + (x - x_m)P(x, x_0, \dots, x_m), \quad (6.16)$$

где $m = 1, 2, \dots, n$.

Используя формулу (6.16), из формулы (6.15) последовательно выводим

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0) + P(x, x_0)(x - x_0) = \\ &= P(x_0) + P(x_0, x_1)(x - x_0) + (P(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1) = \\ &= P(x_0) + P(x_0, x_1)(x - x_0) + P(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &\quad + P(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) + \\ &\quad + P(x, x_0, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \end{aligned}$$

или, учитывая приведенные ранее равенства, окончательно получаем интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих значений аргумента:

$$P(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (6.17)$$

Погрешность формулы (6.17), как обычно, равна

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n),$$

где ξ — промежуточное значение между точками x_0, x_1, \dots, x_n и x .

6.11. Обратное интерполирование для случая равноотстоящих узлов

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично.

Задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы по заданному значению функции y определить соответствующее значение аргумента x .

Для случая равноотстоящих узлов обычно используется метод последовательных приближений.

Предположим, что функция $f(x)$ монотонна и данное значение y содержится между $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$.

Заменяя функцию y первым интерполяционным полиномом Ньютона, будем иметь

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)\dots(q-n+1).$$

Отсюда $q = \varphi(q)$, где

$$\varphi(q) = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2! \Delta y_0} q(q-1) - \dots - \frac{\Delta^n y_0}{n! \Delta y_0} q(q-1)\dots(q-n+1).$$

За начальное приближение принимаем

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}.$$

Тогда, применяя метод итерации, получим

$$q_m = \varphi(q_{m-1}) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Если $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$, где отрезок $[a, b]$ содержит узлы интерполяции, и шаг h достаточно мал, то этот процесс сходится, т.е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q_m = q,$$

где q — истинное решение.

На практике процесс итерации продолжают до тех пор, пока не установятся цифры, соответствующие требуемой точности, причём полагают $q \approx q_s$, где q_s — последнее приближение.

Найдя q , определяем затем x из формулы

$$\frac{x - x_0}{h} = q.$$

Отсюда $x = x_0 + qh$.

6.12. Обратное интерполирование для случая неравноотстоящих узлов

Задача обратного интерполирования функции для случая неравноотстоящих значений аргумента x_0, x_1, \dots, x_n непосредственно может быть решена с помощью интерполяционной формулы Лагранжа.

Для этого достаточно принять переменную y за независимую и написать формулу, выражающую x как функцию y (рис. 6.2):

$$x = \sum_{i=0}^n \frac{(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_{i-1})(y - y_{i+1}) \dots (y - y_n)}{(y_i - y_1)(y_i - y_2) \dots (y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1}) \dots (y_i - y_n)} x_i,$$

где $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

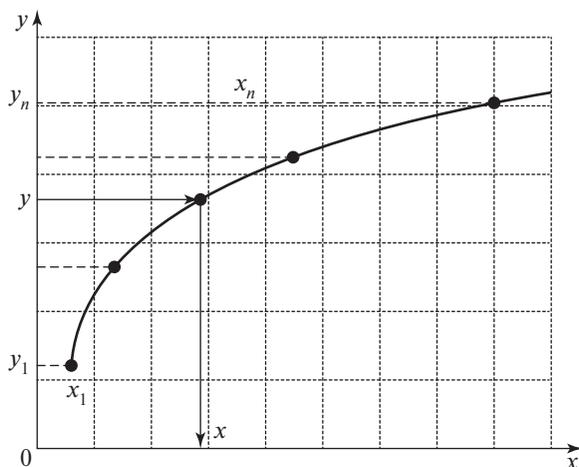


Рис. 6.2. Задача обратного интерполирования функции для случая неравноотстоящих узлов

Можно также, считая y аргументом, использовать интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих значений аргумента:

$$x = x_0 + [y_0, y_1](y - y_0) + [y_0, y_1, y_2](y - y_0)(y - y_1) + \dots + [y_0, y_1, \dots, y_n](y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{n-1}),$$

где $[y_0, y_1]$, $[y_0, y_1, y_2]$, ..., $[y_0, y_1, \dots, y_n]$ — соответствующие разделенные разности.

Контрольные вопросы

1. Что такое аппроксимация?
2. Что такое интерполяция?
3. В чем заключается простейшая задача интерполирования и что это означает геометрически?
4. Что такое конечные разности различных порядков?
5. Что такое обобщенная степень?

6. В каких случаях используются первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона?
7. Что такое таблица центральных разностей?
8. В каких случаях используются формулы Бесселя, Гаусса и Стирлинга?
9. Дайте общую характеристику интерполяционных формул с постоянным шагом.
10. В каких случаях используется формула Лагранжа?
11. Опишите схему Эйткена.
12. Что такое разделенные разности?
13. Что такое обратное интерполирование?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.
2. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на Фортране. М.: Мир, 1977.
3. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.
4. *Хэмминг Р.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972.
5. *Данилов Ю. А.* Многочлены Чебышева. Мн.: Высш. шк., 1984. 157 с.: ил.
6. *Воеводин В. В.* Численные методы алгебры. М.: Наука, 1966. 248 с.
7. *Мудров А. Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: РАСКО, 1991. 272 с.: ил.
8. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.: ил.
9. *Вержебицкий В. М.* Линейная алгебра и нелинейные уравнения: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2000. 266 с.: ил.
10. *Турчак Л. И., Плотников П. В.* Основы численных методов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 304 с.
11. *Исаков Б. В.* Элементы численных методов: Учеб. пособие. М.: Академия, 2003. 192 с.
12. *Огородникова О. М.* Вычислительные методы в компьютерном инжиниринге: Учеб. пособие. Екатеринбург: УрФУ, 2013. 130 с.
13. *Рыжиков Ю. И.* Вычислительные методы. СПб.: БВХ-Петербург, 2007. 400 с.
14. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
15. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
16. *Копченова Н. В., Марон И. А.* Вычислительная математика в примерах и задачах: Учеб. пособие. СПб.: Лань, 2009. 368 с.
17. *Колдаев В. Д.* Численные методы и программирование: Учеб. пособие / Под ред. проф. Л. Г. Гагариной. М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2009. 336 с.
18. *Боглаев Ю. П.* Вычислительная математика и программирование: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Высш. шк., 1990. 544 с.
19. *Срочко В. А.* Численные методы: Курс лекций. Иркутск: Иркут. ун-т, 2003. 168 с.
20. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962. 464 с.
21. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 2. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962. 620 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
-----------------------	---

Глава 1. ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ	5
--	---

1.1. Использование математических моделей и численных методов при решении прикладных задач.....	5
1.2. Источники и классификация погрешностей.....	7
1.3. Абсолютная и относительная погрешности.....	10
1.4. Запись приближенных чисел.....	12
1.5. Округление чисел.....	13
1.6. Вычислительная погрешность.....	15
<i>Погрешность алгебраической суммы чисел $x \pm \Delta_x, y \pm \Delta_y$</i>	15
<i>Погрешность разности чисел $x \pm \Delta_x, y \pm \Delta_y$</i>	16
<i>Погрешность произведения чисел $x \pm \Delta_x, y \pm \Delta_y$</i>	18
<i>Погрешность степени приближенного числа</i>	20
<i>Погрешность корня из приближенного числа</i>	20
<i>Погрешность частного $x \pm \Delta_x, y \pm \Delta_y$</i>	21
1.7. Погрешности вычисления значений функции.....	22
1.7.1. <i>Погрешность функции, зависящей от одной переменной</i>	22
1.7.2. <i>Погрешность функции, зависящей от нескольких переменных</i>	23
1.8. Определение допустимой погрешности аргументов по допустимой погрешности функции.....	24
1.9. Вычисления без точного учета погрешностей.....	26
1.10. Статистический и технический подходы к учету погрешностей действий.....	27
1.11. Погрешности решения задачи на ЭВМ.....	28
Контрольные вопросы.....	29

Глава 2. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ МАТРИЦ	30
---	----

2.1. Постановка задачи.....	30
2.2. Основные характеристики матриц.....	31
2.3. Локализация собственных значений матрицы.....	34

2.4.	Методы нахождения собственных значений и векторов матриц.....	35
2.4.1.	Метод непосредственного развертывания векового определителя.....	35
2.4.2.	Метод Крылова.....	37
2.4.3.	Метод Данилевского.....	41
2.4.4.	Метод Леверрье.....	42
2.4.5.	Степенной метод нахождения наибольшего собственного значения.....	43
2.4.6.	Интерполяционный метод нахождения всех собственных значений матрицы.....	45
2.4.7.	Метод обратной итерации.....	46
2.4.8.	Итерации со сдвигом начала.....	49
	Контрольные вопросы.....	52

Глава 3. НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ.....

3.1.	Постановка задачи.....	53
3.2.	Вычисление значений функций по схеме Горнера.....	53
3.3.	Вычисление сумм числовых рядов.....	55
3.4.	Вычисление значений функций методом разложения в ряд Тейлора.....	57
3.4.1.	Вычисление значений показательной функции.....	58
3.4.2.	Вычисление значений логарифмической функции.....	59
3.4.3.	Вычисление значений тригонометрических функций.....	60
3.4.4.	Вычисление значений гиперболических функций.....	61
3.5.	Вычисление значений функций методом итераций.....	62
3.5.1.	Вычисление значений функции $y = \frac{1}{x}$	63
3.5.2.	Вычисление значений функции $y = \sqrt{x}$	63
3.5.3.	Вычисление значений функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	64
3.5.4.	Вычисление значений функции $y = \sqrt[3]{x}$	65
3.6.	Вычисление значений функций путем разложения по многочленам Чебышева.....	65
3.7.	Рациональные приближения.....	68
	Контрольные вопросы.....	70

Глава 4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ.....

4.1.	Постановка задачи.....	71
4.2.	Типы используемых матриц.....	72

4.3.	Обусловленность СЛАУ	74
4.4.	Методы решения СЛАУ	78
4.4.1.	Метод Гаусса	79
4.4.2.	Уточнение решения	82
4.4.3.	Метод главных элементов	83
4.4.4.	Метод простой итерации	85
4.4.5.	Метод Гаусса—Зейделя	87
4.4.6.	Метод прогонки	89
4.4.7.	Метод Холецкого	90
4.4.8.	Метод релаксации	92
4.4.9.	Критерии сходимости и оценки погрешности итерационных методов	94
	Контрольные вопросы	94

Глава 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1.	Постановка задачи	95
5.2.	Методы нахождения корней нелинейных уравнений	96
5.2.1.	Локализация корней	97
5.2.2.	Метод половинного деления	99
5.2.3.	Метод сканирования	101
5.2.4.	Метод последовательных приближений	101
5.2.5.	Усовершенствованный метод последовательных приближений	106
5.2.6.	Метод Ньютона—Рафсона	107
5.2.7.	Случай почти равных корней	109
5.2.8.	Упрощения метода Ньютона—Рафсона	110
5.2.9.	Гибридный метод Ньютона и половинного деления	113
5.3.	Преобразование уравнения к виду, удобному для итераций	114
5.4.	Типы сходимостей итерационных последовательностей	115
	Контрольные вопросы	116

Глава 6. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

6.1.	Постановка задачи интерполирования	117
6.2.	Конечные разности различных порядков	119
6.3.	Таблица разностей	120
6.4.	Обобщенная степень	121
6.5.	Интерполирование для случая равноотстоящих узлов	122

6.5.1. Первая интерполяционная формула Ньютона	122
6.5.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона.....	123
6.6. Таблица центральных разностей.....	123
6.6.1. Интерполяционные формулы Гаусса.....	125
6.6.2. Интерполяционная формула Стирлинга.....	126
6.6.3. Интерполяционная формула Бесселя.....	126
6.7. Общая характеристика интерполяционных формул с постоянным шагом.....	127
6.8. Интерполяционная формула Лагранжа. Схема Эйткена.....	127
6.9. Разделенные разности.....	130
6.10. Интерполяционная формула Ньютона для случая неравноотстоящих значений аргумента.....	131
6.11. Обратное интерполирование для случая равноотстоящих узлов.....	132
6.12. Обратное интерполирование для случая неравноотстоящих узлов.....	133
Контрольные вопросы	134
ЛИТЕРАТУРА.....	136

Научное издание

*Алексей Алексеевич Бубнов
Сергей Алексеевич Бубнов
Елена Николаевна Проказникова*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

Учебное пособие

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве «КУРС»

Подписано в печать 09.10.2017.

Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 9,0.

Тираж 500 экз. Заказ № 00000

ТК 656682-940353-091017

ООО Издательство «КУРС»

127273, Москва, ул. Олонецкая, д. 17А, офис 104. Тел.: (495) 203-57-83.

E-mail: kursizdat@gmail.com <http://kursizdat.ru>

Для заметок

Для заметок

Для заметок



Е.Н. ПРОКАЗНИКОВА, К.В. БУХЕНСКИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

Часть 2

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\lambda(1 - x_k^2) - e^{x_k}}{8x_k + e^{x_k}}$$

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Е.Н. Проказникова
К.В. Бухенский

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

УЧЕБНИК

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 2

*Рекомендовано Научно-методическим советом
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет» в ка-
честве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 2.09.00.00 «Информатика
и вычислительная техника» (квалификация «бакалавр»)*

Москва
КУРС
2023

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73
П80

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11
----------------	---

Рецензенты:

А.Н. Пылькин — д-р техн. наук, профессор, заслуженный работник высшей школы, заведующий кафедрой ВПМ РГРТУ;

С.С. Мамонов — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математических дисциплин РГУ им. С.А. Есенина

П80 **Проказникова Е.Н.**

Вычислительная математика для программистов: в 3 ч. Ч. 2: учебник / Е.Н. Проказникова, К.В. Бухенский. — Москва: КУРС, 2023. — 192 с.

ISBN 978-5-907064-36-2

В учебнике рассматриваются вопросы численного дифференцирования и интегрирования, основные приближенные и численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, в том числе решения задачи Коши. Представлены некоторые разностные и аналитические методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также методы численного решения уравнений с частными производными. Кроме того, в книге приводится описание метода Монте-Карло и особенности использования этого метода для вычисления кратных интегралов, решения задачи Дирихле. Для большинства методов приведены примеры. Издание предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по укрупненному направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника».

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73



ISBN 978-5-907064-36-2

© Проказникова Е.Н.,
Бухенский К.В., 2018
© КУРС, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Развитие науки и техники привело к появлению новых, все более сложных задач, решение которых требует, как правило, дорогостоящих натуральных экспериментов. Учитывая уровень современной компьютерной техники и используемых численных и приближенных методов, в последнее время все чаще вместо дорогостоящих экспериментов используются вычислительные эксперименты. Специфика физических и технических процессов такова, что формализованное представление задачи зачастую сводится к решению дифференциальных уравнений. При этом во многих случаях имеют дело с уравнениями, общее решение которых не выражается в квадратурах. Поэтому возникает необходимость применять те или иные методы, дающие приближенное решение задачи.

Таким образом, введение в программу обучения по дисциплине «Вычислительная математика» большого объема материала по численным и приближенным методам решения дифференциальных и интегральных уравнений является актуальной задачей.

Издания, сделанные ранее, как правило, излагают материал соответствующих разделов вычислительной математики в недостаточном для студентов технических вузов объеме.

Данный учебник направлен на изложение теоретического материала некоторых разделов вычислительной математики в объеме, достаточном для самостоятельного построения алгоритма вычисления и написания программного кода студентом технического вуза. Материал разбит на тематические части, соответствующие традиционно выделяемым областям.

Целью учебника является ознакомление студентов с математическими основами методов вычислительной математики и применение этих методов для решения прикладных задач.

В *первой главе* рассматривается постановка вопроса приближенного дифференцирования. Учитывая особенности решения задач приближенного дифференцирования с помощью ЭВМ, приведены формулы приближенного дифференцирования функций, заданных в равноотстоящих точках, и формулы численного дифференцирования для неравноотстоящих узлов. Уделяется внимание вопросам графического дифференцирования. Дается понятие о приближенном вычислении частных производных. Кроме того, отдельно рассматриваются вопросы о погрешностях, возникающих при численном

дифференцировании, и о выборе оптимального шага численного дифференцирования.

Вторая глава посвящена методам приближенного интегрирования. Кроме постановки задачи, приводятся такие формулы приближенного интегрирования, как квадратурные формулы Ньютона–Котеса, в том числе и высших порядков, формула трапеций, формула Симпсона, квадратурные формулы Чебышева и Гаусса, экстраполяция по Ричардсону и формула Эйлера–Маклорена. Уделяется внимание приближенному вычислению несобственных интегралов и методу выделения особенностей Канторовича, а также графическому интегрированию. Отдельно описывается понятие кубатурных формул и рассматривается кубатурная формула типа Симпсона. Для расчета кратных интегралов приводятся методы повторного интегрирования и метод Л.А. Люстерника и В.А. Диткина. Метод Монте-Карло применительно к кратным интегралам рассматривается в *пятой главе*, посвященной различным приложениям этого метода для решения прикладных задач.

В *третьей главе* рассматривается решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Даны теоретические основы интегрирования дифференциальных уравнений с помощью рядов, метода последовательных приближений, неопределенных коэффициентов. Приводится описание метода Эйлера и его модификаций, метода Рунге–Кутты, Адамса, Милна и последовательных сближений А.Н. Крылова. Кроме приближенных методов решения задачи Коши, в этой главе представлены некоторые разностные и аналитические методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Среди них метод конечных разностей для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, метод прогонки, метод Галеркина и метод коллокации.

В *четвертой главе* рассматриваются вопросы, посвященные методам решения дифференциальных уравнений с частными производными, приводится их классификация. После этого дается понятие начальных и краевых условий, формулируется задача Коши и смешанная задача. В качестве методов решения этих задач рассматривается метод сеток для задачи Дирихле, для уравнений параболического и гиперболического типов, а также метод прогонки для уравнения теплопроводности. Кроме того, в этой главе уделяется внимание численному решению интегральных уравнений. Приводятся основные виды линейных интегральных уравнений. Описывается

решение уравнений Фредгольма и уравнения Вольтерра второго рода методом конечных сумм.

В *пятой главе* описывается алгоритм применения метода Монте-Карло, дается определение понятию случайного числа, приводятся способы получения случайных чисел. После этого рассматриваются методика вычисления кратных интегралов, решения систем линейных уравнений и решения задачи Дирихле с помощью метода Монте-Карло.

В учебнике не ставится задача фундаментального изучения математических основ, изложенных в нем численных методов.

Авторы выражают глубокую благодарность Б.П. Демидовичу, И.А. Марон, Н.В. Копченовой, Э.З. Шуваловой, Н.Н. Калиткину, Н.П. Жидкову, Г.М. Кобелькову, Н.П. Березину, С.А. Кантору, чей научно-педагогический опыт был явно и неявно использован в работе над книгой.

Глава 1

ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В этой главе рассматривается постановка вопроса приближенного дифференцирования. Учитывая особенности решения задач приближенного дифференцирования с помощью ЭВМ, приведены формулы приближенного дифференцирования функций, заданных в равноотстоящих точках, и формулы численного дифференцирования для неравноотстоящих узлов. Уделяется внимание вопросам графического дифференцирования. Дается понятие о приближенном вычислении частных производных. Кроме того, отдельно рассматриваются вопросы о погрешностях, возникающих при численном дифференцировании, и о выборе оптимального шага численного дифференцирования.

1.1. Постановка вопроса

Практические задачи, в которых нужно найти производные различных порядков от функции $y = f(x)$, встречаются очень часто. Приближенное (или численное) дифференцирование применяется в тех случаях, когда функцию трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например если она задана таблицей. Решение задачи дифференцирования функции на ЭВМ в большинстве случаев невозможно в аналитическом виде. Существует также большое количество задач, в которых в силу сложности аналитического выражения функции $f(x)$ непосредственное дифференцирование затруднительно. В этих случаях обычно прибегают к *приближенному дифференцированию*.

Для вывода формул приближенного дифференцирования заменяют данную функцию $f(x)$ на интересующем отрезке $[a, b]$ интерполирующей функцией $P(x)$ (чаще всего полиномом), а затем полагают

$$f'(x) = P'(x) \text{ при } a \leq x \leq b. \quad (1.1)$$

Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков функции $f(x)$.

Если для интерполирующей функции $P(x)$ известна погрешность $R(x) = f(x) - P(x)$, то погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x), \quad (1.2)$$

т.е. погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции. То же самое справедливо и для производных высших порядков.

Приближенное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование. Это обусловлено тем, что близость друг к другу ординат двух кривых $y = f(x)$ и $Y = P(x)$ на отрезке $[a, b]$ еще не гарантирует близости на этом отрезке их производных $f'(x)$ и $P'(x)$, т.е. малого расхождения угловых коэффициентов касательных к рассматриваемым кривым при одинаковых значениях аргумента (рис. 1.1).

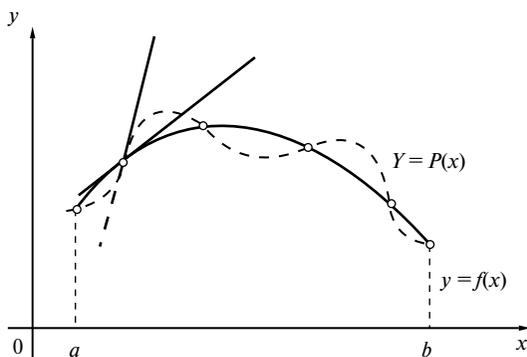


Рис. 1.1. Расхождение угловых коэффициентов касательных

Так как приближенное дифференцирование очень тесно связано с интерполированием функций, то для удобства дальнейшего изложения материала приведем несколько определений.

Пусть $y = f(x)$ — заданная функция. Обозначим через $\Delta x = h$ фиксированную величину приращения аргумента (шаг). Тогда выражение

$$\Delta y \equiv \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется **первой конечной разностью** функции y . Аналогично определяются **конечные разности высших порядков**:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \quad \text{при } n = 2, 3, \dots$$

Обобщенной n -степенью числа x называется произведение n сомножителей, первый из которых равен x , а каждый последующий на h меньше предыдущего:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-1)h],$$

где h — некоторое фиксированное постоянное число.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично и $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — значения аргумента, а $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ — соответствующие значения функции, где разности $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0 (i = 0, 1, \dots)$ не равны между собой.

Отношения

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$, называются **разделенными разностями первого порядка**.

Аналогично определяются **разделенные разности второго порядка**:

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$.

Разделенные разности n -го порядка получаются из разделенных разностей $(n-1)$ -го порядка с помощью рекуррентного соотношения

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - [x_i, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots; i = 0, 1, 2, \dots$.

Заметим, что разделенные разности не меняются при перестановке элементов, т.е. представляют собой симметрические функции своих аргументов.

1.2. Приближенное дифференцирование функций, заданных в равноотстоящих точках

1.2.1. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона

Пусть имеем функцию $y(x)$, заданную в равноотстоящих точках $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ отрезка $[a, b]$ с помощью значений $y_i = f(x_i)$. Для

нахождения на $[a, b]$ производных $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ и т.д. функцию y приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона, построенным для системы узлов x_0, x_1, \dots, x_k ($k \leq n$).

Имеем

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots, \quad (1.3)$$

где $q = \frac{x-x_0}{h}$ и $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \dots$).

Производя перемножение биномов, получим

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \dots \quad (1.3')$$

Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq},$$

то

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \dots \right]. \quad (1.4)$$

Аналогично можно получить формулу для второй производной. Так как

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq} \cdot \frac{dq}{dx},$$

то

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q-11}{12}\Delta^4 y_0 + \dots \right]. \quad (1.5)$$

Таким же способом в случае необходимости можно вычислить и производные функции $y(x)$ любого порядка.

Следует отметить, что при нахождении производных $y'(x)$, $y''(x)$,... в фиксированной точке x в качестве x_0 следует выбирать ближайшее табличное значение аргумента.

Иногда требуется находить производные функции y в основных табличных точках x_i . В этом случае формулы численного дифференцирования упрощаются. Так как каждое табличное значение можно считать за начальное, то положим $x = x_0$, $q = 0$; тогда будем иметь

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots \right) \quad (1.6)$$

и

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{22} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 \dots \right). \quad (1.7)$$

Если $P_k(x)$ — интерполяционный полином Ньютона, содержащий разности Δy_0 , $\Delta^2 y_0, \dots, \Delta^k y_0$, и

$$R_k(x) = y(x) - P_k(x)$$

— соответствующая погрешность, то погрешность в определении производной есть

$$R'_k(x) = y'(x) - P'_k(x).$$

Известно что,

$$\begin{aligned} R_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)} y^{(k+1)}(\xi) = \\ &= h^{k+1} \frac{q(q-1)\dots(q-k)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi), \end{aligned}$$

где ξ — некоторое промежуточное число между значениями x_0, x_1, \dots, x_k, x . Поэтому, предполагая, что $y(x) \in C^{(k+2)}$, получим

$$\begin{aligned} R'_k(x) &= \frac{dR_k}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{h^k}{(k+1)!} \times \\ &\times \left\{ y^{(k+1)}(\xi) \frac{d}{dq} [q(q-1)\dots(q-k)] + q(q-1)\dots(q-k) \frac{d}{dq} [y^{(k+1)}(\xi)] \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда при $x = x_0$ и, следовательно, при $q = 0$ и учитывая, что

$$\frac{d}{dq} [q(q-1)\dots(q-k)]_{q=0} = (-1)^k k!,$$

будем иметь:

$$R'_k(x_0) = (-1)^k k!;$$

$$R'_k(x_0) = (-1)^k \frac{h^k}{k+1} y^{(k+1)}(\xi). \quad (1.8)$$

Так как $y^{(k+1)}(\xi)$ во многих случаях трудно оценить, то при h малом приближенно полагают:

$$y^{(k+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{k+1} y_0}{h^{k+1}}$$

и, следовательно,

$$R'_k(x_0) \approx \frac{(-1)^k}{h} \frac{\Delta^{k+1} y_0}{k+1}. \quad (1.9)$$

Аналогично может быть найдена погрешность $R''_k(x_0)$ для второй производной $y''(x_0)$.

Пример. Найти $y''(50)$ функции $y = \lg(x)$, заданной таблично (табл. 1.1).

Решение. Здесь $h = 5$. Дополняем табл. 1.1 столбцами конечных разностей (десятичные разряды не указываются; они определяются десятичными разрядами значений функции).

Таблица 1.1

Значения функции $y = \lg(x)$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	414	-36	5
55	1,7404	378	-31	
60	1,7782	347		
65	1,8129			

Используя первую строчку таблицы, на основании формулы (1.6) с точностью до разностей третьего порядка будем иметь

$$y'(50) = \frac{1}{5}(0,0414 + 0,0018 + 0,0002) = 0,0087.$$

Для оценки точности найденного значения заметим, что так как табулированная выше функция есть $y = \lg(x)$, то

$$y'(x) = \frac{M}{x} = \frac{0,43429}{x}.$$

Следовательно,

$$y'(50) = \frac{0,43429}{50} = 0,0087.$$

Таким образом, результаты совпадают с точностью до четвертого десятичного знака.

1.2.2. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на формуле Стирлинга

Рассмотренные ранее формулы численного дифференцирования для функции y в точке $x = x_0$ обладают тем недостатком, что они используют лишь односторонние значения функции при $x > x_0$. Относительно большую точность имеют симметрические формулы дифференцирования, учитывающие значения данной функции y как при $x > x_0$, так и при $x < x_0$. Эти формулы обычно называются *центральными формулами дифференцирования*. Рассмотрим одну из них, взяв за основу интерполяционную формулу Стирлинга.

Пусть $\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ — система равноотстоящих точек с шагом $x_{i+1} - x_i = h$ и $y_i = f(x_i)$ — соответствующие значения данной функции $y = f(x)$. Полагая

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

и заменяя приближенно функцию y интерполяционным полиномом Стирлинга, будем иметь

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \\ + \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \dots, \quad (1.10)$$

где для краткости введены обозначения:

$$\Delta y_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2};$$

$$\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} = \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2};$$

$$\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} = \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2}$$

и т.д.

Из формулы (1.10), учитывая, что

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h},$$

получаем:

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_{-\frac{1}{2}} + q \Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2 - 1}{6} \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{2q^3 - q}{12} \Delta^4 y_{-2} + \right. \\ \left. + \frac{5q^4 - 15q^2 + 4}{120} \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{3q^5 - 10q^3 + 4q}{360} \Delta^6 y_{-3} + \dots \right); \quad (1.11)$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{-1} + q \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{6q^2 - 1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \frac{2q^3 - 3q}{12} \Delta^4 y_{-\frac{5}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{15q^4 - 30q^2 + 4}{360} \Delta^6 y_{-3} + \dots \right). \quad (1.11')$$

В частности, полагая $q = 0$, будем иметь

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{30} \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \dots \right) \quad (1.12)$$

и

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90} \Delta^6 y_{-3} + \dots \right). \quad (1.12')$$

Пример. Найти $y'(1)$ и $y''(1)$ для функции $y = y(x)$, заданной табл. 1.2.

Таблица 1.2

Значения функции $y = y(x)$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,96	0,7825361	—86 029			
0,98	0,7739332	<u>—87 355</u>	—1326		
1,00	0,7651977	<u>—88 656</u>	<u>—1301</u>	<u>25</u>	
1,02	0,7563321	—89 931	—1275	<u>26</u>	<u>1</u>
1,04	0,7473390				

Решение. Составляя разности функции y (см. табл. 1.2) и используя подчеркнутые члены, на основании формулы (1.12) будем иметь

$$y'(1) = \frac{1}{0,02} \left(-\frac{87\,355 + 88\,656}{2} \cdot 10^{-7} - \frac{1}{6} \cdot \frac{25 + 26}{2} \cdot 10^{-7} + \frac{1}{30} \cdot 1 \cdot 10^{-7} \right) =$$

$$= -50 \cdot (88005,5 + 4,2 + 0) \cdot 10^{-7} = -0,4400485.$$

Для проверки заметим, что табулированная функция есть функция Бесселя нулевого индекса $y = J_0(x)$.

Как известно,

$$J_0'(1) = -J_1(x)|_{x=1} = -0,4400506.$$

Аналогично, используя дважды подчеркнутые члены и применяя формулу (1.12'), будем иметь

$$y''(1) = \frac{1}{0,02^2} \cdot \left(-1301 \cdot 10^{-7} - \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 10^{-7} \right) =$$

$$= -2500 \cdot 1301 \cdot 10^{-7} = -3,2525 \cdot 10^{-1} = -0,325250.$$

Для сравнения приведем получающееся на основании соотношений между бесселевыми функциями точное значение:

$$y''(1) = J_0''(1) = J_1(1) - J_0(1) = 0,4400506 - 0,7651977 = -0,325147.$$

Таким образом, численное нахождение второй производной есть операция, вообще говоря, менее надежная, чем первой.

Замечание. Иногда требуется найти экстремум дифференцируемой функции $y = y(x)$, заданной таблично. Для этого необходимо, чтобы в точке экстремума \tilde{x} было выполнено равенство $y'(\tilde{x}) = 0$. Приравняв нулю производную $y'(x)$ в формуле (1.11), методом последовательных приближений находим соответствующее значение q . Отсюда

$$\tilde{x} = x_0 + qh,$$

причем значение \tilde{y} вычисляется по формуле (1.10) или по какой-нибудь другой интерполяционной формуле. Найденное значение \tilde{y} является экстремумом функций, если в окрестности точки \tilde{x} вторая разность $\Delta^2 y$ сохраняет постоянный знак.

1.2.3. Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих точек, выраженные через значения функции в этих точках

Пусть точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — равноотстоящие, т.е.

$$x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

и пусть для функции $y = y(x)$ известны значения $y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Для данной системы узлов x_i построим интерполяционный полином Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x) y_i}{(x - x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)},$$

где $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Тогда

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Полагая

$$\frac{x - x_0}{h} = q,$$

получим

$$\Pi_{n+1}(x) = h^{n+1} q(q-1) \dots (q-n) = h^{n+1} q^{[n+1]}$$

и

$$\begin{aligned} \Pi'_{n+1}(x_i) &= (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = \\ &= h^n i(i-1) \dots 1(-1) \dots [-(n-i)] = (-1)^{n-i} h^n i!(n-i)! \end{aligned} \quad (1.13)$$

Следовательно, для полинома Лагранжа $L_n(x)$ имеем выражение

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i}. \quad (1.14)$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{dx}{dq} = h$, получаем

$$y'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \frac{d}{dq} \left\{ \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \right\}. \quad (1.15)$$

Аналогично могут быть найдены производные высших порядков данной функции $y(x)$. Для оценки погрешности

$$r_n(x) = y'(x) - L'_n(x)$$

воспользуемся известной формулой погрешности интерполяционной формулы

$$R_n(x) = y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x), \quad (1.16)$$

где $\xi = \xi(x)$ — промежуточное значение между точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ и x .

Предполагая, что $y(x) \in C^{(n+2)}$, выводим:

$$r_n(x) = R'_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ y^{(n+1)}(\xi) \Pi_{n+1}(x) + \Pi_{n+1}(x) \frac{d}{dx} \left[y^{(n+1)}(\xi) \right] \right\}.$$

Отсюда, учитывая формулу (1.13), получаем погрешность производной в узлах:

$$R'_n(x_i) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi), \quad (1.17)$$

где ξ — промежуточное значение между $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Произведем расчет для $n = 2$ (три точки). Из формулы (1.14) получаем

$$L_2(x) = \frac{1}{2} y_0 (q-1)(q-2) - y_1 q (q-2) + \frac{1}{2} y_2 q (q-1).$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{dx}{dq} = h$, будем иметь

$$y'(x) \approx L_2'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} y_0 (2q-3) - y_1 (2q-2) + \frac{1}{2} y_2 (2q-1) \right].$$

В частности, для производных

$$y'(x_i) = y'_i \quad (i = 0, 1, 2)$$

получим следующие выражения:

$$y'_0 = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2);$$

$$y'_1 = \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2);$$

$$y'_2 = \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2)$$

с соответствующими погрешностями:

$$r_0 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_0);$$

$$r_1 = -\frac{1}{6} h^2 y'''(\xi_1);$$

$$r_2 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_2).$$

Приведем без доказательства формулы дифференцирования для четырех и пяти точек, справедливость которых легко можно проверить самостоятельно:

- $n = 3$ (четыре точки):

$$y'_0 = \frac{1}{6h} (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi);$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h} (-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi);$$

$$y'_2 = \frac{1}{6h} (y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi);$$

$$y'_3 = \frac{1}{6h} (-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi);$$

- $n = 4$ (пять точек):

$$y'_0 = \frac{1}{12h}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{h^4}{5} y^{(5)}(\xi);$$

$$y'_1 = \frac{1}{12h}(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) + \frac{h^4}{20} y^{(5)}(\xi);$$

$$y'_2 = \frac{1}{12h}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{h^4}{30} y^{(5)}(\xi);$$

$$y'_3 = \frac{1}{12h}(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) - \frac{h^4}{20} y^{(5)}(\xi);$$

$$y'_4 = \frac{1}{12h}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) - \frac{h^4}{4} y^{(5)}(\xi).$$

Рассмотрение формул для $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ показывает, что если число точек нечетно и производная берется в средней точке, то соответствующая формула численного дифференцирования выражается более просто и обладает повышенной точностью.

1.3. Формулы численного дифференцирования для неравноотстоящих узлов

При рассмотрении численного дифференцирования для неравноотстоящих узлов будем исходить из интерполяционной формулы Ньютона для неравных промежутков:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)f(x; x_0; x_1; \dots; x_n). \end{aligned}$$

Для сокращения записей обозначим $x - x_i = \alpha_i$. Дифференцируя обе части равенства один раз, будем иметь

$$\begin{aligned} f'(x) = & f(x_0; x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2) \times \\ & \times f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \dots + (\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-2} + \alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}) \times \\ & \times f(x_0; x_1; \dots; x_n) + \frac{d\omega_n(x)}{dx} f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) + \omega_n(x) \frac{df(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx}. \end{aligned}$$

За приближенное значение первой производной при численном дифференцировании примем

$$L'_n(x) = f(x_0; x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)f(x_0; x_1; x_2) + \\ + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \dots + \\ + (\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-2} + \alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-3}\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n).$$

Остаточный член будет выглядеть так:

$$R = \frac{d\omega_n(x)}{dx} f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) + \omega_n(x) \frac{df(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx}.$$

Упростим второй член справа. По определению

$$\frac{df(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(x'; x_0; x_1; \dots; x_n) - f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{x' - x} = \\ = \lim_{x' \rightarrow x} f(x'; x_0; x_1; \dots; x_n) = f(x; x; x_0; x_1; \dots; x_n).$$

Таким образом,

$$R = \frac{d\omega_n(x)}{dx} f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) + \omega_n(x) f(x; x; x_0; x_1; \dots; x_n)$$

или, если использовать связь разделенных разностей с производными,

$$R = \frac{d\omega_n(x)}{dx} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + \omega_n(x) \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}.$$

В узлах интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n второй член справа обращается в нуль и выражение остаточного члена будет более простым.

Дифференцируя еще раз, получим

$$f''(x) = 2f(x_0; x_1; x_2) + 2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \dots + \\ + 2(\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-3} + \alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-4}\alpha_{n-2} + \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n) + \\ + \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2} f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) + 2 \frac{d\omega_n(x)}{dx} \frac{df(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx} + \\ + \omega_n(x) \frac{d^2 f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx^2}.$$

За приближенное значение второй производной при численном дифференцировании будет приниматься

$$L_n''(x) = 2 \left[f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \dots + (\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-3} + \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-4} \alpha_{n-2} + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_n) \right].$$

Остаточный член будет иметь вид

$$R = \frac{d^2 \omega_n(x)}{dx^2} f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) + 2 \frac{d\omega_n(x)}{dx} \frac{df(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx} + \omega_n(x) \frac{d^2 f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx^2}.$$

Второй член справа упрощается так же, как и для первой производной. Упростим третий член. В силу определения производной и свойств разделенных разностей будем иметь

$$\frac{d^2 f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx^2} = \frac{d}{dx} f(x; x; x_0; x_1; \dots; x_n) = 2f(x; x; x; x_0; x_1; \dots; x_n).$$

Таким образом, остаточный член в этом случае примет следующий вид:

$$R = \frac{d^2 \omega_n(x)}{dx^2} f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) + 2 \frac{d\omega_n(x)}{dx} f(x; x; x_0; x_1; \dots; x_n) + 2\omega_n(x) f(x; x; x; x_0; x_1; \dots; x_n)$$

или

$$R = \frac{d^2 \omega_n(x)}{dx^2} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + 2 \frac{d\omega_n(x)}{dx} \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} + 2\omega_n(x) \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}.$$

Если x принимает одно из значений x_0, x_1, \dots, x_n , то последний член справа обратится в нуль и остаточный член упростится. Аналогичные рассуждения можно провести и для любого $k \leq n$. В общем случае получим

$$f^{(k)}(x) = k! \left[f(x_0; x_1; \dots; x_k) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k) f(x_0; x_1; \dots; x_{k+1}) + \dots + (\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-k} + \dots + \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots \alpha_{n-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_n) \right] + \frac{d^k}{dx^k} [\omega_n(x) f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)].$$

Для упрощения остаточных членов используем выражения

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x; x_0; x_1; \dots; x_n), \quad m \leq n.$$

Примем без доказательства

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) = m! f \left(\begin{array}{c} x; x; \dots; x; x_0; x_1; \dots; x_n \\ m+1 \text{ раз} \end{array} \right).$$

1.4. Графическое дифференцирование

Задача графического дифференцирования заключается в построении по заданному графику функции $y = f(x)$ графика ее производной

$$Y = f'(x).$$

Пусть дан график функции $y = f(x)$ (рис. 1.2). Для построения в известном масштабе l графика ее производной выбираем на данной кривой достаточно густую сеть точек 1, 2, 3, 4, 5, ..., включающую по возможности характерные для графика точки.

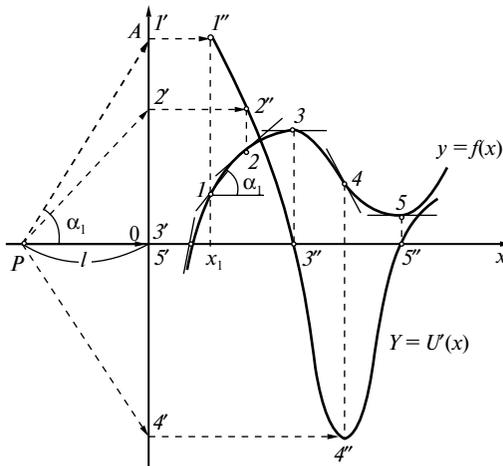


Рис. 1.2. График функции $y = f(x)$

В этих точках с возможной тщательностью строим касательные к графику функции, проводя их «на глаз». Далее на оси Ox выбираем точку $P(-l, 0)$ (полюс) и проводим параллельные соответствующим касательным прямые $P1'$, $P2'$, $P3'$, $P4'$, $P5'$, ... до пересечения их с осью Oy . Отрезки оси Oy : $01'$, $02'$, $03'$, $04'$, $05'$, ... представляют собой соответственно величины, пропорциональные значениям производной $y' = f'(x)$ в выбранных точках, т.е. являются ординатами графика производной. В самом деле, например, для точки 1 на рис. 1.2 имеем

$$OA = \operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_1).$$

Аналогичные результаты получаем для всех других точек. Поэтому точки пересечения $1'', 2'', 3'', 4'', 5'', \dots$ параллелей, проходящих через точки $1', 2', 3', 4', 5', \dots$ с соответствующими вертикалями, проходящими через точки касания $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, принадлежат графику производной $y = f'(x)$.

Соединяя точки $1'', 2'', 3'', 4'', 5'', \dots$ линией, характер которой учитывает положение промежуточных точек, мы приближенно получим график производной y' в масштабе l . Если выбрать $l = 1$, то график производной получится в натуральном масштабе.

Для увеличения точности графического построения рекомендуется сначала определять направление касательной, а затем намечать точку касания. Для этого график данной функции разбивают на небольшие участки, мало отличающиеся от прямолинейных. Рассмотрим один из таких участков AB (рис. 1.3). Построим семейство хорд, параллельных секущей AB . Геометрическое место середин этих хорд представляет собой кривую K , пересекающую график функции в точке C , касательная в которой параллельна секущей AB .

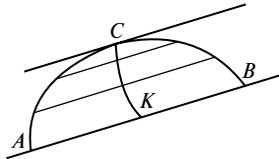


Рис. 1.3. Участок AB графика функции $y = f(x)$

Таким приемом на каждом участке можно найти точку и соответствующее направление касательной. Дальнейшее построение выполняется указанным выше способом.

1.5. Понятие о приближенном вычислении частных производных

1.5.1. Интерполирование функций двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ задана на системе равноотстоящих точек $(x_i, y_j) (i, j = 0, 1, 2, \dots)$, где

$$x_i = x_0 + ih; \quad y_j = y_0 + jk.$$

Причем

$$h = \Delta x_i = \text{const}; \quad k = \Delta y_j = \text{const}.$$

Для краткости введем обозначения

$$z_{ij} = f(x_i, y_j).$$

Значения функции z можно оформить в виде *таблицы с двумя входами* (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Значения функции двух переменных

$y \backslash x$	x_0	x_1	x_2	\dots
y_0	z_{00}	z_{10}	z_{20}	\dots
y_1	z_{01}	z_{11}	z_{21}	\dots
y_2	z_{02}	z_{12}	z_{22}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Интерполирование функции двух переменных

$$z = f(x, y),$$

т.е. нахождение ее нетабличных значений, можно последовательно проводить по каждой переменной x и y в отдельности. Пусть, например, требуется найти значение

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Интерполируя надлежащим образом выбранные функции одной переменной x

$$f_k(x) = f(x, y_k),$$

где $y_k \approx \bar{y}$, находим значения $f_k(\bar{x})$. Для этого используются соответствующие строки двойной таблицы. Рассматривая полученные значения $f_k(\bar{x}) = f(\bar{x}, y_k)$ как значения функции $f(\bar{x}, y)$ единственной переменной y , с помощью одной из интерполяционных формул находим искомое значение $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}$.

Можно также производить интерполирование в обратном порядке.

1.5.2. Двойные разности высших порядков

Для функции $z = f(x, y)$, заданной двойной таблицей $\{z_{ij}\}$, можно определить *частные конечные разности*

$$\Delta_x z_{ij} = z_{i+1, j} - z_{ij} \quad \text{и} \quad \Delta_y z_{ij} = z_{i, j+1} - z_{ij}.$$

Повторно применяя эти операции, получим *двойные разности высших порядков*:

$$\Delta^{m+n} z_{ij} = \Delta_{x^m y^n}^{m+n} z_{ij} = \Delta_{x^m}^m (\Delta_{y^n}^n z_{ij}) = \Delta_{y^n}^n (\Delta_{x^m}^m z_{ij}),$$

где положено $\Delta^{0+0} z_{ij} = z_{ij}$.

Например,

$$\begin{aligned} \Delta^{1+2} z_{ij} &= \Delta_x (\Delta_{yy}^2 z_{ij}) = \Delta_x (z_{i,j+2} - 2z_{i,j+1} + z_{ij}) = \\ &= (z_{i+1,j+2} - 2z_{i+1,j+1} + z_{i+1,j}) - (z_{i,j+2} - 2z_{i,j+1} + z_{ij}). \end{aligned}$$

1.5.3. Интерполяционная формула Ньютона для функции двух переменных

Используя разности функции двух переменных $z = f(x, y)$, можно построить интерполяционный полином, аналогичный интерполяционному полиному Ньютона.

Пусть $P(x, y)$ — целый полином такой, что

$$\Delta_{x^m y^n}^{m+n} P(x_0, y_0) = \Delta^{m+n} z_{00}$$

($m, n = 0, 1, 2, \dots$). Положим, что $P(x, y)$ разложен по обобщенным степеням разностей $x - x_0$ и $y - y_0$, т.е.

$$\begin{aligned} P(x, y) &= c_{00} + c_{10}(x - x_0) + c_{01}(y - y_0) + c_{20}(x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ c_{11}(x - x_0)(y - y_0) + c_{02}(y - y_0)(y - y_1) + \dots \end{aligned} \quad (1.18)$$

Полагая $x = x_0$ и $y = y_0$, в силу условия

$$\Delta_{x^m y^n}^{m+n} P(x_0, y_0) = \Delta^{m+n} z_{00}$$

будем иметь

$$P(x_0, y_0) = z_{00} = c_{00}.$$

Вставляя для полинома $P(x, y)$ конечные разности первого порядка, получим

$$\Delta_x P(x, y) = c_{10}h + 2c_{20}h(x - x_0) + c_{11}h(y - y_0) + \dots$$

и

$$\Delta_y P(x, y) = c_{01}k + c_{11}k(x - x_0) + 2c_{02}k(y - y_0) + \dots$$

Отсюда, полагая $x = x_0$ и $y = y_0$, на основании условия

$$\Delta_{x^m y^n}^{m+n} P(x_0, y_0) = \Delta^{m+n} z_{00}$$

будем иметь

$$\Delta_x P(x_0, y_0) = \Delta^{1+0} z_{00} = c_{10} h$$

и

$$\Delta_y P(x_0, y_0) = \Delta^{0+1} z_{00} = c_{01} k,$$

т.е.

$$c_{10} = \frac{\Delta^{1+0} z_{00}}{h}, \quad c_{01} = \frac{\Delta^{0+1} z_{00}}{k}.$$

Далее, подсчитывая для полинома $P(x, y)$ конечные разности второго порядка, найдем:

$$\Delta_{xx} P(x, y) = 2! c_{20} h^2 + \dots;$$

$$\Delta_{xy} P(x, y) = c_{11} h k + \dots;$$

$$\Delta_{yy} P(x, y) = 2! c_{02} k^2 + \dots$$

Отсюда при $x = x_0$ и $y = y_0$ получим:

$$\Delta_{xx} P(x_0, y_0) = \Delta^{2+0} z_{00} = 2! c_{20} h^2;$$

$$\Delta_{xy} P(x_0, y_0) = \Delta^{1+1} z_{00} = c_{11} h k;$$

$$\Delta_{yy} P(x_0, y_0) = \Delta^{0+2} z_{00} = 2! c_{02} k^2,$$

т.е.

$$c_{20} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{\Delta^{2+0} z_{00}}{h^2}, \quad c_{11} = \frac{\Delta^{1+1} z_{00}}{h k}, \quad c_{02} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{\Delta^{0+2} z_{00}}{k^2}.$$

Аналогично находятся дальнейшие коэффициенты разложения (1.18). Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (1.18), получим *интерполяционный полином для функции двух переменных*

$$P(x, y) = z_{00} + \left[\frac{\Delta^{1+0} z_{00}}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^{0+1} z_{00}}{k} (y - y_0) \right] + \frac{1}{2!} \times \\ \times \left[\frac{\Delta^{2+0} z_{00}}{h^2} (x - x_0)^{[2]} + 2 \cdot \frac{\Delta^{1+1} z_{00}}{h k} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\Delta^{0+2} z_{00}}{k^2} (y - y_0)^{[2]} \right] + \dots \quad (1.19)$$

При интерполировании функций $f(x, y)$ полагают

$$f(x, y) \approx P(x, y).$$

Для удобства вычислений обычно вводят переменные

$$\frac{x - x_0}{h} = p, \quad \frac{y - y_0}{k} = q;$$

тогда

$$\frac{x - x_1}{h} = p - 1, \quad \frac{y - y_1}{k} = q - 1$$

и т.д. Отсюда формула (1.19) принимает вид

$$z \approx z_{00} + \left(p\Delta^{1+0} z_{00} + q\Delta^{0+1} z_{00} \right) + \frac{1}{2!} \left[p(p-1)\Delta^{2+0} z_{00} + 2pq\Delta^{1+1} z_{00} + q(q-1)\Delta^{0+2} z_{00} \right] + \dots, \quad (1.20)$$

где

$$x = x_0 + ph; \quad y = y_0 + qk.$$

Если положить $p = 0$ или $q = 0$, то формула (1.20) перейдет в соответствующую интерполяционную формулу Ньютона.

1.5.4. Приближенное вычисление частных производных

Если функция $z = f(x, y)$ задана на прямоугольной сетке:

$$x = x_0 + ih; \quad y = y_0 + jk$$

($i, j = 0, 1, 2, \dots$), то ее приближенно можно представить интерполяционной формулой

$$z = z_{00} + \left[p\Delta^{1+0} z_{00} + q\Delta^{0+1} z_{00} \right] + \frac{1}{2!} \left[p(p-1)\Delta^{2+0} z_{00} + 2pq\Delta^{1+1} z_{00} + q(q-1)\Delta^{0+2} z_{00} \right] + \frac{1}{3!} \left[p(p-1)(p-2)\Delta^{3+0} z_{00} + 3p(p-1)q\Delta^{2+1} z_{00} + 3pq(q-1)\Delta^{1+2} z_{00} + q(q-1)(q-2)\Delta^{0+3} z_{00} \right] + \dots, \quad (1.21)$$

где

$$p = \frac{x - x_0}{h}, \quad q = \frac{y - y_0}{k}$$

и $\Delta^{m+n} z_{00} = \Delta_{x^m y^n}^{m+n} z(0, 0)$ – смешанные двойные разности.

Из формулы (1.21) легко находятся частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial z}{\partial p}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{k} \frac{\partial z}{\partial q}.$$

и т.д.

1.6. Погрешности, возникающие при численном дифференцировании

При численном дифференцировании таблично заданной функции $y = f(x)$ возникают погрешности двух типов:

- погрешности усечения, которые вызываются заменой функции $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$;
- погрешности округления, которые вызываются неточным заданием исходных значений y_i ;

$$y'(x_0) = f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n y_0}{n} \right); \quad (1.22)$$

$$y'(x_0) = f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{-1} + \frac{\Delta^2 y_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 y_{-3}}{3} + \dots + \frac{\Delta^n y_{-n}}{n} \right). \quad (1.23)$$

Погрешности усечения для формул (1.22) и (1.23) оцениваются величиной $\frac{1}{n+1} h^n \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$, где ξ лежит в интервале (x_0, x_n) или (x_{-n}, x_0) соответственно. Эта оценка мало пригодна, так как обычно мы ничего не знаем даже о порядке величины $f^{(n+1)}(x)$. На практике для оценки погрешности усечения пользуются следующими соображениями.

Предполагают, что рассматриваемая функция $f(x)$ не имеет быстро колеблющихся составляющих (т.е. составляющих, период которых не превосходит величины шага h). При этом условии малость величины разностей определенного порядка свидетельствует о достаточно хорошем приближении функции $f(x)$ интерполяционным многочленом подходящей степени. Если разности порядка m различаются меньше чем на величину погрешности их округления (табл. 1.4), то считают, что эти разности практически постоянны. Разности более высоких порядков в формулах численного дифференцирования не применяют. При этом считают, что погрешность усечения не превосходит единицы младшего разряда значений y_i , деленной на h . Если же, как это часто делают, формулу обрывают раньше, чем указано выше, то отброшенные члены служат для

оценки погрешности округления. Например, если разности третьего порядка изменяются достаточно плавно, то погрешность усечения для формулы

$$y' \approx \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2h} = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \quad (1.24)$$

приближенно оценивается величиной $\frac{1}{6h} \left| \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} \right|$; если разности четвертого порядка изменяются достаточно плавно, то погрешность усечения для формулы

$$y'' \approx \frac{\Delta^2 y_{-1}}{h^2} = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} \quad (1.25)$$

приближенно оценивается величиной $\frac{1}{12h^2} \left| \Delta^4 y_{-2} \right|$.

Заметим, что все формулы оценки погрешности усечения содержат шаг расчета h в положительной степени, поэтому при уменьшении шага h погрешность усечения, как правило, *уменьшается*.

Таблица 1.4

Влияние абсолютной погрешности ε в значениях y_i на абсолютные погрешности их конечных разностей

Разность	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$...	$\Delta^k y_i$
Абсолютная погрешность	2ε	2ε	2ε	...	$2^k \varepsilon$

Погрешность округления обратно пропорциональна шагу расчета h в формулах для первой производной, обратно пропорциональна h^2 в формулах для второй производной и т.д. Поэтому при уменьшении шага расчета h погрешность округления увеличивается. Для оценки погрешности округления применяют обычные правила.

Если, например, абсолютные погрешности исходных значений y_i не превосходят ε , то абсолютные погрешности округления формул (1.24), (1.25), (1.26)

$$y'_0 = \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2h} - \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{12h} = \frac{y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2}{12h} \quad (1.26)$$

не превосходят соответственно величин

$$\frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h}, \quad \frac{18\varepsilon}{12h} = \frac{3\varepsilon}{2h}, \quad \frac{4\varepsilon}{h^2}.$$

Для формул типа

$$\left. \begin{aligned}
 y'_0 &\approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 \right) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}; \\
 y'_0 &\approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 \right) = \frac{-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3}{6h}; \\
 y'_0 &\approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 \right) = \\
 &= \frac{-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4}{12h},
 \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

погрешности округления несколько больше. Они составляют соответственно

$$\frac{8\varepsilon}{2h} = 4 \frac{\varepsilon}{h}, \quad \frac{40\varepsilon}{6h} = 6 \frac{2\varepsilon}{3h}, \quad \frac{128\varepsilon}{12h} = 10 \frac{2\varepsilon}{3h}.$$

Подчеркнем, что погрешности округления быстро возрастают с ростом порядка производной.

1.7. Выбор оптимального шага численного дифференцирования

Общая погрешность вычисления производной может рассматриваться как сумма погрешности усечения и погрешности округления. Так как с уменьшением шага расчета h погрешность усечения убывает, а погрешность округления возрастает, то существует оптимальный шаг расчета (разумеется, свой для каждой формулы численного дифференцирования). Так, для формулы (1.24) погрешность усечения не превосходит

$$\frac{h^2}{6} M_3 = \frac{h^2}{6} \max_{(x_{-1}, x_1)} |f'''(x)|,$$

а погрешность округления оценивается величиной

$$\frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h},$$

где ε — абсолютная погрешность исходных значений функции y_i . Суммарная погрешность оценивается величиной

$$\frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon}{h}.$$

Эта величина достигает наименьшего значения при условии

$$\left(\frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon}{h} \right)' = \frac{h}{3} M_3 - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0,$$

т.е. при $h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}$, что и определяет оптимальный шаг расчета для формулы (1.24). Полученную формулу для оптимального шага удобно записать в виде

$$\frac{h^2}{6} M_3 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{h} \quad (1.28)$$

или в виде

$$\frac{1}{6h} |\Delta^3 y| \approx \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{h}, \quad (1.29)$$

допускающем простое толкование: оптимальный шаг для формулы (1.24) определяется так, чтобы погрешность усечения составляла примерно половину погрешности округления (при этом полная погрешность не превзойдет $\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h}$).

Подобным же образом выбирается оптимальный шаг и для других формул численного дифференцирования. Для формулы (1.26) оптимальный шаг определяется так, чтобы погрешность усечения $\frac{1}{30h} |\Delta^5 y|$ была примерно равна 1/3 погрешности округления $\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h}$; при этом полная погрешность не превзойдет $2 \frac{\varepsilon}{h}$. Для формулы (1.25) оптимальный шаг определяется так, чтобы погрешность усечения $\frac{1}{12h^2} |\Delta^4 y|$ была примерно равна погрешности округления $4 \frac{\varepsilon}{h^2}$; при этом полная погрешность не превзойдет $8 \frac{\varepsilon}{h^2}$.

В приведенных выше формулах под значениями $|\Delta^3 y|$, $|\Delta^4 y|$, $|\Delta^5 y|$ подразумеваются некоторые средние (для данного участка таблицы) значения абсолютных величин разностей соответствующего порядка.

Глава 2

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

В этой главе рассматриваются методы приближенного интегрирования. Кроме постановки задачи, приводятся такие формулы приближенного интегрирования, как квадратурные формулы Ньютона–Котеса, в том числе и высших порядков, формула трапеций, формула Симпсона, квадратурные формулы Чебышева и Гаусса, экстраполяция по Ричардсону и формула Эйлера–Маклорена. Уделяется внимание приближенному вычислению несобственных интегралов и методу выделения особенностей Канторовича, а также графическому интегрированию. Отдельно описывается понятие кубатурных формул и рассматривается кубатурная формула типа Симпсона. Для расчета кратных интегралов приводятся методы повторного интегрирования и метод Л.А. Люстерника и В.А. Диткина. Метод Монте-Карло применительно к кратным интегралам рассматривается в последней главе, посвященной различным приложениям этого метода для решения прикладных задач.

2.1. Общие замечания

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2.1)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Однако во многих случаях первообразная функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной; вследствие этого вычисление определенного интеграла по формуле (2.1) может быть затруднительным или даже практически невыполнимым.

Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично, и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближенные, и в первую очередь численные, методы вычисления определенных интегралов.

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции.

Численное вычисление однократного интеграла называется *механической квадратурой*, двойного — *механической кубатурой*. Соответствующие формулы мы будем называть *квадратурными* и *кубатурными* формулами.

Сначала остановимся на численном вычислении однократных интегралов. Обычный прием механической квадратуры состоит в том, что данную функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ заменяют интерполирующей или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (2.2)$$

Функция $\varphi(x)$ должна быть такой, чтобы интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$ вычислялся непосредственно.

Если функция $f(x)$ задана аналитически, то ставится вопрос об оценке погрешности формулы (2.2).

Рассмотрим более подробно применение для этой цели интерполяционного полинома Лагранжа.

Пусть для функции $y = f(x)$ известны в $n + 1$ точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ отрезка $[a, b]$ соответствующие значения

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.3)$$

Требуется приближенно найти

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

По заданным значениям y_i построим полином Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} y_i, \quad (2.4)$$

где

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

причем $L_n(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Заменяя функцию $f(x)$ полиномом $L_n(x)$, получим равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_n(x) dx + R_n[f], \quad (2.5)$$

где $R_n[f]$ — ошибка квадратурной формулы (2.5) (остаточный член).

Отсюда, воспользовавшись выражением (2.4), получаем приближенную квадратурную формулу

$$\int_a^b y dx = \sum_{i=0}^n A_i y_i, \quad (2.6)$$

где

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} dx \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.7)$$

Если пределы интегрирования a и b являются узлами интерполирования, то квадратурная формула (2.6) называется «замкнутого типа», в противном случае — «открытого типа».

Для вычисления коэффициентов A_i заметим, что:

1) коэффициенты A_i при данном расположении узлов не зависят от выбора функции $f(x)$;

2) для полинома степени n формула (2.6) — точная, так как тогда $L_n(x) \equiv f(x)$; следовательно, в частности, формула (2.6) — точная при $y = x^k$ ($k = 0, 1, \dots, n$), т.е. $R_n[x^k] = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n$.

Полагая $y = x^k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) в формуле (2.6), получим линейную систему из $n + 1$ уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 = \sum_{i=0}^n A_i, \\ I_1 = \sum_{i=0}^n A_i x_i, \\ \dots\dots\dots \\ I_n = \sum_{i=0}^n A_i x_i^n, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

где

$$I_k = \int_0^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

из которой можно определить коэффициенты A_0, A_1, \dots, A_n .

Определитель системы (2.8) есть определитель Вандермонда

$$D = \prod_{i < j} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Заметим, что при применении этого метода фактическое построение полинома Лагранжа $L_n(x)$ является излишним.

Пример. Вывести квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 y dy = A_0 y\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 y\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 y\left(\frac{3}{4}\right). \quad (2.9)$$

Решение. Полагая в формуле (2.9)

$$y = x^k \quad (k = 0, 1, 2)$$

и учитывая, что

$$\int_0^1 dx = 1, \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

получим систему

$$\begin{cases} 1 = A_0 + A_1 + A_2, \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{4}A_2, \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{16}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{9}{16}A_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{2}{3}$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 y dx = \frac{2}{3}y\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}y\left(\frac{3}{4}\right). \quad (2.10)$$

Квадратурная формула (2.10) — открытого типа и является точной для всех полиномов степени не выше второй. Нетрудно убедиться, что формула (2.10) дает правильный результат и при $y = x^3$. Поэтому эта формула является точной также для полиномов третьей степени.

2.2. Квадратурные формулы Ньютона — Котеса

Пусть для данной функции $y = f(x)$ требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b y dx.$$

Выбрав шаг

$$h = \frac{b-a}{n},$$

разобьем отрезок $[a, b]$ с помощью равноотстоящих точек

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad x_n = b$$

на n равных частей, и пусть

$$y_i = f(x) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Заменяя функцию y соответствующим интерполяционным полиномом Лагранжа $L_n(x)$, получим приближенную квадратурную формулу

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx = \sum_{i=0}^n A_i y_i, \quad (2.11)$$

где A_i — некоторые постоянные коэффициенты.

Выведем явные выражения для коэффициентов A_i формулы (2.11).

Как известно,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) y_i, \quad (2.12)$$

где

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (2.13)$$

Введя обозначения

$$q = x - \frac{x_0}{h} \quad (2.14)$$

и

$$q^{[n+1]} = q(q-1)\dots(q-n), \quad (2.15)$$

будем иметь

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i. \quad (2.16)$$

Заменяя в формуле (2.11) функцию y полиномом $L_n(x)$, в силу формулы (2.16) получим

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dx$$

или, так как

$$q = \frac{x-x_0}{h}, \quad dq = \frac{dx}{h},$$

то, сделав замену переменных в определенном интеграле, будем иметь

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-1)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Так как

$$h = \frac{b-a}{n},$$

то обычно полагают

$$A_i = (b-a)H_i,$$

где

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-1)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.17)$$

– постоянные, называемые *коэффициентами Котеса*.
Квадратурная формула (2.11) при этом принимает вид

$$\int_a^b y dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i, \quad (2.18)$$

где

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{и} \quad y_i = f_i(a+ih) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Нетрудно убедиться, что справедливы соотношения:

- 1) $\sum_{i=0}^n H_i = 1;$
- 2) $H_i = H_{n-i}.$

2.3. Формула трапеций и ее остаточный член

Применяя формулу (2.17) предыдущего раздела, при $n = 1$ имеем:

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = \frac{1}{2};$$

$$H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1). \quad (2.19)$$

Мы получили известную формулу трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла (рис. 2.1).

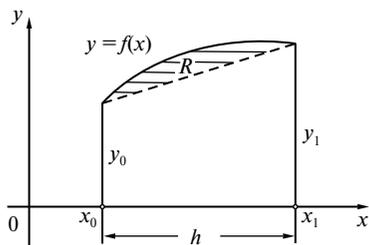


Рис. 2.1. Приближенное вычисление определенного интеграла

Остаточный член (ошибка) квадратурной формулы (2.19) равен

$$R = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1).$$

Предполагая, что $y \in C^{(2)}[a, b]$, выведем простую формулу для остаточного члена. Будем рассматривать $R = R(h)$ как функцию шага h ; тогда можно положить

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx - \frac{h}{2}[y(x_0) + y(x_0 + h)].$$

Дифференцируя эту формулу по h последовательно два раза, получим

$$\begin{aligned} R'(h) &= y(x_0 + h) - \frac{1}{2}[y(x_0) + y(x_0 + h)] - \frac{h}{2}y'(x_0 + h) = \\ &= \frac{1}{2}[y(x_0 + h) - y(x_0)] - \frac{h}{2}y'(x_0 + h) \end{aligned}$$

и

$$R''(h) = \frac{1}{2}y'(x_0 + h) - \frac{1}{2}y'(x_0 + h) - \frac{h}{2}y''(x_0 + h) = -\frac{h}{2}y''(x_0 + h),$$

причем $R(0) = 0$, $R'(0) = 0$.

Отсюда, интегрируя по h и используя теорему о среднем, последовательно выводим

$$\begin{aligned} R'(h) &= R'(0) + \int_0^h R''(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^h t y''(x_0 + t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} y''(\xi_1) \int_0^h t dt = -\frac{h^2}{4} y''(\xi_1), \end{aligned}$$

где $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$, и

$$\begin{aligned} R(h) &= R(0) + \int_0^h R'(t) dt = -\frac{1}{4} \int_0^h t^2 y''(x_0 + t) dt = \\ &= -\frac{1}{4} y''(\xi) \int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12} y''(\xi), \end{aligned}$$

где $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

Таким образом, окончательно имеем

$$R = -\frac{h^3}{12} y''(\xi), \quad (2.20)$$

где $\xi \in (x_0, x_1)$.

Отсюда, в частности, следует, что если $y'' > 0$, то формула (2.19) дает значение интеграла с избытком, если же $y'' < 0$ — то с недостатком.

2.4. Формула Симпсона и ее остаточный член

Из формулы

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-1)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

при $n=2$ получаем:

$$H_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 (q-1)(q-2) dq = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{1}{6};$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \int_0^2 q(q-2) dq = \frac{2}{3};$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 q(q-1) dq = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, так как $x_2 - x_0 = 2h$, имеем

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (2.21)$$

Формула (2.21) носит название *формулы Симпсона*. Геометрически эта формула получается в результате замены данной кривой $y = f(x)$ параболой $L_2 = f(x)$, проходящей через три точки (рис. 2.2)

$M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$,

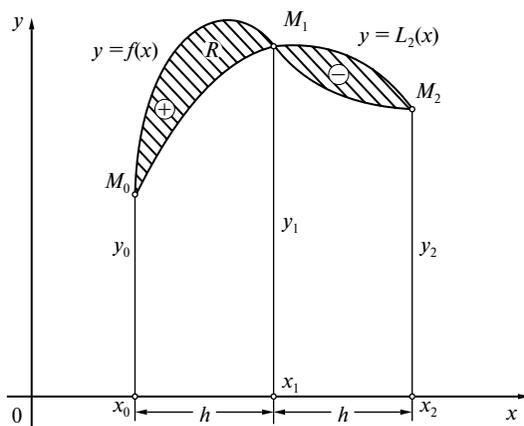


Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация формулы Симпсона

Остаточный член формулы Симпсона равен

$$R = \int_{x_0}^{x_2} y dx - \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Предполагая, что $y \in C^{(4)}[a, b]$, аналогично тому как это делалось для формулы трапеций, выведем более простое выражение для R . Фиксируя среднюю точку x_1 и рассматривая $R = R(h)$ как функцию шага $h(h \geq 0)$, будем иметь

$$R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} y dx - \frac{h}{3} [y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)].$$

Отсюда, дифференцируя функцию $R(h)$ по h последовательно три раза, получим:

$$\begin{aligned} R'(h) &= [y(x_1+h) + y(x_1-h)] - \frac{1}{3} [y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)] - \\ & - \frac{h}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] = \frac{2}{3} [y(x_1-h) + y(x_1+h)] - \frac{4}{3} y(x_1) - \\ & - \frac{h}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R''(h) &= \frac{2}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] - \frac{1}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] - \\ & - \frac{h}{3} [y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] = \frac{1}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] - \\ & - \frac{h}{3} [y''(x_1-h) + y''(x_1+h)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'''(h) &= \frac{1}{3} [y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] - \frac{1}{3} [y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] - \\ & - \frac{h}{3} [y'''(x_1-h) + y'''(x_1+h)] = -\frac{h}{3} [y'''(x_1+h) - y'''(x_1-h)] = \\ & = -\frac{2h^2}{3} y^{IV}(\xi_3), \end{aligned}$$

где $\xi_3 \in (x_1-h, x_1+h)$.

Кроме того, имеем $R(0) = 0$, $R'(0) = 0$, $R''(0) = 0$.

Последовательно интегрируя $R'''(h)$, используя теорему о среднем, находим:

$$\begin{aligned} R''(h) &= R''(0) + \int_0^h R'''(t) dt = -\frac{2}{3} \int_0^h t^2 y^{IV}(\xi_3) dt = \\ & = -\frac{2}{3} y^{IV}(\xi_2) \int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9} h^3 y^{IV}(\xi_2), \end{aligned}$$

где $\xi_2 \in (x_1-h, x_1+h)$;

$$\begin{aligned}
 R'(h) &= R'(0) + \int_0^h R''(t) dt = -\frac{2}{9} \int_0^h t^3 y^{IV}(\xi_2) dt = \\
 &= -\frac{2}{9} y^{IV}(\xi_1) \int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18} h^4 y^{IV}(\xi_1),
 \end{aligned}$$

где $\xi_1 \in (x_1 - h, x_1 + h)$;

$$\begin{aligned}
 R(h) &= R(0) + \int_0^h R'(t) dt = -\frac{1}{18} \int_0^h t^4 y^{IV}(\xi_1) dt = \\
 &= -\frac{1}{18} y^{IV}(\xi) \int_0^h t^4 dt = -\frac{1}{90} h^5 y^{IV}(\xi),
 \end{aligned}$$

где $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h)$.

Таким образом, остаточный член формулы Симпсона равен

$$R = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_2)$.

Следовательно, эта формула является точной для полиномов не только второй, но и третьей степени, т.е. формула Симпсона при относительно малом числе ординат обладает повышенной точностью.

2.5. Формулы Ньютона — Котеса высших порядков

Производя соответствующие вычисления при $n = 3$, получим из формулы

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-1)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

квадратурную формулу Ньютона (правило трех восьмых):

$$\int_{x_0}^{x_3} y dx = \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3).$$

Остаточный член формулы в этом случае равен

$$R = -\frac{3h^5}{80} y^{IV}(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_2)$, т.е. при одинаковом шаге формула Ньютона менее точна, чем формула Симпсона.

Заметим, что ошибка формулы Ньютона — Котеса с $n+1$ ординатами при достаточной гладкости функции $y = f(x)$ по меньшей мере имеет порядок

$$R = O \left[h^{2E\left(\frac{n}{2}\right)+3} \right],$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ — целая часть дроби $\frac{n}{2}$.

Отсюда видно, что в смысле порядка точности квадратурные формулы с нечетным числом ординат являются более выигрышными.

Таблица 2.1

Коэффициенты Котеса

n	\hat{H}_0	\hat{H}_1	\hat{H}_2	\hat{H}_3	\hat{H}_4	\hat{H}_5	\hat{H}_6	\hat{H}_7	\hat{H}_8	Общий знаменатель N
1	1	1								2
2	1	4	1							6
3	1	3	3	1						8
4	7	32	12	32	7					90
5	19	75	50	50	75	19				288
6	41	216	27	272	27	216	41			840
7	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751		17 280
8	989	5888	-928	10 496	-4540	10 496	-928	5888	989	28 350

Приводим для справок таблицу коэффициентов Котеса (табл. 2.1). Для удобства записи коэффициенты Котеса для каждого n представлены в виде дробей

$$H_i = \frac{\hat{H}_i}{N}$$

с общим знаменателем N . Для контроля заметим, что

$$\sum_{i=0}^n \hat{H}_i = N.$$

Следует обратить внимание на то, что коэффициенты Котеса при больших n могут быть отрицательными (например, $n = 8$).

2.6. Общая формула трапеций (правило трапеций)

Для вычисления интеграла

$$\int_a^b y dx$$

разделим промежуток интегрирования $[a, b]$ на n равных частей $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ и к каждому из них применим формулу трапеций. Полагая $h = \frac{b-a}{n}$ и обозначая через $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ значения подынтегральной функции в точках x_i , будем иметь

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

или

$$\int_a^b y dx = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right). \quad (2.22)$$

Геометрически формула (2.22) получается в результате замены графика подынтегральной функции $y = f(x)$ ломаной линией (рис. 2.3).

Если $y \in C^{(2)} [a, b]$, то остаточный член квадратурной формулы (2.22) в силу (2.20) равен

$$\begin{aligned} R &= \int_{x_0}^{x_n} y dx - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) = \sum_{i=1}^n \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} y dx - \frac{h}{2} (y_{i-1} + y_i) \right] = \\ &= -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n y''(\xi_i), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

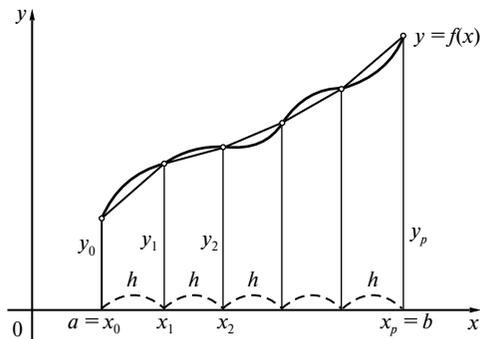


Рис. 2.3. Геометрическая интерпретация общей формулы трапеций

Рассмотрим среднее арифметическое

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y''(\xi_i). \quad (2.24)$$

Очевидно, μ заключается между наименьшим m_2 и наибольшим M_2 значениями второй производной y'' на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$m_2 \leq \mu \leq M_2.$$

Так как y'' непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в качестве своих значений на $[a, b]$ она принимает все промежуточные числа между m_2 и M_2 . Следовательно, найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\mu = f''(\xi).$$

Из формул (2.23) и (2.24) имеем

$$R = -\frac{nh^3}{12} y''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi),$$

где $\xi \in [a, b]$.

2.7. Общая формула Симпсона (параболическая формула)

Пусть $n = 2m$ есть четное число и $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) — значения функции $y = f(x)$ для равноотстоящих точек $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ с шагом

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}.$$

Применяя формулу Симпсона к каждому удвоенному промежутку $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$ длины $2h$ (рис. 2.4), будем иметь

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Отсюда получаем *общую формулу Симпсона*

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3} \left[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) \right]. \quad (2.25)$$

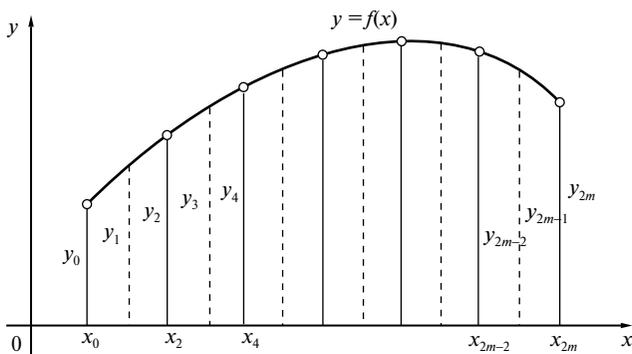


Рис. 2.4. Геометрическая интерпретация применения общей формулы Симпсона

Введя обозначения

$$\sigma_1 = y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1},$$

$$\sigma_2 = y_2 + y_4 + \dots + y_{2m},$$

формулу (2.25) можно записать в более простом виде:

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_n) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2]. \quad (2.25')$$

Если $y \in C^{(4)} [a, b]$, то ошибка формулы Симпсона на каждом удвоенном промежутке $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ($k = 1, 2, \dots, m$) определяется формулой

$$r^k = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi_k),$$

где $\xi_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$.

Суммируя все эти ошибки, получим остаточный член общей формулы Симпсона в виде

$$R = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^m y^{IV}(\xi_k).$$

Так как $y^{IV}(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$y^{IV}(\xi) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y^{IV}(\xi_k).$$

Поэтому будем иметь

$$R = -\frac{mh^5}{90} y^{IV}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{IV}(\xi), \quad (2.26)$$

где $\xi \in [a, b]$.

Если задана предельная допустимая погрешность $\varepsilon > 0$, то, обозначив

$$M_4 = \max |y^{IV}(x)|,$$

будем иметь для определения шага h неравенство

$$(b-a) \frac{h^4}{180} M_4 < \varepsilon.$$

Отсюда

$$h < \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}},$$

т.е. h имеет порядок $\sqrt[4]{\varepsilon}$.

Во многих случаях оценка погрешности квадратурной формулы Симпсона (2.25) по формуле (2.26) весьма затруднительна. Тогда обычно применяют двойной пересчет с шагами h и $2h$ и считают, что совпадающие десятичные знаки принадлежат точному значению интеграла.

Можно указать еще один практически удобный способ подсчета ошибки квадратурной формулы Симпсона. Предполагая, что на отрезке $[a, b]$ производная $y^{IV}(x)$ меняется медленно, в силу формулы (2.26) получаем приближенное выражение для искомой ошибки:

$$R = Mh^4,$$

где коэффициент M будем считать постоянным.

Пусть Σ_h и Σ_H — приближенные значения интеграла

$$I = \int_a^b y dx,$$

полученные по формуле Симпсона соответственно с шагом h и шагом $H = 2h$. Имеем

$$I = \Sigma_h + Mh^4$$

и

$$I = \Sigma_H + M(2h)^4.$$

Отсюда

$$R = \frac{\Sigma_h - \Sigma_H}{15}.$$

За приближенное значение интеграла I целесообразно принять исправленное значение

$$I = \Sigma_h + \frac{\Sigma_h - \Sigma_H}{15}.$$

Заметим, что если число делений n кратно 4, то для вычисления суммы Σ_H можно воспользоваться имеющимися табличными значениями, делая выборку значений через одно.

2.8. Понятие о квадратурной формуле Чебышева

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n B_i f(t_i), \quad (2.27)$$

где B_i — постоянные коэффициенты.

Чебышев предложил выбрать абсциссы t_i таким образом, чтобы:

- 1) коэффициенты B_i были равны между собой;
- 2) квадратурная формула (2.27) являлась точной для всех полиномов до степени n включительно.

Покажем, как могут быть найдены в этом случае величины B_i и t_i .
 Полагая

$$B_1 = B_2 = \dots = B_n = B$$

и учитывая, что при $f(t) \equiv 1$ будем иметь

$$2 = \sum_{i=1}^n B_i,$$

получаем

$$B = \frac{2}{n}.$$

Следовательно, *квадратурная формула Чебышева* имеет вид

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i). \quad (2.28)$$

Для определения абсцисс t_i заметим, что формула (2.28), согласно условию 2), должна быть точной для функций вида

$$f(t) = t, t^2, \dots, t^n.$$

Подставляя эти функции в формулу (2.28), получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = \frac{n}{3}, \\ t_1^3 + t_2^3 + \dots + t_n^3 = 0, \\ t_1^4 + t_2^4 + \dots + t_n^4 = \frac{n}{5}, \\ \dots\dots\dots \\ t_1^n + t_2^n + \dots + t_n^n = \frac{n \left[1 - (-1)^{n+1} \right]}{2(n+1)}, \end{array} \right. \quad (2.29)$$

из которой могут быть определены неизвестные t_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Чебышев показал, что решение системы (2.29) сводится к нахождению корней некоторого алгебраического уравнения степени n .

В табл. 2.2 приведены значения корней t системы (2.29) для $n=2,3, \dots, 7$.

Таблица 2.2

Значения абсцисс t_i в формуле Чебышева

n	i	t_i	n	i	t_i
2	1; 2	0,577350	6	1; 6	0,866247
3	1; 3	0,707107		2; 5	0,422519
	2	0		3; 4	0,266637
4	1; 4	0,794654	7	1; 7	0,883862
	2; 3	0,187592		2; 6	0,529657
5	1; 5	0,832498		3; 5	0,323912
	2; 4	0,374541		4	0
	3	0			

Заметим, что система (2.29), как показал С.Н. Бернштейн, при $n = 8$ и $n \geq 10$ не имеет действительных решений. В этом состоит принципиальный недостаток квадратурной формулы Чебышева.

2.9. Квадратурная формула Гаусса

Полиномы вида

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] \quad (n=1, 2, \dots)$$

называются *полиномами Лежандра*.

Отметим важнейшие свойства полиномов Лежандра:

$$1) \quad P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n \quad (n=0, 1, \dots);$$

$$2) \quad \int_{-1}^1 P_n(x) \cdot Q_k(x) dx = 0 \quad (k < n),$$

где $Q_k(x)$ — любой полином степени k , меньшей n ;

3) полином Лежандра $P_k(x)$ имеет n различных и действительных корней, которые расположены на интервале $(-1, 1)$.

Ниже приведены первые пять полиномов Лежандра и их графики (рис. 2.5):

$$P_0(x) = 1;$$

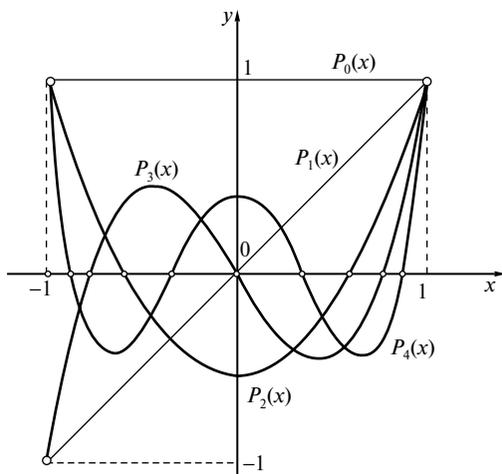


Рис. 2.5. Графики первых пяти полиномов Лежандра

$$P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Перейдем к выводу квадратурной формулы Гаусса.

Рассмотрим сначала функцию $y = f(t)$, заданную на стандартном промежутке $[-1, 1]$. Общий случай легко свести к нашему путем линейной замены независимой переменной.

Поставим задачу: как нужно подобрать точки t_1, t_2, \dots, t_n и коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n , чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (2.30)$$

была точной для всех полиномов $f(t)$ наивысшей возможной степени N .

Так как в нашем распоряжении имеется $2n$ постоянных t_i и A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а полином степени $2n - 1$ определяется $2n$ коэффициен-

тами, то эта наивысшая степень в общем случае, очевидно, равна $N = 2n - 1$.

Для обеспечения равенства (2.30) необходимо и достаточно, чтобы оно было верным при

$$f(x) = 1, t, t^2, \dots, t^{2n-1}.$$

Действительно, полагая

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1) \quad (2.31)$$

и

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k,$$

будем иметь

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^n A_i t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i).$$

Таким образом, учитывая соотношения

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1} & \text{при } k \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } k \text{ нечетном,} \end{cases}$$

закключаем, что для решения поставленной задачи достаточно определить t_i , и A_i из системы $2n$ уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n A_i = 2, \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1}, \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Система (2.32) — нелинейная, и решение ее обычным путем представляет большие математические трудности. Однако здесь можно применить следующий искусственный прием.

Рассмотрим полиномы

$$f(t) = t^k P_n(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

где $P_n(t)$ — полином Лежандра.

Так как степени этих полиномов не превышают $2n - 1$, то на основании системы (2.32) для них должна быть справедлива формула (2.30) и

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2.33)$$

С другой стороны, в силу свойства ортогональности полиномов Лежандра (свойство 2)) выполнены равенства

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = 0 \quad \text{при } k < n;$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2.34)$$

Равенства (2.34) заведомо будут обеспечены при любых значениях A_i , если положить

$$P_n(t_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.35)$$

т.е. для достижения наивысшей точности квадратурной формулы (2.30) в качестве точек t_i достаточно взять нули соответствующего полинома Лежандра. Как известно (свойство 3)), эти нули действительны, различны и расположены на интервале $(-1, 1)$. Зная абсциссы t_i , легко можно найти из линейной системы первых n уравнений системы (2.32) коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Определитель этой подсистемы есть определитель Вандермонда

$$D = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \neq 0$$

и следовательно, A_i определяются однозначно.

Формула (2.30), где t_i — нули полинома Лежандра, $P_n(t)$ и A_i ($i=1, 2, \dots, n$) определяются из системы (2.32), называется *квадратурной формулой Гаусса*.

2.10. Некоторые замечания о точности квадратурных формул

Рассмотренные нами квадратурные формулы имеют следующую структуру:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R[f], \quad (2.36)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — данная система узлов из отрезка интегрирования $[a, b]$; A_i — некоторые известные постоянные коэффициенты и $R[f]$ — остаточный член.

При одном и том же числе ординат точность различных квадратурных формул различна.

Пример. Сравнить точность различных квадратурных формул с тремя ординатами для интегралов

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{2+x} dx = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} = 2,797435\dots$$

Решение. Применяя формулу Симпсона, получим

$$I \approx \frac{1}{3} [\sqrt{2-1} + 4\sqrt{2+0} + \sqrt{2+1}] = \frac{1}{3} \cdot 8,428905 = 2,809635.$$

Формула Чебышева дает такой результат:

$$I \approx \frac{2}{3} \left[\sqrt{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{2+0} + \sqrt{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \right] = \frac{2}{3} \cdot 4,220097 = 2,813398.$$

Наконец, формула Гаусса приводит к следующему значению:

$$I \approx 0,555566 (\sqrt{2-0,774597} + \sqrt{2+0,774597}) + 0,888889\sqrt{2+0} = 2,797460.$$

Таким образом, здесь формула Гаусса оказывается наиболее точной.

Мы ограничимся исследованием квадратурных формул с равноотстоящими узлами; к числу их относятся наиболее распространенные формулы: трапеций, Симпсона, Ньютона–Котеса. В этом случае точность квадратурной формулы в основном характеризуется порядком остаточного члена

$$R = O(h^m), \quad (2.37)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$ — шаг (n — число делений) и m — натуральное число. Например, для формулы трапеций имеем

$$R[f] = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \quad \text{поэтому } m = 2;$$

для формулы Симпсона

$$R[f] = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{IV}(\xi), \quad \text{отсюда } m = 4.$$

Квадратурная формула считается тем точнее, чем больше число m ; в этом смысле формула Симпсона является более точной, нежели формула трапеций. Качество формулы обнаруживается при достаточно малом шаге h .

Отсюда вовсе не следует, что в конкретных случаях более грубая квадратурная формула при одном и том же шаге не может дать лучших результатов, чем более точная. Например, для функции (рис. 2.6)

$$f(x) = -8 + 45x^2 - 25x^4$$

имеем

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2(-8 + 15 - 5) = 4.$$

При $h = 1$ формула трапеций дает точное значение

$$I_1 = \frac{1}{2} f(-1) + f(0) + \frac{1}{2} f(1) = 6 - 8 + 6 = 4,$$

тогда как формула Симпсона при $h = 1$ не обеспечивает даже знака интеграла:

$$I_2 = \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)] = \frac{1}{3} (12 - 32 + 12) = -\frac{8}{3}.$$

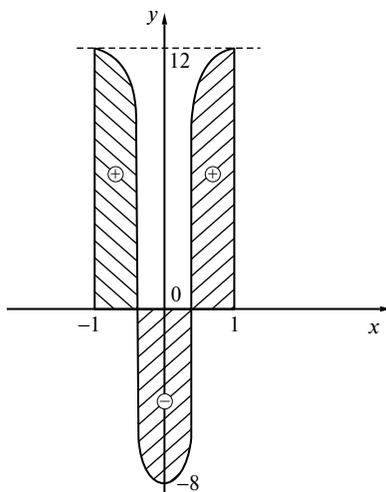


Рис. 2.6. Функция $f(x) = -8 + 45x^2 - 25x^4$

Точность квадратурной формулы при фиксированном числе узлов существенно зависит от расположения этих узлов. При неудачном расположении узлов квадратурная формула может дать сильно искаженные результаты.

Например, для функции $y = f(x)$, изображенной на рис. 2.7, выбирая равноотстоящие узлы $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = b$ и пользуясь соответствующей формулой Котеса для пяти ординат, получим

$$I = \int_a^b f(x) dx < 0,$$

тогда как очевидно, что $I > 0$.

Не представляет большого труда построить аналогичные примеры для любой квадратурной формулы с произвольным числом ординат.

Вообще, при наличии значительного числа нулей подынтегральной функции $f(x)$ или при большом числе ее экстремумов (т.е. когда имеется много нулей производной $f'(x)$), благодаря неизбежным большим значениям старших производных точность квадратурных формул сильно понижается.

Поэтому шаг h следует выбирать так, чтобы он был намного меньше расстояний между соседними нулями функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$. Для этого рекомендуется основной отрезок интегрирования $[a, b]$ разбить на частичные отрезки $[\alpha, \beta]$, внутри каждого

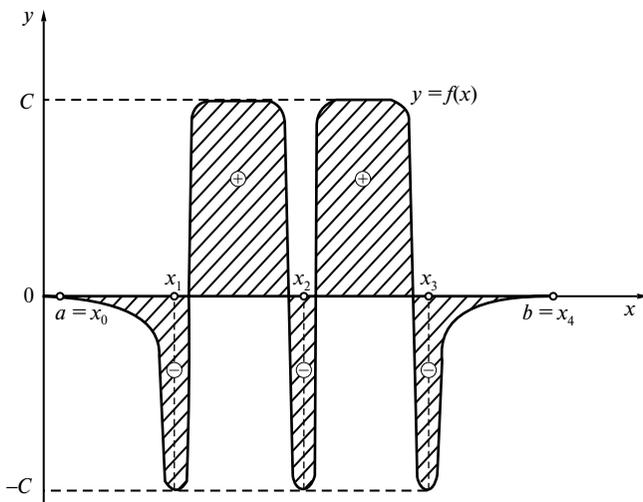


Рис. 2.7. Функция $y = f(x)$

из которых функции $f(x)$ и $f'(x)$ сохраняют постоянный знак (если это возможно), и производить вычисление интеграла частями, выбирая для каждого частичного отрезка, вообще говоря, свой шаг. В более сложных случаях нужно учитывать также поведение производных высших порядков $f^{(n)}(x)$ ($n \geq 2$). Для общей ориентировки полезно предварительно построить график подынтегральной функции $y = f(x)$. Если функция сильно колеблющаяся, то следует применять специальные приемы вычислений. Разработаны также общие приемы увеличения точности квадратурных формул.

При нахождении *полной предельной* погрешности квадратурной формулы (2.36) следует учесть также *погрешность суммирования* R_1 . Пусть слагаемые $f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) вычислены с абсолютной погрешностью, не превышающей ε , а коэффициенты A_i квадратурной формулы являются точными положительными постоянными. Тогда можно положить

$$R_1 \leq \sum_{i=1}^n A_i \varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^n A_i. \quad (2.38)$$

Так как квадратурная формула (2.36) верна для $f(x) \equiv 1$, то

$$\int_a^b dx = b - a = \sum_{i=1}^n A_i.$$

Поэтому из формулы (2.38) имеем

$$R_1 \leq (b-a)\varepsilon. \quad (2.39)$$

Следовательно, полная предельная погрешность квадратурной формулы без учета заключительной погрешности округления равна

$$\bar{R} = (b-a)\varepsilon + |R[f]|,$$

где $|R[f]|$ — погрешность метода, которая может быть определена указанным выше способом.

Заметим, что если подынтегральная функция $y = f(x)$ задана таблично значениями $y_i = f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то, строго говоря, мы лишены возможности оценить точность квадратурной формулы (2.36). Дело в том, что через конечную систему точек $M_i(x_i, y_i)$ можно провести бесчисленное множество кривых $y = f(x)$ (рис. 2.8), ограничивающих на данном отрезке $[a, b]$ различные площади, т.е. интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

априори может иметь совершенно произвольное значение (см. рис. 2.7).

Пользование в этом случае квадратурными формулами допустимо лишь тогда, если нам в какой-то мере известны неиспользованные промежуточные значения подынтегральной функции и ее общие свойства, позволяющие судить о характере графика функции.

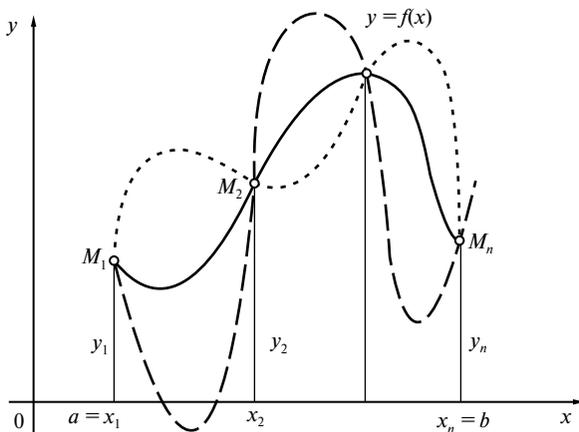


Рис. 2.8. Множество кривых $y = f(x)$

2.11. Экстраполяция по Ричардсону

Если для квадратурной формулы (2.36) известен порядок остаточного члена $R = R[f]$, то для определения величины R можно использовать метод двойного пересчета.

Пусть

$$R = O(h^m) \quad (m \geq 1),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$ (n — число делений);

тогда приближенно можно положить

$$R = Mh^m, \quad (2.40)$$

где M — некоторая величина, которую для данной подынтегральной функции $f(x)$ будем считать постоянной на промежутке интегрирования $[a, b]$. Выберем два различных шага

$$h_1 = \frac{b-a}{n_1} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{b-a}{n_2},$$

где n_1 и n_2 ($n_2 > n_1$) — количество частичных отрезков в первом и во втором случаях.

Обозначим через I_{n_1} и I_{n_2} соответствующие приближенные значения интеграла I . Из формулы (2.40) имеем

$$R_{n_1} = I - I_{n_1} = M \left(\frac{b-a}{n_1} \right)^m \quad (2.41)$$

и

$$R_{n_2} = I - I_{n_2} = M \left(\frac{b-a}{n_2} \right)^m, \quad (2.41')$$

где R_{n_1} и R_{n_2} — соответствующие остаточные члены.

Отсюда

$$I_{n_2} - I_{n_1} = M(b-a)^m \left(\frac{1}{n_1^m} - \frac{1}{n_2^m} \right)$$

и, следовательно,

$$M = \frac{(n_1 n_2)^m}{(b-a)^m} \cdot \frac{I_{n_2} - I_{n_1}}{n_2^m - n_1^m}.$$

На основании формулы (2.40) получаем выражение для остаточного члена:

$$R = \left(\frac{n_1 n_2}{n} \right)^m \cdot \frac{I_{n_2} - I_{n_1}}{n_2^m - n_1^m}.$$

В частности, при $h = h_2$, т. е. при $n = n_2$, имеем

$$R_{n_2} = \frac{n_1^m}{n_2^m - n_1^m} (I_{n_2} - I_{n_1}). \quad (2.42)$$

Пользуясь поправкой (2.42), в силу формулы (2.41') для интеграла I получаем уточненное значение:

$$I_{n_1, n_2} = I_{n_2} + \frac{n_1^m}{n_2^m - n_1^m} (I_{n_2} - I_{n_1}). \quad (2.43)$$

Этот прием называется *экстраполяцией по Ричардсону*. Введя обозначение

$$\frac{n_2}{n_1} = \alpha \quad (\alpha > 1),$$

будем иметь

$$I_{n_1, n_2} = I_{n_2} + \beta (I_{n_2} - I_{n_1}), \quad (2.44)$$

где
$$\beta = \frac{1}{\alpha^m - 1}. \quad (2.45)$$

Коэффициенты β табулированы для различных значений α и m . Заметим, что для формулы трапеций $m = 2$, а для формулы Симпсона $m = 4$. Частный случай формулы (2.44) был приведен ранее в этой главе.

Покажем, что если $I_{n_1} \neq I_{n_2}$ то I_{n_1, n_2} всегда лежит вне отрезка $[I_{n_1}, I_{n_2}]$.

Действительно, если

$$I_{n_2} > I_{n_1},$$

то из формулы (2.44) имеем

$$I_{n_1, n_2} > I_{n_2} = \max \{ I_{n_1}, I_{n_2} \}.$$

Если же

$$I_{n_2} < I_{n_1},$$

то из той же формулы (2.44) получаем

$$I_{n_1, n_2} = I_{n_2} - \beta(I_{n_1} - I_{n_2}) < I_{n_2} = \min\{I_{n_1}, I_{n_2}\}.$$

Таким образом,

$$I_{n_1, n_2} \in [I_{n_1}, I_{n_2}],$$

т.е. I_{n_1, n_2} получается из I_{n_1} и I_{n_2} в результате операции экстраполирования. Этим и объясняется название способа.

Если $I_{n_1} = I_{n_2}$, то, очевидно,

$$I_{n_1, n_2} = I_{n_1} = I_{n_2}.$$

Можно показать, что при достаточной гладкости подынтегральной функции $f(x)$ порядок остаточного члена для I_{n_1, n_2} равен по меньшей мере $m + 1$.

Замечание. Для функций, не имеющих особенностей, экстраполирование, как правило, повышает точность вычислений.

Можно также вывести более точные формулы экстраполирования, использующие значения I_{n_1} , I_{n_2} и I_{n_3} искомого интеграла, соответствующие трем различным шагам

$$h_3 = \frac{b-a}{n_s} \quad (s=1, 2, 3)$$

и учитывающие два первых члена разложения остаточного члена квадратурной формулы.

2.12. Числа Бернулли

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}. \quad (2.46)$$

Воспользовавшись известным разложением

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

можно записать:

$$f(x) = \frac{x}{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}. \quad (2.47)$$

Отсюда ясно, что функция $f(x)$ в окрестности $x = 0$ допускает разложение в степенной ряд, который для удобства дальнейших выкладок представим в следующем виде:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \quad (2.48)$$

где $B_0 = f(0) = 1$.

Для определения остальных коэффициентов разложения B_n ($n = 1, 2, \dots$), носящих название *чисел Бернулли*, используем получаемое на основании формулы (2.47) тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \equiv 1.$$

Производя перемножение степенных рядов и приравнявая нулю коэффициенты при положительных степенях переменной x , будем иметь бесконечную систему линейных уравнений

$$\frac{B_n}{n!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \frac{B_0}{0!} \frac{1}{(n+1)!} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

или, умножая на $(n+1)!$ и учитывая, что

$$\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = C_{n+1}^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1),$$

получим

$$C_{n+1}^1 B_n + C_{n+1}^2 B_{n-1} + \dots + C_{n+1}^n B_1 + 1 = 0. \quad (2.49)$$

Если условно положить

$$B_k = B^k, \quad (2.50)$$

то формулу (2.49) кратко можно записать в следующем символическом виде:

$$(B+1)^{n+1} - B^{n+1} = 0$$

или, заменяя $n + 1$ на n ,

$$(B+1)^n - B^n = 0. \quad (2.51)$$

Полагая $n=2,3,4, \dots$ в формуле (2.51), получим бесконечную систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2B_1 + 1 &= 0, \\ 3B_2 + 3B_1 + 1 &= 0, \\ 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 &= 0, \\ 5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + 1 &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Отсюда последовательно находим:

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2}; & B_2 &= \frac{1}{6}; & B_3 &= 0; & B_4 &= -\frac{1}{30}; \\ B_5 &= 0; & B_6 &= \frac{1}{42}; & B_7 &= 0; & B_8 &= -\frac{1}{30}; \\ B_9 &= 0; & B_{10} &= \frac{5}{66}; & B_{11} &= 0; & B_{12} &= -\frac{691}{2730}; \\ B_{13} &= 0; & B_{14} &= \frac{7}{6}; & B_{15} &= 0; & B_{16} &= -\frac{3617}{510}; \\ B_{17} &= 0; & B_{18} &= \frac{43\,867}{798}; & B_{19} &= 0; & B_{20} &= -\frac{174\,611}{330} \end{aligned}$$

и т.д.

Таким образом, числа Бернулли могут быть шаг за шагом определены из символической формулы (2.51), причем после развертывания бинома по правилу Ньютона степени чисел B должны быть заменены числами Бернулли с соответствующими индексами.

Функция (2.46) называется *производящей функцией* чисел Бернулли. Воспользовавшись обозначением (2.50), разложение (2.47) символически можно записать следующим образом:

$$\frac{x}{e^x - 1} = e^{Bx}.$$

Из структуры системы (2.52) очевидно, что все числа Бернулли рациональны. Кроме того, обнаружилось, что числа Бернулли с нечетными индексами, кроме B_1 , равны нулю. Докажем это свойство в общем виде. Учитывая, что

$$B_0 = 1 \quad \text{и} \quad B_1 = \frac{1}{2},$$

имеем

$$\varphi(x) = \frac{x}{e^x - 1} - B_1 x = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \quad (2.53)$$

Очевидно,

$$\varphi(x) = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2}$$

есть функция четная. Поэтому ее разложение (2.53) содержит лишь четные степени переменной x и, следовательно,

$$B_n = 0 \quad \text{при} \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

Числа Бернулли находят применения во многих вопросах. В частности, они используются в важной формуле Эйлера–Маклорена, к выводу которой мы переходим.

2.13. Формула Эйлера — Маклорена

Пусть $y = f(x)$ — некоторая функция, определенная в области $x \geq x_0$. Рассмотрим оператор *конечной разности*

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$

где h — фиксированная положительная величина.

Под *обратным оператором* $\frac{1}{\Delta}$ от функции $f(x)$ естественно понимается функция $F(x)$, удовлетворяющая конечно-разностному уравнению

$$\Delta F(x) = f(x). \quad (2.54)$$

Таким образом, из уравнения (2.54) имеем

$$F(x) = \frac{1}{\Delta} f(x). \quad (2.55)$$

Если функция $f(x)$ рассматривается на множестве равноотстоящих точек x_0, x_1, x_2, \dots , где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$ ($i=0, 1, 2, \dots$), то обратный оператор $F(x_i) = \frac{1}{\Delta} f(x_i)$ легко построить. Действительно, составим конечную сумму

$$S(x_i) = \sum_{j=0}^{i-1} f(x_j) \quad (i=1, 2, \dots),$$

причем будем условно считать, что $S(x_0) = 0$. Очевидно получаем

$$\Delta S(x_i) = S(x_{i+1}) - S(x_i) = f(x_i). \quad (2.56)$$

С другой стороны, согласно уравнению (2.54) имеем

$$\Delta F(x_i) = f(x_i). \quad (2.57)$$

Вычитая из равенства (2.57) равенство (2.56), находим

$$\Delta[F(x_i) - S(x_i)] = 0$$

при $i=0, 1, 2, \dots$. Следовательно, разность $F(x_i) - S(x_i)$ не зависит от индекса i и мы можем положить

$$F(x_i) - S(x_i) = F(x_0) - S(x_0) = F(x_0).$$

Отсюда

$$F(x_i) = F(x_0) + S(x_i),$$

где $F(x_0)$ — произвольная постоянная величина.

Итак,

$$\frac{1}{\Delta} f(x_i) = F(x_0) + S(x_i), \quad (2.58)$$

т.е. *обратный оператор для конечной разности есть оператор конечного суммирования.*

Введем теперь *оператор дифференцирования*

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Под *обратным оператором* $\frac{1}{D}$ понимается операция интегрирования:

$$\frac{1}{D} f(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Используя ряд Тейлора, находим

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} D^k f(x) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k D^k}{k!} \right\} f(x) = (e^{hD} - 1) f(x).$$

Следовательно,

$$\Delta = (e^{hD} - 1).$$

Отсюда для обратного оператора $\frac{1}{\Delta}$ получаем следующее выражение:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{e^{hD} - 1}.$$

Умножая обе части последнего равенства на hD , имеем

$$hD \frac{1}{\Delta} = \frac{hD}{e^{hD} - 1}.$$

В правой части получилась производящая функция для чисел Бернулли. Поэтому

$$hD \frac{1}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} h^k D$$

или более подробно

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Delta} f(x) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} h^{k-1} D^k f(x). \quad (2.59)$$

Интегрируя равенство (2.59) в пределах от $x = x_0$ до $x = x_n$ и используя формулу (2.58), будем иметь:

$$\frac{1}{\Delta} f(x_n) - \frac{1}{\Delta} f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} h^{k-1} \left[f^{(k-1)}(x_n) - f^{(k-1)}(x_0) \right]$$

или

$$\begin{aligned}
 F(x_0) + \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) - F(x_0) &= \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) = \\
 &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} h^{k-1} [f^{k-1}(x_n) - f^{k-1}(x_0)].
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $B_1 = -\frac{1}{2}$ и $B_{2k+1} = 0$ при $k=1, 2, \dots$, получаем формулу Эйлера — Маклорена

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= h \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right] - \\
 &- \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} [f^{(2k-1)}(x_n) - f^{(2k-1)}(x_0)] + R_{2m}, \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

где R_{2m} — остаточный член.

Запись формулы (2.60) в виде бесконечного ряда не всегда законна, так как ряд может расходиться. Подставляя значения чисел Бернулли, будем иметь

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_n} y dx &= h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{(n-1)} + \frac{1}{2} y_n \right) - \frac{h^2}{12} (y'_n - y'_0) + \\
 &+ \frac{h^4}{720} (y'''_n - y'''_0) - \frac{h^6}{30\,240} (y^{(V)}_n - y^{(V)}_0) + \dots - \frac{B_{2m}}{(2m)!} h^{2m} [f^{(2m-1)}(x_n) - \\
 &- f^{(2m-1)}(x_0)] + R_{2m}. \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

Остаточный член формулы Эйлера — Маклорена имеет вид

$$R_{2m} = -nh^{2m+3} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{2m+2}(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_n)$.

Формулу Эйлера — Маклорена (2.61) используют для приближенного вычисления определенных интегралов, а также для приближенного суммирования значений функций при равноотстоящих значениях аргумента. Действительно, из формулы (2.61) мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n f(x_i) &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} \left[f^{(2k-1)}(x_n) - f^{(2k-1)}(x_0) \right] + \\ &+ nh^{2m+2} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi). \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.14. Приближенное вычисление несобственных интегралов

Интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \quad (2.63)$$

называется *собственным*, если:

- 1) промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен;
- 2) подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

В противном случае интеграл (2.63) называется *несобственным*. Рассмотрим сначала приближенное вычисление несобственного интеграла

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad (2.64)$$

с *бесконечным промежутком интегрирования*, где функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < \infty$.

Интеграл (2.64) называется *сходящимся*, если существует конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (2.65)$$

и по определению полагают:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (2.66)$$

Если предел (2.65) не существует, то интеграл (2.64) называется *расходящимся* и такой интеграл считается лишенным смысла. Поэтому, прежде чем приступить к вычислению несобственного интеграла, нужно предварительно убедиться, пользуясь известными признаками сходимости, что этот интеграл сходится.

Чтобы вычислить сходящийся несобственный интеграл (2.64) с заданной точностью ε , представим его в виде

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx. \quad (2.67)$$

В силу сходимости интеграла число b можно выбрать столь большим, чтобы имело место неравенство

$$\left| \int_b^{\infty} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.68)$$

Собственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

можно вычислить по одной из квадратурных формул. Пусть S — приближенное значение этого интеграла с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$, т.е.

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.69)$$

Из формул (2.67)–(2.69) имеем

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) dx - S \right| < \varepsilon,$$

т.е. поставленная задача будет решена.

Предположим теперь, что промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен и подынтегральная функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва на $[a, b]$. Так как в наших предположениях промежуток интегрирования можно разбить на частичные промежутки с единственной точкой разрыва подынтегральной функции, то достаточно разобрать лишь случай, когда на $[a, b]$ имеется единственная точка разрыва с функции $f(x)$, причем второго рода.

Если c есть внутренняя точка отрезка $[a, b]$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow +0 \\ \delta_2 \rightarrow +0}} \left\{ \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx \right\}, \quad (2.70)$$

и в случае существования этого предела интеграл называют *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется сходимость несобственного интеграла (2.70), если точка разрыва c подынтегральной функции $f(x)$ совпадает с одним из концов промежутка интегрирования $[a, b]$.

Для приближенного вычисления с заданной точностью ε сходящегося несобственного интеграла (2.70), где точка разрыва $c \in (a, b)$, выбирают положительные числа δ_1 и δ_2 столь малыми, чтобы имело место неравенство

$$\left| \int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем по известным квадратурным формулам приближенно вычисляют собственные интегралы

$$\int_a^{c-\delta_1} f(x) dx \text{ и } \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx. \quad (2.71)$$

Очевидно, если S_1 и S_2 — приближенные значения интегралов (2.71) с точностью до $\frac{\varepsilon}{4}$, то

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_1 + S_2.$$

с точностью до ε . Если точка разрыва c подынтегральной функции $f(x)$ является концевой для промежутка интегрирования $[a, b]$, то методика вычисления очевидным образом видоизменяется.

2.15. Метод Л.В. Канторовича выделения особенностей

Часто для приближенного вычисления интеграла от разрывной функции полезным оказывается *метод Л.В. Канторовича выделения особенностей*. Идея этого метода состоит в том, что из подынтеграль-

ной функции $f(x)$ выделяют некоторую функцию $g(x)$, имеющую те же особенности, что и функция $f(x)$, элементарно интегрируемую на данном промежутке $[a, b]$ и такую, чтобы разность $f(x) - g(x)$ была достаточно гладкой на отрезке $[a, b]$. Например,

$$f(x) - g(x) \in C^{(m)}[a, b], \text{ где } m \geq 1.$$

Тогда будем иметь

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_a^b [f(x) - g(x)] dx,$$

где первый интеграл берется непосредственно, а второй без труда вычисляется с помощью стандартных формул.

Мы рассмотрим применение этого метода для вычисления интеграла вида

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^\alpha} dx, \quad (2.72)$$

где $x_0 \in [a, b]$; $0 < \alpha < 1$ и $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Пусть $\varphi(x) \in C^{(m+1)}[a, b]$, т.е. $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные до $(m+1)$ -го порядка включительно.

Используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \psi(x), \quad (2.73)$$

где

$$\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1} \quad (2.74)$$

($\xi \in (a, b)$).

Отсюда для интеграла (2.72) получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(x - x_0)^\alpha} &= \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} \int_a^b (x - x_0)^{k-\alpha} dx + \int_a^b \frac{\psi(x) dx}{(x - x_0)^\alpha} = \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!(k+1-\alpha)} [(b - x_0)^{k+1-\alpha} - (a - x_0)^{k+1-\alpha}] + I, \end{aligned} \quad (2.75)$$

где

$$I = \int_a^b \frac{\Psi(x)dx}{(x-x_0)^\alpha}. \quad (2.76)$$

Из формулы (2.74) вытекает, что

$$\frac{\Psi(x)dx}{(x-x_0)^\alpha} \in C^{(m)}[a,b]$$

(по меньшей мере!); следовательно, интеграл (2.76) является собственным и может быть вычислен с любой степенью точности по подходящей квадратурной формуле.

Метод Канторовича применим также к несобственным интегралам, подынтегральная функция которых имеет несколько точек разрыва рассмотренного типа. В этом случае для вычисления интеграла достаточно разбить промежуток интегрирования на части, содержащие лишь одну особую точку подынтегральной функции, и воспользоваться свойством аддитивности интеграла.

2.16. Графическое интегрирование

Задача графического интегрирования состоит в следующем: по данному графику непрерывной функции $y = f(x)$ требуется построить график ее первообразной функции

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Иными словами, нужно построить такую кривую $y = F(x)$, ордината в каждой точке x которой численно равна площади криволинейной трапеции с основанием $[a, x]$, ограниченной данной кривой $y = f(x)$.

Для приближенного построения графика первообразной функции $y = F(x)$ разбиваем площадь соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, на узкие вертикальные полоски с помощью ординат, проведенных в точках x_0, x_1, \dots ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$) (рис. 2.9). Каждую из таких полосок заменяем, используя теорему о среднем, равновеликим (по возможности) прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(\xi_i)$, где ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) — некоторая промежуточная точка i -го по счету отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, т. е. полагаем

Выберем теперь полюс P с расстоянием $OP = 1$ и проведем лучи PM'_1, PM'_2, \dots . Искомую линию $y = F(x)$ приближенно можно заменить ломаной $N_0N_1N_2N_3 \dots$ с вершинами $N_0(x_0, 0)$, $N_1(x_1, F(x_1))$, $N_2(x_2, F(x_2))$, Последовательные звенья этой ломаной будут параллельны соответствующим лучам, а именно: $N_0N_1 \parallel PM'_1$; $N_1N_2 \parallel PM'_2$; $N_2N_3 \parallel PM'_3$; ... В самом деле, угловой коэффициент звена $N_{i-1}N_i$ на основании формулы (2.77) равен

$$k = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\xi_i).$$

В силу же построения угловой коэффициент луча OM'_i есть

$$k'_i = \frac{f(\xi_i)}{1} = f(\xi_i).$$

Следовательно,

$$N_{i-1}N_i \parallel OM'_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, технически построение графика функции $y = F(x)$ может быть осуществлено так: из точки $N_0(x_0, 0)$ проводим прямую N_0N_1 , параллельную лучу OM'_1 , до пересечения в точке N_1 с вертикалью $x = x_1$; из точки N_1 проводим прямую N_1N_2 , параллельную лучу OM'_2 , до пересечения в точке N_2 с вертикалью $x = x_2$ и т.д.

Следует отметить, что при применении данного метода графического интегрирования точки x_i ($i = 0, 1, \dots$) не обязательно брать равноотстоящими. Для увеличения точности построения рекомендуется характерные точки графика интегрируемой функции (нули, точки экстремума, точки перегиба) обязательно включать в состав точек x_i .

Графическое интегрирование обладает, вообще говоря, малой точностью. Поэтому этот прием полезно использовать тогда, когда требуется иметь общее представление об интеграле функции или когда подынтегральная функция задана графически и ее аналитическое выражение нам неизвестно.

2.17. Понятие о кубатурных формулах

Кубатурные формулы или, иначе, *формулы численных кубатур* предназначены для численного вычисления двойных интегралов.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной области σ (рис. 2.10). В этой области σ выбирается

система точек (узлов) $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Для вычисления двойного интеграла

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy$$

приближенно полагают

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, y_i). \quad (2.78)$$

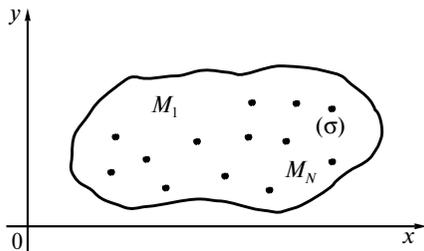


Рис. 2.10. Область σ функции $z = f(x, y)$

Чтобы найти коэффициенты A_i , потребуем точного выполнения кубатурной формулы (2.78) для всех полиномов

$$P_n(x, y) = \sum_{k+l \leq n} c_{kl} x^k y^l, \quad (2.79)$$

степень которых не превышает заданного числа n . Для этого необходимо и достаточно, чтобы формула (2.78) была точной для произведения степеней

$$x^k y^l \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots, n; k + l \leq n).$$

Полагая в (2.78) $f(x, y) = x^k y^l$, будем иметь

$$I_{kl} = \iint_{(\sigma)} x^k y^l dx dy = \sum_{i=1}^N A_i x_i^k y_i^l \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots, n; k + l \leq n). \quad (2.80)$$

Таким образом, коэффициенты A_i формулы (2.78), вообще говоря, могут быть определены из системы линейных уравнений (2.80).

Для того чтобы система (2.80) была определенной, необходимо, чтобы число неизвестных N было равно числу уравнений. Отсюда, составляя «решетку показателей» (рис. 2.11), получаем

$$N = (n+1) + n + \dots + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

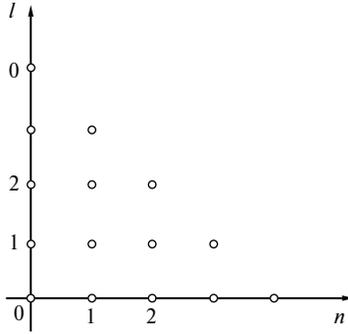


Рис. 2.11. «Решетка показателей»

Остается открытым трудный вопрос о наиболее рациональном выборе узлов для данной области.

Можно указать еще один достаточно общий прием вычисления двойного интеграла. Пусть область интегрирования ограничена непрерывными однозначными кривыми

$$y = \varphi(x), y = \psi(x) \quad (\varphi(x) \leq \psi(x))$$

и двумя вертикалями $x = a$, $x = b$ (рис. 2.12).

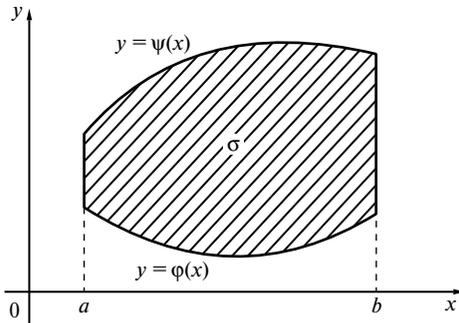


Рис. 2.12. Область интегрирования, ограниченная непрерывными однозначными кривыми $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ ($\varphi(x) \leq \psi(x)$)

Расставляя по известным правилам в двойном интеграле

$$I = \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy \quad (2.81)$$

пределы интегрирования, будем иметь

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Пусть

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (2.82)$$

Тогда

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx. \quad (2.83)$$

Применяя к однократному интегралу, стоящему в правой части равенства (2.83), одну из квадратурных формул, получим

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i), \quad (2.84)$$

где $x_i \in [a, b] (i = 1, 2, \dots, n)$; A_i — некоторые постоянные коэффициенты.

В свою очередь, значения

$$F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y) dy$$

могут быть также найдены по некоторым формулам квадратур:

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j),$$

где B_{ij} — соответствующие постоянные.

Из формулы (2.84) выводим

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j), \quad (2.85)$$

где A_i и B_{ij} — известные постоянные.

Геометрически этот метод эквивалентен вычислению объема I , выражаемого интегралом (2.81) с помощью поперечных сечений.

Для кубатурных формул типа (2.85) сохраняют силу с соответствующими видоизменениями общие замечания, относящиеся к вычислению однократных интегралов.

2.18. Кубатурная формула типа Симпсона

Пусть сначала область интегрирования есть прямоугольник

$$R\{a \leq x \leq A; b \leq y \leq B\}$$

(рис. 2.13), стороны которого параллельны осям координат. Каждый из промежутков $[a, A]$ и $[b, B]$ разобьем пополам точками $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h = A$, и соответственно

$$y_0 = b, y_1 = b + k, y_2 = b + 2k = B,$$

где $h = \frac{A-a}{2}$; $k = \frac{B-b}{2}$.

Всего, таким образом, получим девять точек (x_i, y_j) ($i, j = 0, 1, 2, \dots, 9$). Имеем

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy. \quad (2.86)$$

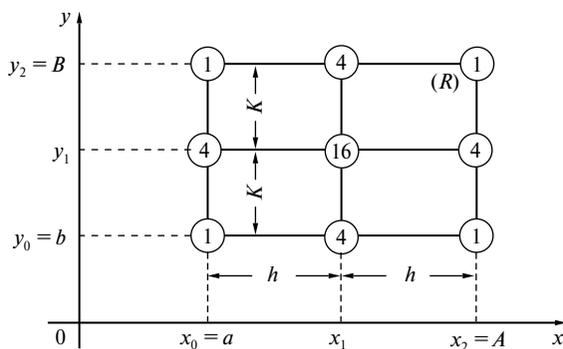


Рис. 2.13. Область интегрирования, представленная прямоугольником $R\{a \leq x \leq A; b \leq y \leq B\}$, стороны которого параллельны осям координат

Отсюда, вычисляя внутренний интеграл по квадратурной формуле Симпсона, находим

$$\begin{aligned} \iint_{(R)} f(x, y) dx dy &= \int_a^A dx \cdot \frac{k}{3} [f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_2)] = \\ &= \frac{k}{3} \left[\int_a^A f(x, y_0) dx + 4 \int_a^A f(x, y_1) dx + \int_a^A f(x, y_2) dx \right]. \end{aligned}$$

Применяя к каждому интегралу снова формулу Симпсона, получим

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} \left\{ \begin{aligned} &[f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + f(x_2, y_0)] + \\ &+ 4[f(x_0, y_1) + 4f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)] + \\ &+ [f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)] \end{aligned} \right\}$$

или

$$\begin{aligned} &\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \\ &= \frac{hk}{9} \left\{ \begin{aligned} &[f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2)] + \\ &+ 4[f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)] + \\ &+ 16f(x_1, y_1) \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Формулу (2.87) будем называть *кубатурной формулой Симпсона*. Следовательно,

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} (\sigma_0 + 4\sigma_1 + 16\sigma_2), \quad (2.87')$$

где σ_0 — сумма значений подынтегральной функции $f(x, y)$ в *вершинах* прямоугольника R ; σ_1 — сумма значений $f(x, y)$ в *середирах сторон* прямоугольника R ; $\sigma_2 = f(x_1, y_1)$ — значение функции $f(x, y)$ в *центре* прямоугольника R . Кратности этих значений обозначены на рис. 2.13.

2.19. Кратные интегралы

2.19.1. Метод повторного интегрирования

Пусть требуется вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy, \quad (2.88)$$

где область G представляет собой прямоугольник $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

Вычисление такого интеграла сводится к двукратному интегрированию, т.е.

$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (2.89)$$

Обозначим

$$\int_c^d f(x, y) dy = F(x)$$

и для вычисления интеграла

$$\int_a^b F(x) dx \quad (2.90)$$

применим формулу Симпсона с шагом h по x :

$$\int_a^b F(x) dx \approx \frac{h}{3} [F_0 + F_n + 2(F_2 + F_4 + \dots + F_{n-2}) + 4(F_1 + F_3 + \dots + F_{n-1})],$$

где $h = \frac{b-a}{n}$ (n — четное);

$$F_i = F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy; \quad x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2.91)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению $n + 1$ интегралов вида (2.91). Указанный метод является наиболее простым методом приближенного вычисления кратных интегралов. Он легко программируется при работе на ЭВМ, так как позволяет использовать уже

имеющиеся стандартные программы для вычисления однократных интегралов. При вычислении интегралов (2.90) и (2.91) можно применять различные квадратурные формулы.

Аналогичным образом можно вычислять кратные интегралы размерности $n > 2$.

Недостатки метода:

1) его удобно применять только для прямоугольных областей интегрирования;

2) с ростом кратности интеграла резко возрастает объем вычислений;

3) увеличение точности за счет уменьшения шагов интегрирования заметно увеличивает объем вычислений.

2.19.2. Метод Л.А. Люстерника и В.А. Диткина

Для вычисления двойного интеграла

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

применяют приближенные формулы вида

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i, y_i), \quad (2.92)$$

где коэффициенты c_i и точки $M_i(x_i, y_i)$ выбираются так, чтобы формула (2.92) была точной для многочленов некоторой достаточно высокой степени при минимальном количестве точек M_i .

Если область G есть единичный круг с центром в начале координат, то интеграл вычисляется по *кубатурной формуле Люстерника — Диткина*:

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \pi \left[\frac{1}{4} f(0) + \frac{1}{8} \sum_{i=0}^5 f(M_i) \right], \quad (2.93)$$

где точки M_i имеют следующие полярные координаты:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \varphi_i = \frac{\pi}{3} i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

т.е. точки M_i являются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{2/3}$.

Если область G имеет вид правильного шестиугольника, вписанного в единичный круг, то имеет место следующая кубатурная формула Люстерника — Диткина:

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{43}{56} f(0) + \frac{125}{336} \sum_{i=0}^5 f(M_i) \right], \quad (2.94)$$

где точки M_i имеют следующие полярные координаты:

$$\rho_i = \frac{\sqrt{14}}{15}; \quad \varphi_i = \frac{\pi}{3} i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

Если область G — квадрат

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1,$$

то кубатурная формула имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \approx & \frac{8}{7} f(0, 0) + \frac{20}{63} \left[f\left(\sqrt{\frac{14}{15}}, 0\right) + f\left(-\sqrt{\frac{14}{15}}, 0\right) \right] + \\ & + \frac{5}{9} \left[f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Замечание. Формулы (2.93)–(2.95) можно применять для областей следующего вида:

- 1) круг произвольного радиуса;
- 2) правильный шестиугольник, вписанный в круг произвольного радиуса;
- 3) эллипс;
- 4) прямоугольник, если произвести соответствующую замену переменных.

Область произвольной конфигурации можно приближенно заменить суммой указанных областей стандартного типа.

Глава 3

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение различных прикладных задач очень часто сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих случаях решение полученных при формализации задачи дифференциальных уравнений не выражается в квадратурах. Поэтому возникает необходимость применения приближенных методов. В данной главе рассматривается решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Даны теоретические основы интегрирования дифференциальных уравнений с помощью рядов, метода последовательных приближений, неопределенных коэффициентов. Приводится описание метода Эйлера и его модификаций, метода Рунге—Кутта, Адамса, Милна и последовательных сближений А.Н. Крылова.

Кроме приближенных методов решения задачи Коши, в этой главе представлены некоторые разностные и аналитические методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Среди них метод конечных разностей для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, метод прогонки, метод Галеркина и метод коллокации.

3.1. Общие замечания. Задача Коши

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \quad (3.1)$$

Основная задача, относящаяся к этому уравнению, есть задача Коши: найти решение уравнения (3.1) $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, т.е. надо найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 3.1).

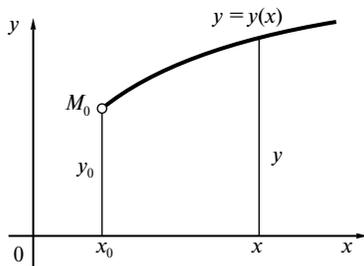


Рис. 3.1. Интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$

Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в области R , определяемой неравенствами

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b,$$

то существует по меньшей мере одно решение $y = y(x)$, определенное в некоторой окрестности $|x - x_0| < h$, где h — положительное число. Это решение единственно, если в R выполнено условие Липшица

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq N|\tilde{y} - y|, \quad (3.2)$$

где N — постоянная (константа Липшица), зависящая в общем случае от a и b .

Если $f(x, y)$ имеет ограниченную производную $f'_y(x, y)$ в R , то можно положить

$$N = \max |f'_y(x, y)| \text{ при } (x, y) \in R.$$

Задача Коши для дифференциального уравнения n -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.3)$$

заключается в отыскании функции $y = y(x)$, удовлетворяющей этому уравнению и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3.4)$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

В приложениях часто встречаются задачи, для решения которых обращаются к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим нормальную систему n -го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{array} \right. \quad (3.5)$$

где x — независимая переменная; y_1, y_2, \dots, y_n — искомые функции.

Систему, содержащую производные высших порядков и разрешенную относительно старших производных искомых функций, путем введения новых неизвестных функций можно привести к виду (3.5). В частности, для дифференциального уравнения n -го порядка (3.3), полагая $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, ..., $y_{n-1} = y^{(n-1)}$, будем иметь эквивалентную нормальную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Воспользовавшись векторными обозначениями

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix},$$

систему уравнений (3.5) можно записать более просто:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.7)$$

где $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ — заданная вектор-функция.

Под решением системы (3.5) понимается любая совокупность функций

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

где $y_1 = \varphi_1(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$, которая при подстановке в уравнения (3.5), обращает их в тождества. Геометрически каждое решение (3.8) представляет собой некоторую линию L (интегральная кривая в пространстве $E^{n+1} = \{x, y_1, \dots, y_n\}$), а совокупность всех решений образует поле интегральных кривых.

Так как система дифференциальных уравнений имеет бесчисленное множество решений, то для выделения одного конкретного решения кроме уравнения нужны дополнительные условия. Это приводит к задаче Коши, которая заключается в отыскании функций y_1, y_2, \dots, y_n , удовлетворяющих системе (3.5) и начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (3.9)$$

Если удастся найти общее решение уравнения (3.3) или системы (3.5), то задача Коши сводится к отысканию значений произвольных постоянных. Но найти общее решение задачи Коши удастся в редких случаях. Нахождение решения, отвечающего заданным условиям, даже для простейшего дифференциального уравнения первого порядка с помощью конечного числа математических операций практически невыполнимо. Еще более сложной задачей является нахождение решения системы дифференциальных уравнений за конечное число операций. Данное обстоятельство обусловило создание большого числа методов приближенного решения дифференциальных уравнений.

Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае делятся на четыре группы.

Аналитические методы позволяют найти точное решение дифференциального уравнения. Классы уравнений, для которых разработаны методы получения точных решений, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач.

Графические методы используют геометрические построения. В частности, одним из них является метод изоклин для решения дифференциального уравнения первого порядка. Он основан на геометрическом определении интегральных кривых по заранее построенному полю направлений.

Приближенные методы дают возможность получить решение как предел некоторой последовательности функций, которые могут быть выражены через элементарные функции или при помощи квадратур. Ограничиваясь конечным числом членов последовательности, получают приближенное выражение для решения.

Численные методы — это алгоритмы вычисления приближенных значений решения на некоторой выбранной сетке значений аргумента. Решение при этом получается в виде таблицы. Численные методы не позволяют найти общего решения системы. Они могут дать какое-то частное решение. С появлением ЭВМ численные методы решения стали одним из основных способов решения практических задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данная классификация методов является условной. Следует отметить, что численные методы можно применять только к корректно поставленным задачам. Однако формального выполнения условия корректности может оказаться недостаточно. Надо, чтобы задача была *хорошо обусловленной*, т.е. малым изменениям начальных условий соответствовало малое изменение решения. В противном случае небольшое изменение начальных условий или эквивалентные этим изменениям небольшие погрешности численного метода могут существенно изменить решение. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что для рассматриваемых дифференциальных уравнений выполнены обычные условия существования и единственности решений. При необходимости более жестких условий они будут указаны для соответствующих методов.

3.2. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Рассмотрим уравнение (3.1) с начальными условиями $y(x_0) = y_0$. Пусть правая часть уравнения (3.1) является аналитической функцией в начальной точке (x_0, y_0) , т.е. она может быть разложена в степенной ряд в некоторой окрестности этой точки. Этот степенной ряд будет иметь следующий вид:

$$f(x, y) = \sum_{p, q=0}^{\infty} c_{pq} (x - x_0)^p (y - y_0)^q,$$

где p, q — целые неотрицательные числа; c_{pq} — постоянные коэффициенты.

Тогда существует единственное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, причем это решение является аналитическим в точке x_0 и, следовательно, может быть представлено в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p (x - x_0)^p \quad (|x - x_0| < h), \quad (3.10)$$

где $c_p = \frac{1}{p!} y^{(p)}(x_0)$ ($p = 0, 1, 2, \dots$); h — некоторое положительное число.

Коэффициент c_0 разложения (3.10) определяется непосредственно из начального условия, т.е.

$$c_0 = y(x_0) = y_0.$$

Следующий коэффициент c_1 находится на основании дифференциального уравнения (3.1):

$$c_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Остальные коэффициенты c_p ($p > 1$) ряда (3.10) могут быть шаг за шагом найдены путем последовательного дифференцирования данного дифференциального уравнения (3.1).

Таким образом, для дифференциального уравнения n -го порядка (3.3) с начальными условиями (3.4) и искомого частного решения $y = y(x)$ может быть получено следующее разложение в ряд Тейлора по степеням разности $x - x_0$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots \quad (3.11)$$

Начальные условия (3.4) непосредственно дают нам значения $y^{(k)}(x_0)$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Значение $y^{(n)}(x_0)$ найдем из уравнения (3.3), подставляя $x = x_0$ и используя начальные условия (3.4):

$$y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}). \quad (3.12)$$

Значения $y^{(n+1)}(x_0)$, $y^{(n+2)}(x_0)$, ... последовательно определяются дифференцированием уравнения (3.3) и подстановкой $x = x_0$, $y^{(k)}(x_0) = y_{0k}$, где $(k = 0, 1, 2, \dots)$.

Доказано, что если правая часть уравнения (3.3) в окрестности точки $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ есть аналитическая функция своих аргументов, то при значениях x , достаточно близких к x_0 , существует единственное решение задачи Коши (3.3), (3.4), которое разлагается в ряд Тейлора (3.11). Тогда частичная сумма этого ряда будет приближенным решением поставленной задачи.

Аналогично применяется метод последовательного дифференцирования и для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Замечание. Для некоторых численных методов интегрирования дифференциальных уравнений требуется определить значения искомых функций в нескольких точках. Эти значения при соблюдении известных условий гладкости данного уравнения могут быть с любой степенью точности подсчитаны с помощью степенных рядов. Таким образом, метод разложения решений в степенные ряды может быть использован как элемент более эффективных численных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений (метод Адамса, метод Милна и др.).

Если уравнение содержит особенность, например неопределенность типа $\frac{0}{0}$, то численное решение невозможно. Тогда использование степенных рядов дает возможность «отодвинуться» от особенности.

3.3. Метод последовательных приближений

Рассмотрим применение этого метода к дифференциальному уравнению первого порядка $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Предположим, что в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ уравнение (3.1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения.

Будем строить искомое решение $y = y(x)$ для значений $x \geq x_0$. Случай $x \leq x_0$ вполне аналогичен. Интегрируя правую и левую части уравнения (3.1) в пределах от x_0 до x , получим

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx,$$

или в силу начального условия $y(x_0) = y_0$ будем иметь

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (3.13)$$

Так как искомая функция $y = y(x)$ находится под знаком интеграла, то уравнение (3.13) является интегральным. Очевидно, решение интегрального уравнения (3.13) удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$ и начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Для нахождения этого решения применим метод последовательных приближений. Заменяя в равенстве (3.13) неизвестную функцию y данным значением y_0 , получим первое приближение:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx.$$

Далее, подставив в равенство (3.13) вместо неизвестной функции y найденную функцию y_1 , будем иметь второе приближение:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx.$$

Все дальнейшие приближения строятся по формуле

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Геометрически последовательные приближения представляют собой кривые $y_n = y_n(x)$, проходящие через общую точку $M_0(x_0, y_0)$.

В теории дифференциальных уравнений доказано, что при выполнении условия Липшица

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq N |\tilde{y} - y| \quad (3.15)$$

последовательные приближения $y_n = y_n(x)$ на некотором достаточно малом отрезке $[x_0, x_0 + h]$ имеют смысл и равномерно сходятся, причем предельная функция

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \quad (3.16)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$ и начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Если правая часть дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ определена и непрерывна в области $R\{0 \leq x - x_0 \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ и $M \geq \max |f(x, y)|$ при $(x, y) \in R$, то за величину h можно принять

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad (3.17)$$

причем интегральная кривая $y = y(x)$ при $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ будет содержаться в угле между прямыми (рис. 3.2)

$$y = y_0 + M(x - x_0) \text{ и } y = y_0 - M(x - x_0)$$

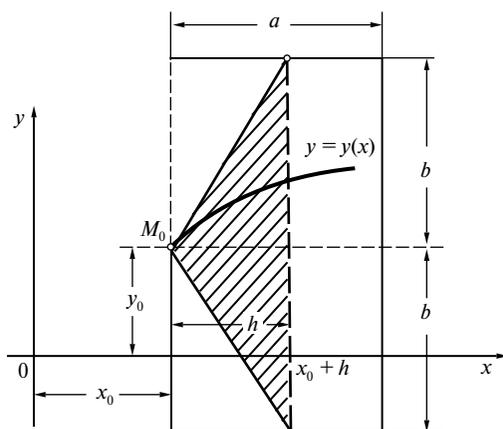


Рис. 3.2. Расположение интегральной кривой между прямыми

Для оценки погрешности

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)|$$

из формулы (3.13) вычтем формулу (3.14), тогда будем иметь

$$y(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, y_{n-1})] dx.$$

Отсюда при $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ получим

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, y_{n-1})| dx.$$

В силу условия Липшица находим

$$|f(x, y) - f(x, y_{n-1})| \leq N |y(x) - y_{n-1}(x)| \leq N \varepsilon_{n-1}(x).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_n(x) \leq \int_{x_0}^x N \varepsilon_{n-1}(x) dx \quad (n=1, 2, \dots), \quad (3.18)$$

где введено обозначение $\varepsilon_0(x) = |y(x) - y_0|$. Применяя формулу Лагранжа при $x_0 \leq x \leq x_0 + h$, будем иметь

$$\varepsilon_0(x) = |y(x) - y(x_0)| = (x - x_0) |y'(\xi)|,$$

где $x_0 < \xi < x$

Отсюда, так как $|y'(\xi)| = |f(\xi, y(\xi))| \leq M$, получим

$$\varepsilon_0(x) \leq M(x - x_0).$$

Далее, используя формулу (3.18), последовательно находим:

$$\varepsilon_1(x) \leq N \int_{x_0}^x \varepsilon_0(x) dx \leq NM \int_{x_0}^x (x - x_0) dx = MN \frac{(x - x_0)^2}{2!};$$

$$\varepsilon_2(x) \leq N \int_{x_0}^x \varepsilon_1(x) dx \leq N^2 M \int_{x_0}^x \frac{(x - x_0)^2}{2!} dx = MN^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

и т.д. В итоге окончательно получим

$$\varepsilon_n(x) \leq MN^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (3.19)$$

Из формулы (3.19) вытекает, что $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на отрезке $[x_0, x_0 + h]$.

Замечание. При методе последовательных приближений в качестве начального приближения y_0 , вообще говоря, можно выбирать любую функцию, достаточно близкую к точному решению y . Напри-

мер, иногда выгодно в качестве y_0 брать конечный отрезок ряда Тейлора искомого решения.

Метод последовательных приближений применим и для решения системы дифференциальных уравнений, а также для решения дифференциального уравнения n -го порядка, если его записать в виде системы. Для разложения решения дифференциального уравнения в степенной ряд требуется аналитичность правой части уравнения, при пользовании методом последовательных приближений аналитичность правой части не обязательна. Поэтому область применения метода последовательных приближений является, вообще говоря, более широкой: он применим и в тех случаях, когда разложение решения дифференциальных уравнений в степенной ряд невозможно. Однако недостатком метода последовательных приближений является необходимость вычисления все более громоздких интегралов.

3.4. Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод рекомендуется применять при решении *линейных* дифференциальных уравнений (с переменными коэффициентами). Суть метода покажем на примере уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (3.20)$$

с начальными условиями $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$. Предположим, что каждый из коэффициентов уравнения (3.20) можно разложить в ряд по степеням x :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n; \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n; \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n.$$

Решение данного уравнения будем искать в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (3.21)$$

где c_n — коэффициенты, подлежащие определению.

Дифференцируем обе части равенства (3.21) два раза по x :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}; \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

3.5. Метод Эйлера

Метод Эйлера относится к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (3.24)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.25)$$

Выбрав достаточно малый шаг h , построим систему равноотстоящих точек:

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.26)$$

При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2 \dots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$); каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой *ломаной Эйлера*, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (3.24), которая проходит через точку M_i .

Если правая часть уравнения (3.24) в некотором прямоугольнике $R\{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ удовлетворяет условиям

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2| \quad (N = \text{const}), \quad (3.27)$$

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M \quad (M = \text{const}), \quad (3.28)$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} \left[(1 + hN)^n - 1 \right], \quad (3.29)$$

где $y(x_n)$ — значение точного решения уравнения при $x = x_n$; y_n — приближенное значение, полученное на n -м шаге.

Формула (3.28) имеет лишь теоретическое применение. На практике иногда оказывается более удобным *двойной просчет*: расчет повторяют с шагом $h/2$ и погрешность более точного значения y_n^* (при шаге $h/2$) оценивают приближенно так:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n|. \quad (3.30)$$

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений и на дифференциальные уравнения высших порядков. Последние должны быть предварительно приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \quad (3.31)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ и $z(x_i) \approx z_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i), \\ z_{i+1} = z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i) \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.32)$$

Замечание. Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения. Недостатки:

- 1) малая точность;
- 2) систематическое накопление ошибок.

Этот метод дает сравнительно удовлетворительные результаты (в смысле погрешности) лишь при малых значениях h . Это обусловлено тем, что суть метода Эйлера заключается в том, что интеграл дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представляется двумя членами ряда Тейлора:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

т.е. для этого отрезка имеется погрешность порядка h^2 .

Кроме того, при вычислении значений на следующем отрезке исходные данные не являются точными и содержат погрешности, зависящие от неточности предшествующих вычислений.

3.6. Модификации метода Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Выбрав шаг h , положим

$$x_i = x_0 + ih \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Согласно методу Эйлера последовательные значения искомого решения вычисляются по приближенной формуле $y_{i+1} = y_i + hf_i$, $f_i = f(x_i, y_i)$.

Более точным является усовершенствованный метод ломаных, при котором сначала вычисляют промежуточные значения

$$\begin{cases} x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \\ y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i \end{cases}$$

и находят значения направления поля интегральных кривых в средней

точке $\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}} \right)$, т.е. $f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}} \right)$.

Затем полагают

$$y_{i+1} = y_i + hf_i.$$

Другой модификацией метода Эйлера является усовершенствованный метод Эйлера–Коши, при котором сначала определяется «грубое приближение» решения

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf_i,$$

исходя из которого находится направление поля интегральных кривых

$\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, и приближенно полагают

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2}.$$

Остаточные члены первого и второго улучшенных методов Эйлера на каждом шаге имеют порядок $O(h^3)$.

Оценка погрешности в точке x_n может быть получена с помощью двойного просчета: расчет повторяют с шагом $\frac{h}{2}$ и погрешность более точного значения y_n^* (при шаге $\frac{h}{2}$) оценивают приближенно так:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{1}{3} \cdot |y_n^* - y_n|,$$

где $y(x)$ — точное решение дифференциального уравнения.

3.7. Метод Эйлера с последующей итерационной обработкой

Метод Эйлера–Коши можно еще более уточнить, применяя итерационную обработку каждого значения y_i , а именно исходя из грубого приближения

$$y_{i+1}^0 = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Построим итерационный процесс

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})].$$

Итерации продолжаем до тех пор, пока в двух последовательных приближениях $y_{i+1}^{(k)}, y_{i+1}^{(k+1)}$ не совпадут соответствующие десятичные знаки. После этого полагаем

$$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}.$$

Как правило, при достаточно малом h итерации быстро сходятся. Если после трех-четырех итераций не произошло совпадения нужного числа десятичных знаков, то следует уменьшить шаг расчета h .

Метод Эйлера с последующей итерационной обработкой ординат дает на каждом шаге погрешность порядка $O(h^3)$ и нередко применяется в вычислительной практике.

Замечание. Метод Эйлера и его модификации являются простейшими представителями *конечно-разностных методов (шаговых методов)* для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.33)$$

при заданных начальных условиях

$$y_k(x_0) = y_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

При применении конечно-разностного метода искомое решение последовательно строится на системе точек (узлов), где h — выбранный шаг. Процесс вычислений расчленяется на однообразно повторяющиеся циклы, каждый из которых обеспечивает переход от значения к значению, начиная с начального. Поэтому схема вычислений легко программируется и удобна для реализации на ЭВМ. Если правые части f_k системы (3.33) сложны, то требуются специальные подпрограммы для подсчета $y'_k(x_i)$.

3.8. Метод Рунге—Кутты

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (3.34)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.35)$$

Выберем шаг h и для краткости введем обозначения $x_i = x_0 + ih$ и $y_i = y(x_i)$ ($i=0,1,2,\dots$). Обозначим через y_i приближенное значение искомого решения в точке x_i . По методу Рунге—Кутты вычисление приближенного значения y_{i+1} в следующей точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по формулам

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i = \frac{1}{6} \left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)} \right), \end{cases} \quad (3.36)$$

где

$$\begin{cases} K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i); \\ K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right); \\ K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right); \\ K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}). \end{cases} \quad (3.37)$$

Все вычисления удобно располагать по схеме, указанной в табл. 3.1.

Схема метода Рунге – Кутты

i	x	y	$K = hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

Порядок заполнения таблицы

1. Записываем в первой строке таблицы данные значения x_0, y_0 .
2. Вычисляем $f(x_0, y_0)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_1^{(0)}$.
3. Записываем во второй строке таблицы $x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$.
4. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_2^{(0)}$.
5. Записываем в третьей строке таблицы $x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$.
6. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h , заносим в таблицу в качестве $K_3^{(0)}$.
7. Записываем в четвертой строке таблицы $x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}$.
8. Вычисляем $f(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)})$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_4^{(0)}$.

9. В столбец Δy записываем числа $K_1^{(0)}, 2K_2^{(0)}, 2K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$.

10. Суммируем числа, стоящие в столбце Δy , делим на 6 и заносим в таблицу в качестве Δy_0 .

11. Вычисляем $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

Затем все вычисления продолжают в том же порядке, принимая за начальную точку (x_1, y_1) .

Вычисление правой части $f(x, y)$ можно включить в табл. 3.1. Если же эти вычисления слишком громоздки, рекомендуется записывать их в отдельную таблицу.

Заметим, что шаг расчета можно менять при переходе от одной точки к другой. Для контроля правильности выбора шага h рекомендуется вычислять дробь

$$\Theta = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right|. \quad (3.38)$$

Величина Θ не должна превышать нескольких сотых. В противном случае шаг h следует уменьшить. Метод Рунге–Кутта имеет порядок точности h^4 на всем отрезке $[x_0, X]$. Оценка погрешности метода очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного просчета по формуле

$$\left| y_n^* - y(x_n) \right| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{15},$$

где $y(x_n)$ — значение точного решения уравнения (3.34) в точке x_n ; y_n^*, y_n — приближенные значения, полученные с шагом $\frac{h}{2}$ и h .

При реализации метода Рунге–Кутта на ЭВМ с автоматическим выбором шага обычно каждой точке x_i делают двойной просчет — сначала с шагом h , затем с шагом $h/2$. Если полученные при этом значения y_i различаются в пределах допустимой точности, то шаг h для следующей точки (x_{i+1}) удваивают, в противном случае берут половинный шаг.

Замечание. Аналогично метод Рунге–Кутта применяется для решения систем дифференциальных уравнений и уравнений высших порядков, которые предварительно следует свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

3.9. Метод Адамса

Этот метод численного интегрирования разработан Адамсом в 1855 г. по просьбе известного английского артиллериста Башфорта, занимавшегося внешней баллистикой. Впоследствии этот метод был забыт и вновь открыт в начале века норвежским математиком Штермером. Популяризация метода Адамса и дальнейшее его усовершенствование связаны с именем А.Н. Крылова.

Пусть для уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (3.39)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$ найдены каким-либо способом (Эйлера, последовательных приближений, Рунге–Кутта и др.) три последовательных значения искомой функции («начальный отрезок»):

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h); \quad y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h);$$

$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h).$$

С помощью этих значений вычисляем величины

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0), \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1),$$

$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2), \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3).$$

Записываем числа x_k, y_k, y'_k, q_k ($k = 0, 1, 2, 3$) в табл. 3.2 и вычисляем конечные разности величины q (числа над ломаной линией в табл. 3.2).

Метод Адамса состоит в продолжении этой таблицы разностей с помощью формулы

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} \quad (k = 3, 4, \dots), \quad (3.40)$$

которая называется *экстраполяционной формулой Адамса*. Она применяется для «предсказания» значения $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$. Посчитанное по этой формуле «предсказанное» значение мы будем обозначать через $y_{k+1}^{\text{пред}}$. Полученное по формуле (3.40) значение Δy_k надо еще уточнить. Для этого нужно записать в таблицу значения $x_{k+1}, y_{k+1}, y'_{k+1}, q_{k+1}$, дополнить таблицу разностей, а затем сделать пересчет по формуле «коррекции»

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_k - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{k-2}, \quad (3.41)$$

которая называется *интерполяционной формулой Адамса*. Уточненное с помощью формулы (3.41) значение мы будем обозначать через $y_{k+1}^{\text{кор}}$.

Формулы (3.40) и (3.41) имеют достаточно большую точность. Они дают погрешность порядка $O(h^4)$, но сами формулы оценки погрешности довольно сложны.

Таблица 3.2

Схема метода Адамса

k	x_k	y_k	$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$q_k = hy'_k$	$\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
0	x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
4	x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4	Δq_4		
5	x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
6	x_6	y_6						

На практике обычно пользуются следующими соображениями. Ошибка более точной формулы коррекции (3.41) составляет примерно $1/14$ разности между значениями Δy_k , подсчитанными по формулам (3.40) и (3.41). Поэтому если указанная разность ненамного превышает допустимую ошибку расчета, то шаг h считается выбранным верно и расчет продолжают с выбранным шагом. Если же на некотором этапе расчета указанная разность становится большой (и при этом нет ошибки в самих вычислениях!), то шаг расчета h следует уменьшить. Рекомендуется уменьшать шаг в два раза, используя уже имеющиеся точки и формулы интерполяции на середину.

Порядок заполнения табл. 3.2

1. Записываем в табл. 3.2 числа x_k, y_k, y'_k, q_k ($k = 0, 1, 2, 3$) и вычисляем разности Δq_k ($k = 0, 1, 2$), $\Delta^2 q_k$ ($k = 0, 1$), $\Delta^3 q_0$.

2. Используя числа $q_3, \Delta q_2, \Delta^2 q_1, \Delta^3 q_0$, помещенные в таблице разностей по диагонали, определяем по формуле (3.40) при $k = 3$

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0.$$

3. Вычисляем $x_4 = x_3 + h$, $y_4 = y_3 + \Delta y_3$.

4. Записываем значения x_4 , y_4 в табл. 3.2, находим $y'_4 = f(x_4, y_4)$, $q_4 = hy'_4$ и пополняем таблицу разностей значениями $\Delta q_3, \Delta^2 q_2, \Delta^3 q_1$.

5. Используя полученные значения разностей q , уточняем величину Δy_3 по формуле (3.41) при $k = 3$:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_3 - \frac{1}{12}\Delta^2 q_2 - \frac{1}{24}\Delta^3 q_1.$$

Если скорректированное значение Δy_3 отличается от предсказанного значения на несколько единиц младшего сохраняемого разряда, то вносим соответствующие поправки в значения Δy_3 и y_4 , проверяем, что эти поправки не скажутся существенно на значениях q_4 , и продолжаем расчет с выбранным шагом. В противном случае выбираем меньший шаг.

Вычисления для $k = 4, 5, \dots$ проводятся аналогично.

Для работы на ЭВМ формулы Адамса удобнее применять в другой форме, выражая y_{k+1} не через разности Δq , а непосредственно через величины q . Так получают экстраполяционную формулу Адамса в виде

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3})$$

и интерполяционную формулу Адамса в виде

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9y'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}).$$

Метод Адамса легко распространяется на системы дифференциальных уравнений, а также на дифференциальные уравнения n -го порядка.

Пусть имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Экстраполяционные формулы Адамса для этой системы записываются так:

$$\begin{cases} \Delta y_k = p_k + \frac{1}{2} \Delta p_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 p_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 p_{k-3}, \\ \Delta z_k = q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3}, \end{cases}$$

где $p_k = hy'_k = hf_1(x_k, y_k, z_k)$; $q_k = hz'_k = hf_2(x_k, y_k, z_k)$.

Аналогичным образом записываются интерполяционные формулы Адамса для системы уравнений.

3.10. Метод Милна

Пусть для уравнения $y' = f(x, y)$ кроме начального условия $y(x_0) = y_0$ известен «начальный отрезок», т.е. значения искомой функции $y(x_i) = y_i$ в точках $x_i = x_0 + ih, i = 1, 2, 3$ (их можно найти одним из методов, изложенных ранее). Последующие значения y_i при $i = 4, 5, \dots$ определяются следующим образом.

Для предсказания используется *первая формула Милна*:

$$y_i^{\text{пред}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2h'_{i-3} - y'_{i-2} + 2y'_{i-1}).$$

Используя $y_i^{\text{пред}}$, находим $y'_i = f(x_i, y_i^{\text{пред}})$ и производим уточнение (коррекцию) по *второй формуле Милна*:

$$y_i^{\text{кор}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(y'_{i-2} + 4y'_{i-1} + y'_i).$$

Абсолютная погрешность ε_i более точного значения $y_i^{\text{кор}}$ приближенно определяется по формуле

$$\varepsilon_i \approx \frac{1}{29} |y_i^{\text{кор}} - y_i^{\text{пред}}|.$$

Эта формула позволяет на каждом шаге контролировать точность полученного результата. Если искомое решение требуется найти с точностью до ε и окажется, что $\varepsilon_i \leq \varepsilon$, то можем положить

$$y_i \approx y_i^{\text{кор}}$$

и перейти к вычислению y_{i+1} . В противном случае следует уменьшить шаг h .

Остаточные члены первой и второй формул Милна имеют порядок $O(h^5)$ на каждом шаге и порядок $O(k^4)$ на всем отрезке $[x_0, x_n]$.

Метод Милна можно использовать для приближенного решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, а также уравнений высших порядков, которые предварительно следует преобразовать в такие системы.

Замечание. Метод Милна не обладает устойчивостью, поэтому его рекомендуют применять только тогда, когда предполагаемое число шагов невелико.

3.11. Метод А.Н. Крылова последовательных сближений

Многие методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, включая метод Адамса, распадаются на два этапа:

- нахождение начального отрезка искомого решения, т.е. начало решения или вход в таблицу;
- вычисление дальнейших значений на основе найденных величин, т.е. продолжение таблицы.

Способ построения начального отрезка методом последовательных сближений, принадлежащий А.Н. Крылову и модифицированный потом Милном, особенно удобен, когда правая часть дифференциального уравнения задана таблично (что, например, имеет место в задачах внешней баллистики).

Обозначим

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i), \quad y'_i = f(x_i, y_i),$$

$$q_i = hy'_i = hf(x_i, y_i) (i=0, 1, 2, \dots).$$

В основе рассматриваемого метода лежит итерационная обработка узлов с помощью приведенных выше формул Эйлера, Адамса.

Порядок решения задачи

I. *Первое сближение.* По формуле Эйлера полагаем

$$\Delta y_0^{(1)} = q_0 = hf(x_0, y_0), \quad \Delta y_{-1}^{(1)} = q_0$$

и вычисляем

$$y_0^{(1)} = y_0 + \Delta y_0^{(1)}, \quad y_{-1}^{(1)} = y_0 + \Delta y_{-1}^{(1)}.$$

После этого находим $q_1^{(1)} = hf(x_1, y_1^{(1)})$, $q_{-1}^{(1)} = hf(x, y_{-1}^{(1)})$ и составляем разности $\Delta q_0^{(1)} = q_1^{(1)} - q_0$, $\Delta q_{-1}^{(1)} = q_0 - q_{-1}^{(1)}$, $\Delta^2 q_{-1}^{(1)} = \Delta q_0^{(1)} - \Delta q_{-1}^{(1)}$. Все результаты запишем в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Вычисления «начального отрезка» методом последовательных сближений

Номер сближения	i	x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
I	-1	x_{-1}	$y_{-1}^{(1)}$	$\Delta y_{-1}^{(1)}$	$q_{-1}^{(1)}$	$\Delta q_{-1}^{(1)}$	$\Delta^2 q_{-1}^{(1)}$	
	0	x_0	y_0	$\Delta y_0^{(1)}$	q_0	$\Delta q_0^{(1)}$		
	1	x_1	$y_1^{(1)}$		$q_1^{(1)}$			
II	-1	x_{-1}	$y_{-1}^{(2)}$	$\Delta y_{-1}^{(2)}$	$q_{-1}^{(2)}$	$\Delta q_{-1}^{(2)}$	$\Delta^2 q_{-1}^{(2)}$	$\Delta^3 q_{-1}^{(2)}$
	0	x_0	y_0	$\Delta y_0^{(2)}$	q_0	$\Delta q_0^{(2)}$	$\Delta^2 q_0^{(2)}$	
	1	x_1	$y_1^{(2)}$	$\Delta y_1^{(2)}$	$q_1^{(2)}$	$\Delta q_1^{(2)}$		
	2	x_2	$y_2^{(2)}$		$q_2^{(2)}$			
III	0	x_0	y_0	$\Delta y_0^{(3)}$	q_0	$\Delta q_0^{(3)}$	$\Delta^2 q_0^{(3)}$	$\Delta^3 q_0^{(3)}$
	1	x_1	$y_1^{(3)}$	$\Delta y_1^{(3)}$	$q_1^{(3)}$	$\Delta q_1^{(3)}$	$\Delta^2 q_1^{(3)}$	
	2	x_2	$y_2^{(3)}$	$\Delta y_2^{(3)}$	$q_2^{(3)}$	$\Delta q_2^{(3)}$		
	3	x_3	$y_3^{(3)}$		$q_3^{(3)}$			

II. Второе сближение. Уточняем значения Δy_0 и Δy_{-1} по интерполяционной формуле Адамса и формуле коррекции Милна, отбрасывая все разности порядка выше второго:

$$\Delta y_0^{(2)} = q_0 + \frac{1}{2} \Delta q_0^{(1)} - \frac{1}{12} \Delta^2 q_{-1}^{(1)}; \quad \Delta y_{-1}^{(2)} = q_0 + \frac{1}{2} \Delta q_{-1}^{(1)} - \frac{1}{12} \Delta^2 q_{-1}^{(1)};$$

так что

$$\Delta y_{-1}^{(2)} + \Delta y_0^{(2)} = y_1 - y_{-1} = 2q_0 + \frac{1}{3} \Delta^2 q_{-1}^{(1)} = \frac{1}{3} (q_{-1}^{(1)} + 4q_0 + q_1^{(1)}).$$

Затем предсказываем значение $\Delta y_1^{(2)}$ по экстраполяционной формуле Адамса:

$$\Delta y_1^{(2)} = q_1^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta q_0^{(1)} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{-1}^{(1)}.$$

Это позволяет вычислить следующие приближения:

$$y_{-1}^{(2)} = y_0 - \Delta y_1^{(2)};$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \Delta y_0^{(2)}; \quad y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + \Delta y_1^{(2)},$$

в результате чего можно найти

$$q_{-1}^{(2)} = hf(x, y_{-1}^{(2)}), \quad q_1^{(2)} = hf(x_1, y_1^{(2)}), \quad q_2^{(2)} = hf(x_2, y_2^{(2)}).$$

Записываем эти результаты в раздел II табл. 3.3 и вычисляем разности $\Delta q_{-1}^{(2)}$, $\Delta q_0^{(2)}$, $\Delta q_1^{(2)}$, $\Delta^2 q_{-1}^{(2)}$, $\Delta^2 q_0^{(2)}$, $\Delta^3 q_{-1}^{(2)}$.

III. *Третье приближение.* Теперь мы имеем достаточное количество точек для продолжения расчета, но надо еще уточнить найденные точки по полным формулам. Это дает

$$\Delta y_0^{(3)} = q_0 + \frac{1}{2} \Delta q_0^{(2)} - \frac{1}{12} \Delta^2 q_{-1}^{(2)} - \frac{1}{24} \Delta^3 q_{-1}^{(2)},$$

$$\Delta y_1^{(3)} = q_1^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta q_1^{(2)} - \frac{1}{12} \Delta^2 q_0^{(2)} - \frac{1}{24} \Delta^3 q_{-1}^{(2)}.$$

Теперь мы можем найти также $\Delta y_2^{(3)}$ по формуле Адамса:

$$\Delta y_2^{(3)} = q_2^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta q_1^{(2)} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_0^{(2)} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{-1}^{(2)}.$$

Отсюда получим

$$y_1^{(3)} = y_0 + \Delta y_0^{(3)}, \quad y_2^{(3)} = y_1^{(3)} + \Delta y_1^{(3)}, \quad y_3^{(3)} = y_2^{(3)} + \Delta y_2^{(3)}.$$

Далее вычисляем $q_1^{(3)}$, $q_2^{(3)}$, $q_3^{(3)}$, записываем результат в раздел III табл. 3.3 и вычисляем разности $\Delta q_0^{(3)}$, $\Delta q_1^{(3)}$, $\Delta q_2^{(3)}$ и т.д.

Если шаг вычислений h выбран верно, то новый пересчет по формулам Адамса не должен существенно изменять значения Δy_0 , Δy_1 . Тогда остается только уточнить $\Delta y_2^{(3)}$ и пересчитать значения y_3 , q_3 , Δq_2 , $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$. После этого можно продолжать расчет.

Замечание. Если правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ задана аналитически слишком громоздкими формулами, метод последова-

тельных сближений дает выигрыш во времени по сравнению с методом Рунге — Кутта при той же степени точности. Действительно, по методу Рунге — Кутта приходится на каждом шаге вычислять значения функции четыре раза, а для получения трех начальных значений — 12 раз, тогда как при вычислении «начального отрезка» методом А.Н. Крылова значения функции вычисляются семь раз.

3.12. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

3.12.1. Постановка задачи

Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (3.42)$$

Двухточечная краевая задача для уравнения (3.42) ставится следующим образом: найти функцию $y = y(x)$, которая внутри отрезка $[a, b]$ удовлетворяет уравнению (3.42), а на концах отрезка — краевым условиям

$$\begin{cases} \varphi_1 [y(a), y'(a)] = 0, \\ \varphi_2 [y(b), y'(b)] = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (3.42) и граничные условия (3.43) линейны. Такая краевая задача называется *линейной краевой задачей*. В этом случае дифференциальное уравнение и краевые условия записываются так:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \quad (3.45)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — известные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции; α_0 , α_1 , β_0 , β_1 , A , B — заданные постоянные, причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ и $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Если $A = B = 0$, то краевые условия (3.45) называются *однородными*. Методы приближенного решения поставленных краевых задач можно разбить на две группы: *разностные* методы и *аналитические* методы.

3.12.2. Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Пусть $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) — система равноотстоящих узлов с некоторым шагом $h = \frac{b-a}{n}$ и

$$p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i).$$

Обозначим получаемые в результате расчета приближенные значения искомой функции $y = y(x)$ и ее производных $y'(x)$, $y''(x)$ в узлах x_i через y_i, y'_i, y''_i соответственно. Заменяем приближенно в каждом внутреннем узле производные $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ конечно-разностными отношениями:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}; \quad y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}, \quad (3.46)$$

а на концах положим

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \quad (3.47)$$

Используя эти формулы, приближенно заменим уравнение (3.44) и краевые условия (3.45) системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + g_i y_i = f_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-2), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (3.48)$$

Получим линейную алгебраическую систему $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными. Решив ее, если это возможно, получим таблицу приближенных значений искомой функции.

Более точные формулы получаются, если заменить $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ центрально-разностными отношениями

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (3.49)$$

Тогда получаем систему

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + g_i y_i = f_i & (i=1, 2, \dots, n-1), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (3.50)$$

При большом n непосредственное решение систем (3.48), (3.50) становится громоздким. Оценка погрешности метода конечных разностей для задачи (3.44), (3.45) имеет вид

$$|y_i - y(x_i)| \leq \frac{h^2 M_4}{96} (b-a)^2,$$

где $y(x_i)$ — значение точного решения при $x = x_i$; $M_4 = \max_{[a,b]} |y^{(4)}(x)|$.

Точность разностного метода можно значительно повысить, если при замене производных использовать многоточечные разностные схемы.

В практических задачах часто встречаются уравнения, в которых функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ заданы таблично с некоторым шагом h . Совершенно естественно такие уравнения решать разностным методом с данным шагом h .

3.12.3. Метод прогонки

Рассмотрим систему, полученную при замене уравнения (3.44) и краевых условий (3.45) конечно-разностными отношениями:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + g_i y_i = f_i & (i=1, 2, \dots, n-2), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (3.51)$$

Метод прогонки решения таких систем заключается в следующем. Запишем сначала первые $n-1$ уравнений системы (3.51) в виде

$$y_{i+2} + m_i y_{i+1} + k_i y_i = h^2 f_i,$$

где

$$m_i = -2 + hp_i; \quad k_i = 1 - hp_i + h^2 q_i \quad (i=0, 1, \dots, n-2). \quad (3.52)$$

Затем написанная выше система приводится к виду

$$y_{i+1} = c_i (d_i - y_{i+2}) \quad (i=1, 2, \dots, n-2). \quad (3.53)$$

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}.$$

Таким образом, все вычисления как бы «прогоняются» два раза. Вычисления прямого хода заготавливают вспомогательные числа c_i, d_i в порядке возрастания индекса i . При этом для вычисления значений c_0, d_0 используется краевое условие на левом конце отрезка интегрирования. Затем на первом шаге обратного хода происходит согласование полученных чисел c_{n-2}, d_{n-2} с краевым условием на правом конце отрезка интегрирования, после чего последовательно получают значения искомой функции y_i в порядке убывания индекса i .

Все вычисления метода прогонки рекомендуется располагать так, как показано в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Метод прогонки

i	x_i	m_i	k_i	f_i	Прямой ход		Обратный ход
					c_i	d_i	y_i
0	x_0	m_0	k_0	f_0	$c_0 \downarrow$	$d_0 \downarrow$	$\uparrow y_0$
1	x_1	m_1	k_1	f_1	$c_1 \downarrow$	$d_1 \downarrow$	$\uparrow y_1$
2	x_2	m_2	k_2	f_2	$c_2 \downarrow$	$d_2 \downarrow$	$\uparrow y_2$
...
$n-2$	x_{n-2}	m_{n-2}	k_{n-2}	f_{n-2}	$c_{n-2} \downarrow$	$d_{n-2} \downarrow$	$\uparrow y_{n-2}$
$n-1$	x_{n-1}						$\uparrow y_{n-1}$
n	x_n						$\uparrow y_n$

Рассмотрим метод прогонки для решения системы, которая получается при замене уравнения (3.44) и второго краевого условия (3.45) *центральными конечно-разностными отношениями*:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + g_i y_i = f_i & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, & \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = B. \end{cases} \quad (3.56)$$

Запишем первые $n - 1$ уравнений системы (3.56) в виде

$$y_{i+1} + m_i y_i + k_i y_{i-1} = \frac{2h^2 f_i}{2 + hp_i} = \Phi_i,$$

где

$$m_i = \frac{2q_i h^2 - 4}{2 + hp_i}; \quad k_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}. \quad (3.57)$$

Затем приводим эти уравнения к виду

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3.58)$$

где коэффициенты c_i, d_i вычисляются по формулам:
при $i = 1$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_1 (\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_1 \alpha_1}, \\ d_1 = \frac{2f_1 h^2}{2 + p_1 h} + k_1 \frac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} = \varphi_1 - k_1 \frac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}; \end{cases} \quad (3.59)$$

при $i = 2, 3, \dots, n$

$$\begin{cases} c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, \\ d_i = \frac{2f_i h^2}{2 + p_i h} - k_i c_{i-1} d_{i-1} = \varphi_i - k_i c_{i-1} d_{i-1}. \end{cases} \quad (3.60)$$

Вычисления производятся в следующем порядке.

Прямой ход. По формулам (3.57) находим m_i, k_i . Вычисляем c_1, d_1 , а затем по рекуррентным формулам (3.60) находим последовательно c_i, d_i ($i = 2, \dots, n$).

Обратный ход. Запишем уравнение (3.58) при $i = n, i = n-1$ и последнее уравнение системы (3.56):

$$\begin{cases} y_n = c_n (d_n - y_{n+1}), \\ y_{n-1} = c_{n-1} (d_{n-1} - y_n), \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно y_n , будем иметь

$$y_n = \frac{2Bh - \beta_1 (d_n - c_{n-1} d_{n-1})}{2\beta_0 h + \beta_1 \left(c_{n-1} - \frac{1}{c_n} \right)}.$$

Используя уже известные числа $c_n, d_n, c_{n-1}, d_{n-1}$, находим y_n . Значения y_i ($i = n-1, \dots, 1$) получаем из рекуррентных формул (3.57). Для вычисления y_0 используем предпоследнее уравнение (3.56):

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}.$$

3.12.4. Метод конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x, y, y') \quad (3.61)$$

при линейных краевых условиях

$$\alpha_0 y(a) - \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B. \quad (3.62)$$

Возьмем на отрезке $[a, b]$ систему равноотстоящих узлов $x_0 = a$, $x_k = x_0 + kh$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) с некоторым шагом $h = \frac{b-a}{n}$ и заменим приближенно уравнение (3.61) и краевые условия (3.62) системой

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right) & (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ \alpha_0 y_0 - \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n - \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (3.63)$$

Получаем нелинейную систему $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными y_k ($k = 0, 1, \dots, n$). Обозначим

$$\begin{cases} \Gamma_0(y) = \alpha_0 y_0 - \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h}, \\ \Gamma_n(y) = \beta_0 y_n - \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \end{cases} \quad (3.64)$$

Решение системы (3.63) находим методом итераций по следующим формулам:

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1}^{(r+1)} - 2y_k^{(r+1)} + y_{k-1}^{(r+1)}}{h^2} = f\left(x_k, y_k^{(r)}, \frac{y_{k+1}^{(r)} - 2y_{k-1}^{(r)}}{2h}\right) & (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ \Gamma_0[y^{(r+1)}] = A, \quad \Gamma_n[y^{(r+1)}] = B. \end{cases} \quad (3.65)$$

Здесь верхний индекс означает номер приближения. На каждом шаге итераций приходится решать систему линейных алгебраических уравнений. Используя специальный вид этой системы, можно дать ее решение в явном виде:

$$y_k^{(r+1)} = \frac{h}{\Delta} [A\beta_0(b-a) + A\beta_1 + \alpha_1 B] + \frac{k}{\Delta} (\alpha_0 B - A\beta_0) + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} f_i^{(r)}, \quad (3.66)$$

где числа $a, b, A, B, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ известны, а Δ и g_{ik} вычисляются по формулам

$$\Delta = \frac{1}{h} [\alpha_0 \beta_0 (b-a) + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0],$$

$$g_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \left(i\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h} \right) \left(k\beta_0 - \beta_0 n - \frac{\beta_1}{h} \right) & (i \leq k), \\ \frac{1}{\Delta} \left(k\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h} \right) \left(i\beta_0 - \beta_0 n - \frac{\beta_1}{h} \right) & (i > k). \end{cases}$$

Заметим, что в правой части формулы (3.66) только $f_i^{(r)}$ зависит от номера итерации.

Таким образом, отыскание решения системы (3.63) сводится к достаточно простой итерационной схеме.

3.12.5. Метод Галеркина

Метод конечных разностей позволяет найти приближенное решение краевой задачи в виде таблицы. Рассмотрим некоторые аналитические методы, дающие возможность найти приближенное решение линейной краевой задачи в виде аналитического выражения. К таким аналитическим методам относятся метод Галеркина и метод коллокации.

Пусть имеем линейную краевую задачу (3.44), (3.45).

Обозначим

$$\begin{cases} L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y, \\ \Gamma_a[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a), \\ \Gamma_b[y] = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b). \end{cases} \quad (3.67)$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана система базисных функций

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots, \quad (3.68)$$

удовлетворяющая следующим условиям.

1. Система (3.68) является ортогональной, т.е.

$$\begin{cases} \int_a^b u_i(x)u_j(x)dx = 0 \text{ при } i \neq j, \\ \int_a^b u_i^2(x)dx \neq 0. \end{cases} \quad (3.69)$$

2. Система (3.68) является полной, т.е. не существует никакой другой отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям $u_i(x)$ ($i=0,1,2, \dots$).

Конечная система базисных функций $\{u_i(x)\}$ ($i=0,1,\dots,n$) выбирается так, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла неоднородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_b[u_0] = B, \quad (3.70)$$

а функции $u_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) удовлетворяли бы однородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_0] = \Gamma_b[u_0] = 0 \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (3.71)$$

Решение краевой задачи (3.44), (3.45) будем искать в виде

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x).$$

Из условий (3.70), (3.71) следует, что эта функция удовлетворяет краевым условиям (3.45).

Рассмотрим выражение, называемое *невязкой*:

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^n c_i L[u_i] - f(x).$$

Выберем коэффициенты c_i таким образом, чтобы значение интеграла от квадрата невязки

$$\int_a^b R^2(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx \quad (3.72)$$

было наименьшим.

Это достигается лишь в том случае, если невязка $R(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ортогональна ко всем базисным функциям u_i .

Записываем условие ортогональности:

$$\int_a^b u_k(x) R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

или в более подробной записи

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b u_k(x) L[u_i] dx = \int_a^b u_k(x) \{f(x) - L[u_0]\} dx.$$

Мы получили систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_i .

Заметим, что при выборе базисных функций условие ортогональности (3.69) не является обязательным, если подобрать коэффициенты из условия минимальности интеграла (3.72). Так, например, взяв за основу полную систему функций, ортогональных на отрезке $[a, b]$, можно выбрать в качестве базисных функций линейные комбинации функций из этой системы. Достаточно лишь, чтобы выбранные функции были линейно независимы на отрезке $[a, b]$.

3.12.6. Метод коллокации

Решение краевой задачи (3.44), (3.45) ищем в виде

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x), \quad (3.73)$$

где $u_i(x) (i = 0, 1, \dots, n)$ — линейно независимые функции, удовлетворяющие условиям (3.70), (3.71).

Потребуем, чтобы невязка

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L[y] - f(x) = L[u_0] - f(x) + \sum_{i=1}^n c_i L[u_i]$$

обращалась в нуль на некоторой системе точек x_1, x_2, \dots, x_n отрезка $[a, b]$, называемых *точками коллокации*, причем число таких точек должно равняться числу коэффициентов c_i в выражении (3.73). Тогда для определения c_1, c_2, \dots, c_n получаем систему уравнений

Глава 4

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной главе рассматриваются вопросы, посвященные методам решения дифференциальных уравнений с частными производными, приводится их классификация. После этого дается понятие начальных и краевых условий, формулируется задача Коши и смешанная задача. В качестве методов решения этих задач рассматривается метод сеток для задачи Дирихле, для уравнений параболического и гиперболического типов, а также метод прогонки для уравнения теплопроводности. Кроме того, в этой главе уделяется внимание численному решению интегральных уравнений. Приводятся основные виды линейных интегральных уравнений. Описывается решение уравнений Фредгольма и уравнения Вольтерра второго рода методом конечных сумм.

4.1. Численное решение уравнений с частными производными

4.1.1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными

В этой главе будут рассмотрены приближенные методы решения некоторых задач для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. В общем случае такое уравнение имеет вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \quad (4.1)$$

где x, y — независимые переменные; u — искомая функция; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} — ее первые и вторые частные производные по аргументам u (для удобства записи производных «штрихи» опускаются).

Решением уравнения (4.1) называется функция $u = u(x, y)$, обращающая это уравнение в тождество. График решения представляет со-

бой поверхность в пространстве Oxy (интегральная поверхность) (рис. 4.1).

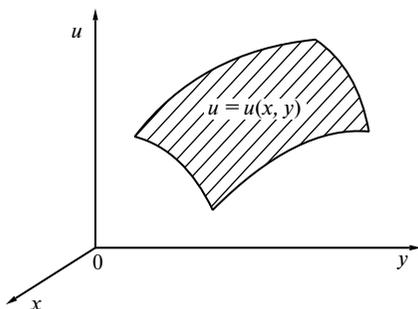


Рис. 4.1. Интегральная поверхность

Пример. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Интегрируя это уравнение по y два раза, будем иметь $u = u\varphi(x) + \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции. Интегральные поверхности представляют собой линейчатые поверхности, образующие которых параллельны координатной плоскости Oxy .

Уравнение (4.1) называется *линейным* или *вполне линейным*, если оно первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведения, т.е. если это уравнение может быть записано в виде

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y), \quad (4.2)$$

причем коэффициенты A, B, C, a, b, c могут зависеть лишь от x и y . В частности, если эти коэффициенты не зависят от x и y , уравнение (4.2) представляет собой *линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами*. Остановимся подробнее на случае линейного уравнения (4.2).

Пусть $D = AC - B^2$ — *дискриминант уравнения*. В зависимости от знака функции D линейное дифференциальное уравнение (4.2) относится в данной области к одному из следующих типов:

- $D > 0$ — *эллиптический тип*;
- $D = 0$ — *параболический тип*;
- $D < 0$ — *гиперболический тип*;
- D не сохраняет постоянного знака — *смешанный тип*.

Тип линейного уравнения (4.2) является его важной особенностью и сохраняется при любом невырожденном преобразовании

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

т.е. таким, что якобиан

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

С линейным дифференциальным уравнением

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y)$$

связано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A(dy)^2 - 2B dx dy + C(dx)^2 = 0,$$

называемое *характеристическим*; решения характеристического уравнения называются *характеристиками линейного дифференциального уравнения*.

Для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами гиперболического типа существует два семейства характеристик — $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ (рис. 4.2).

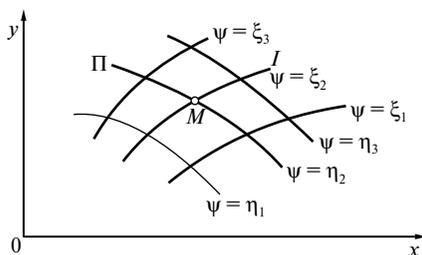


Рис. 4.2. Семейства характеристик для дифференциального уравнения гиперболического типа

Производя в линейном дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами преобразование

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

т.е. принимая параметры этих семейств за новые криволинейные координаты, будем иметь *канонический вид уравнения гиперболического типа*:

$$u_{\xi\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами параболического типа имеет одно семейство характеристик

$$\varphi(x, y) = C.$$

В результате преобразования $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = y$ уравнение параболического типа приводится к каноническому виду:

$$u_{\eta\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Линейное дифференциальное уравнение эллиптического типа допускает два семейства комплексных характеристик:

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1; \quad \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2.$$

Производя преобразования $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, получим *канонический вид уравнения эллиптического типа*:

$$\Delta u + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta),$$

где $\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$ — *оператор Лапласа*.

Простейшее уравнение эллиптического типа $\Delta u = 0$ носит название *уравнения Лапласа*. Неоднородное уравнение Лапласа $\Delta u = f(\xi, \eta)$ называется *уравнением Пуассона*.

4.1.2. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача. Корректность постановки смешанной задачи

Дифференциальное уравнение с частными производными имеет в общем случае бесчисленное множество решений. Поэтому если физический процесс описывается с помощью уравнения с частными производными, то для однозначной характеристики этого процесса нужно к уравнению присоединить какие-то дополнительные условия. Эти дополнительные данные в простейшем случае состоят из *начальных* и *краевых* (граничных) условий. В сущности, различить эти условия можно лишь в том случае, если одна из независимых переменных дифференциального уравнения играет роль времени, а другая — пространственной координаты (для случая двух незави-

симых переменных). При этом условия, относящиеся к начальному моменту времени, называются *начальными*, а условия, относящиеся к фиксированным значениям координат (обычно это координаты граничных точек рассматриваемого линейного континуума), — *краевыми*.

Рассмотрим общую постановку задачи с начальными условиями. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$L[u] = F(x, y), \quad (4.3)$$

где

$$L[u] = A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u. \quad (4.4)$$

Отыскание решения $u = u(x, y)$ уравнения (4.3), удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x, y_0) = \varphi(x), \quad u_y(x, y_0) = \varphi_1(x), \quad (4.5)$$

называется *задачей Коши*, а сами условия носят название *начальных данных Коши*.

Задача Коши допускает простую геометрическую интерпретацию (рис. 4.3): требуется найти интегральную поверхность $u = u(x, y)$ уравнения (4.3), проходящую через данную пространственную кривую

$$y = y_0, \quad u = \varphi(x)$$

и касающуюся в точках $M(x, y_0, u)$ этой кривой заданной системы векторов \mathbf{a} , расположенных в плоскостях $x = \text{const}$ и составляющих с осью Oy угол β , определяемый равенством

$$\text{tg } \beta = \varphi_1(x).$$

Если рассматривать y как время, то задача Коши имеет следующую механическую трактовку: в начальный момент времени $y = y_0$ заданы форма плоской линии $u = \varphi(x, y_0)$ и распределение скоростей ее точек $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_1(x, y_0)$. Предполагая, что каждая точка $M(x, u)$ линии движется параллельно оси Ou , причем дифференциальный закон

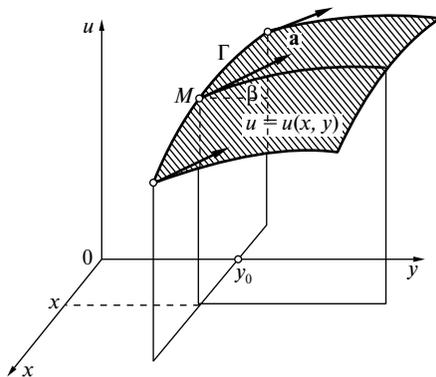


Рис. 4.3. Геометрическая интерпретация задачи Коши

движения дается уравнением (4.3), требуется определить форму линии для последующих моментов времени $y > y_0$ (рис. 4.4)

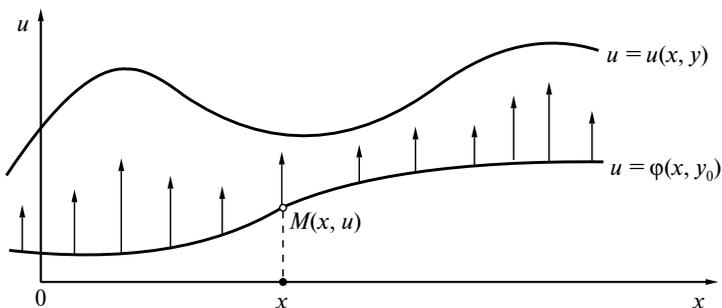


Рис. 4.4. Движение точки $M(x, u)$ линии параллельно оси Ou

Условия (4.5) задают начальные данные Коши для прямой $y = y_0$. Однако это не является обязательным: можно задавать начальные данные на любой гладкой кривой

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Таким образом, приходим к *общей задаче Коши* — найти решение $u = u(x, y)$ дифференциального уравнения (4.3), удовлетворяющее *начальным условиям* кривой

$$u|_{\gamma} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{\gamma} = \varphi_1(x, y).$$

Вместо производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ можно задавать производную $\frac{\partial u}{\partial y}$, так как на кривой $\Phi(x, y) = 0$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = d\varphi(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0.$$

Можно также задавать нормальную производную:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y).$$

Задача Коши обычно ставится для линейного уравнения (4.3) гиперболического и параболического типов.

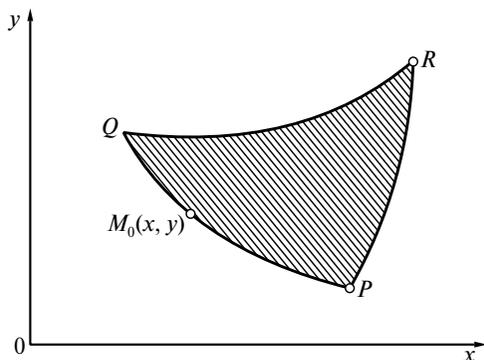


Рис. 4.5. Область распространения для задачи Коши

Если уравнение (4.3) гиперболического типа, то для единственности решения задачи Коши необходимо, чтобы начальная кривая $\Phi(x, y) = 0$ не являлась характеристикой. Если это последнее условие выполнено и начальные данные заданы на конечной дуге PQ кривой $\Phi(x, y) = 0$, то решение задачи Коши, вообще говоря, определено и однозначно в криволинейном треугольнике PQR (область распространения), образованном дугой PQ и дугами характеристик PR и QR различных семейств, проходящих через концы P и Q (рис. 4.5). Предполагается, что коэффициенты дифференциального уравнения определены и непрерывны в соответствующей области.

Пусть начальные данные Коши для уравнения (4.3) заданы на отрезке $a \leq x \leq b$, а решение $u = u(x, y)$ этого уравнения надо определить в полуполосе $K \{a \leq x \leq b; 0 \leq y < \infty\}$ (рис. 4.6).

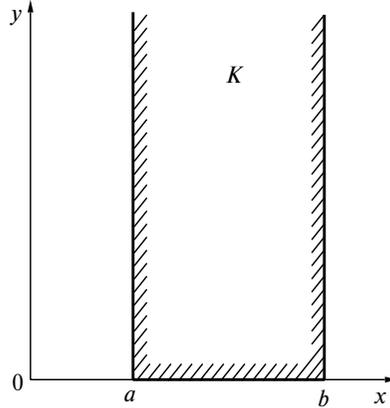


Рис. 4.6. Полуполоса $K \{a \leq x \leq b; 0 \leq y < \infty\}$

Тогда для однозначности этого решения дополнительно нужно задать условия на прямых $x = a$ и $x = b$, что приводит к *смешанной задаче*. Достаточно общей задачей этого типа является нахождение в полуполосе K решения $u = u(x, y)$ дифференциального уравнения (4.3), удовлетворяющего начальным и граничным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \varphi_1(x) \quad (a \leq x \leq b, y = 0); \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 u(a, y) + \alpha_1 u_x(a, y) = \psi(y), \\ \beta_0 u(b, y) + \beta_1 u_x(b, y) = \psi_1(y); \end{cases} \quad (4.7)$$

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0; \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0; \quad 0 \leq y < \infty.$$

Особого внимания заслуживает предельный случай, когда $a = -\infty$ или $b = \infty$. Здесь краевые условия (4.7) или совсем отпадают, или заменяются некоторыми условиями «на бесконечности».

Смешанная задача для уравнения (4.3) в общем аспекте может быть сформулирована следующим образом: дана конечная или бесконечная область G в плоскости Oxy , имеющая кусочно-гладкую границу Γ (рис. 4.7).

Требуется найти в области G решение дифференциального уравнения

$$L[u] = F(x, y), \quad (4.8)$$

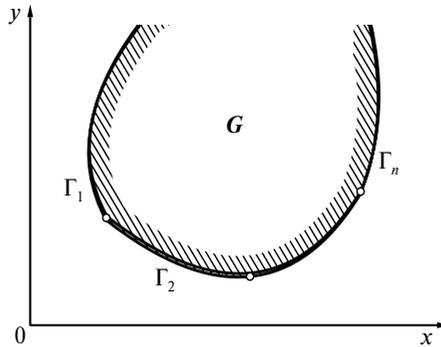


Рис. 4.7. Область G решения дифференциального уравнения

если на некоторых частях границы $\Gamma_1, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ выполнены соотношения

$$\begin{cases} L_{ij}[u] = \varphi_{ij}(x, y), \\ (x, y) \in \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, \rho_i), \end{cases} \quad (4.9)$$

где L_{ij} — или *дифференциальные операторы* по переменным u порядка не выше первого, или *конечные соотношения*, а $\varphi_{ij}(x, y)$ — заданные функции.

Задачу Коши, очевидно, можно рассматривать как частный случай этой общей смешанной задачи.

При рассмотрении физических проблем функции $\varphi_{ij}(x, y)$ обычно определяются приближенно из опыта. Поэтому решение такой смешанной задачи имеет практическую ценность лишь в том случае, если небольшие ошибки в начальных и краевых условиях не могут привести к большим отклонениям соответствующего решения. В этом случае говорят, что смешанная задача поставлена *корректно*, или, иначе говоря, непрерывно зависит от начальных и краевых условий.

Определение. Смешанная задача (4.8)–(4.9) называется *корректно поставленной* в области G , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\eta = \eta(\xi) > 0$ такое, что при изменении функций $\varphi_{ij}(x, y)$ на величины, модуль которых меньше чем η , решение $u = u(x, y)$ изменяется во всей области G меньше чем на ε . В противном случае считается, что задача поставлена *некорректно*.

Для уравнений эллиптического типа задача Коши обычно не рассматривается. Это объясняется тем, что, как правило, задача Коши

для уравнений эллиптического типа поставлена некорректно, т.е. ничтожно малые изменения начальных данных могут повлечь существенное изменение решения.

4.1.3. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

Исследования стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность и др.) часто приводят к уравнениям эллиптического типа

$$L[u] \equiv \Delta u + au_x + bu_y + cu = F(x, y), \quad (4.10)$$

где $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$ и $F(x, y)$ — непрерывные функции. Для этих уравнений обычно ставятся лишь краевые задачи, так как задача Коши для уравнений эллиптического типа может быть некорректной.

Наиболее часто встречаются следующие краевые задачи.

Первая краевая задача. На контуре Γ , ограничивающем область G (рис. 4.8), задана непрерывная функция $\varphi(P) = \varphi(x, y)$. Требуется найти функцию $u(P) = u(x, y)$, удовлетворяющую внутри G уравнению (4.10) и принимающую на границе заданные значения $\varphi(P)$, т.е. должны быть выполнены условия:

$$L[u(P)] = F(P) \text{ при } P \in G;$$

$$u(P) = \varphi(P) \text{ при } P \in \Gamma.$$

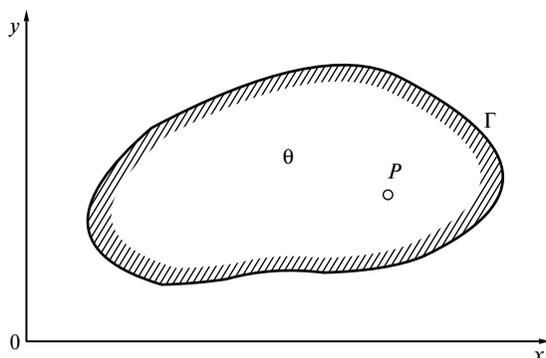


Рис. 4.8. Область G решения эллиптического дифференциального уравнения

Вторая краевая задача. На контуре Γ , ограничивающем область G , задана непрерывная функция $\varphi_1(P)$. Требуется найти функцию

$u(P) = u(x, y)$, удовлетворяющую внутри G уравнению (4.10), нормальная производная которой на Γ принимает заданные значения $\varphi_1(P)$, т.е. требуется, чтобы

$$L[u(P)] = F(P) \text{ при } P \in G, \quad \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \varphi_1(P) \text{ при } P \in \Gamma.$$

Третья краевая задача. На контуре Γ , ограничивающем область G (см. рис. 4.8), задана непрерывная функция $\psi(P) = \psi(x, y)$. Требуется найти функцию $u(P) = u(x, y)$ такую, чтобы

$$L[u(P)] = F(P) \text{ при } P \in G,$$

$$\alpha_0 u(P) + \alpha_1 \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \psi(P) \text{ при } P \in \Gamma,$$

где $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$.

Третью краевую задачу можно рассматривать как общую. Действительно, при $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$ получаем первую краевую задачу, а при $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$ — вторую краевую задачу. Заметим, что если область G ограниченная, то соответствующая краевая задача называется *внутренней*, в противном случае — *внешней*.

Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ первая краевая задача называется *задачей Дирихле*, вторая — *задачей Неймана* и третья — *смешанной краевой задачей*.

4.1.4. Метод сеток

Метод сеток, или метод конечных разностей, является одним из самых распространенных в настоящее время методов численного решения уравнений с частными производными. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. При рассмотрении этого метода ограничимся случаем двух независимых переменных.

Пусть в плоскости xOy имеется некоторая область G с границей Γ (рис. 4.9). Построим на плоскости два семейства параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$y = y_0 + kl \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

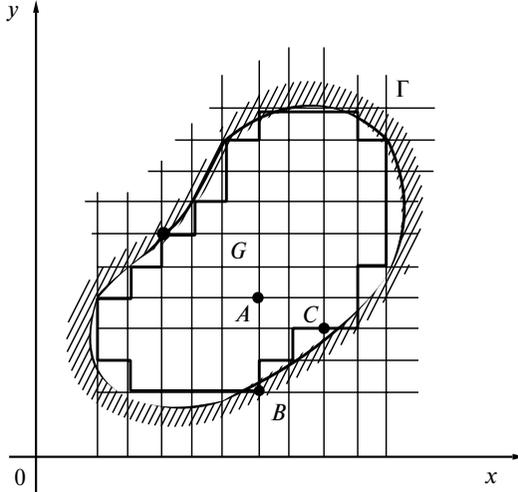


Рис. 4.9. Некоторая область G с границей Γ

Точки пересечения этих прямых назовем *узлами*. Два узла называются *соседними*, если они удалены друг от друга в направлении оси Ox или Oy на расстояние, равное шагу сетки h или l соответственно. Выделим узлы, принадлежащие области $G + \Gamma$, а также некоторые узлы, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии, меньшем, чем шаг, от границы Γ . Те узлы, у которых все четыре соседних узла принадлежат выделенному множеству узлов, называются *внутренними* (узел A , см. рис. 4.9). Оставшиеся из выделенных узлов называются *граничными* (узлы B, C , см. рис. 4.9).

Значения искомой функции $u = u(x, y)$ в узлах сетки будем обозначать через $u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kl)$. В каждом внутреннем узле $x_0 + ih, y_0 + kl$ заменим частные производные разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}. \quad (4.11)$$

В граничных точках, как правило, пользуются менее точными формулами вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l}. \quad (4.12)$$

Аналогично заменяются частные производные второго порядка, например:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{l^2}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Указанные замены производных в каждом узле сетки позволяют свести решение уравнений с частными производными к решению системы разностных уравнений.

4.1.5. Метод сеток для задачи Дирихле

Первая краевая задача, или задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (4.14)$$

ставится следующим образом: найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую внутри некоторой области G уравнению (4.14), а на границе Γ — условию

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (4.15)$$

где $\varphi(x, y)$ — заданная непрерывная функция.

Выбрав шаги h и l по x и y соответственно, строим сетку

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ik & (i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots), \\ y_i &= y_0 + kl & (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \end{aligned}$$

и заменяем в каждом внутреннем узле (x_i, y_i) производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ конечно-разностными отношениями (4.13), а уравнение (4.14) — конечно-разностными уравнениями

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} - u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} - u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik}, \quad (4.16)$$

где $f_{ik} = f(x_i, y_k)$.

Уравнения (4.16) вместе со значениями u_{ik} в граничных узлах образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $u(x, y)$ в узлах (x_i, y_k) . Наиболее простой вид эта система имеет для прямоугольной области и для $l = h$. В этом случае уравнения (4.16) записываются следующим образом:

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik} = h^2 f_{ik}, \quad (4.17)$$

а значения в граничных узлах в точности равны значениям граничной функции. При $f(x, y) \equiv 0$ уравнение (4.14) называется *уравнением Лапласа* и соответствующие конечно-разностные уравнения имеют вид

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1}). \quad (4.18)$$

При составлении уравнений (4.17) и (4.18) была использована схема узлов, изображенная на рис. 4.10. Здесь и в дальнейшем на рисунках указаны только индексы узла, например узел (x_i, y_k) обозначается через (i, k) .

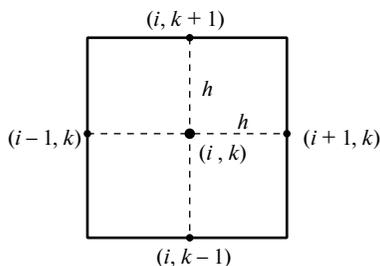


Рис. 4.10. Схема узлов, использованных при составлении уравнений

Иногда бывает удобнее использовать схему узлов, показанную на рис. 4.11.

В этом случае уравнению Лапласа соответствуют следующие конечно-разностные уравнения:

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}), \quad (4.19)$$

а для уравнения Пуассона будем иметь

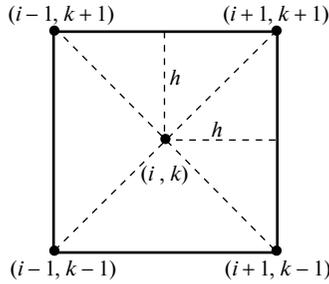


Рис. 4.11. Схема узлов, соответствующая конечно-разностным уравнениям

$$u_{ik} = \frac{1}{4} (u_{i-1, k-1} + u_{i+1, k-1} + u_{i-1, k+1} + u_{i+1, k+1}) + \frac{h^2}{2} f_{ik}.$$

Погрешность замены дифференциального уравнения разностным, т.е. остаточный член R_{ik} для уравнения Лапласа, оценивается неравенством

$$|R_{ik}| \leq \frac{h^2}{6} M_4,$$

где $M_4 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}$.

Погрешность приближенного решения, полученного разностным методом, складывается из трех погрешностей:

- погрешности замены дифференциального уравнения разностным;
- погрешности аппроксимации краевых условий;
- погрешности, получаемой в результате того, что система разностных уравнений решается приближенным методом.

4.1.6. Итерационный метод решения системы конечно-разностных уравнений

Непосредственное решение системы конечно-разностных уравнений методами последовательного исключения при большом числе узлов оказывается слишком громоздким. Здесь более удобны итерационные методы решения, которые учитывают специальный вид таких систем и оказываются удобными для реализации на ЭВМ.

Рассмотрим один из наиболее простых методов — *процесс усреднения Либмана* для систем (4.18).

Согласно методу Либмана вычисления ведутся так: выбрав начальные приближения $u_{ij}^{(0)}$, последовательные приближения $u_{ij}^{(k+1)}$ для внутренних узлов сеточной области определяем по формуле

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.20)$$

Для получения начальных приближений можно указать два способа:

- значение $u_{ij}^{(0)}$ во внутренних узлах получают путем интерполяции, используя известные граничные значения;
- составляют систему конечно-разностных уравнений для сетки с более крупным шагом и решают ее методом исключения, а затем полученные значения интерполируют на узлы данной сетки.

Доказано, что для любого шага h процесс Либмана сходится к точному решению независимо от выбора начальных значений, т.е. существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{ij}^{(k)} = u_{ij}.$$

Итерационный процесс будет сходиться значительно быстрее, если при вычислении последующих средних арифметических использовать не только значения предыдущего приближения, но и вновь найденные значения. Обычно итерации продолжают до тех пор, пока в двух последовательных приближениях не совпадет требуемое количество десятичных знаков. Для оценки погрешности приближенного решения уравнения Лапласа можно использовать принцип Рунге, согласно которому погрешность ε_h приближенного решения u_h , полученного с шагом h , дается приближенной формулой

$$\varepsilon_h \approx \frac{u_h - u_{2h}}{3}, \quad (4.21)$$

где u_{2h} — приближенное решение, полученное с шагом $2h$.

Отметим, что указанный метод итераций приводит к выполнению стандартной операции усреднения в каждом внутреннем узле, поэтому он оказывается очень удобным для программирования на ЭВМ.

4.1.7. Решение краевых задач для криволинейных областей

Если граница Γ области G криволинейна, то значения u_{ij} для граничных узлов получают путем переноса значений из точек границы Γ . Погрешность, получаемую в результате такого переноса, можно значительно уменьшить, если для каждого граничного узла составлять уравнение следующего вида:

- для узла A_h (рис. 4.12)

$$u_{A_h} = \frac{\delta_1 u_B + h u_A}{\delta_1 + h}; \quad (4.22)$$

- для узла C_h (см. рис. 4.12)

$$u_{C_h} = \frac{\delta_2 u_D + h u_C}{\delta_2 + h}. \quad (4.23)$$

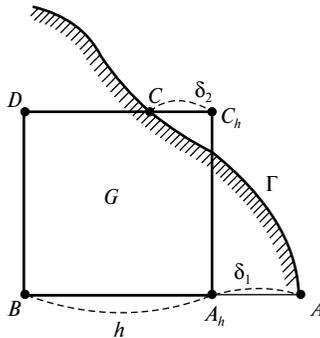


Рис. 4.12. Перенос значений из точек границы

Получив одно из таких уравнений для каждого граничного узла и присоединив их к системе (4.17) или (4.18), получим систему алгебраических уравнений относительно значений u_{ij} в узлах сетки. Если эту систему решать методом Либмана, то последовательные приближения граничных значений будут вычисляться по формулам

$$u_{A_h}^{(k+1)} = u_A + \frac{u_B^{(k)} - u_A}{h + \delta_1} \delta_1, \quad (4.24)$$

$$u_{C_h}^{(k+1)} = u_C + \frac{u_D^{(k)} - u_C}{\delta_2 - h} \delta_2. \quad (4.25)$$

4.1.8. Метод сеток для уравнения параболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а именно: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.26)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) (0 < x < s) \quad (4.27)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t). \quad (4.28)$$

К задаче (4.26)–(4.28) приводит, в частности, задача о распространении тепла в однородном стержне длины s . Путем введения новой переменной $\tau = a^2 t$ уравнение (4.26) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

поэтому в дальнейшем примем $a = 1$.

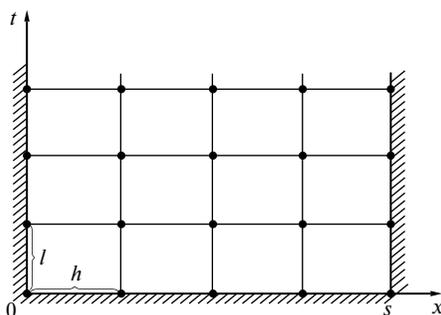


Рис. 4.13. Семейства параллельных прямых для полуполосы $t \geq 0, 0 \leq x \leq s$

Построим в полуполосе $t \geq 0, 0 \leq x \leq s$ (рис. 4.13) два семейства параллельных прямых:

$$x = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad t = jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Обозначим $x_i = ih, t_j = jl, u(x_i, t_j) = u_{ij}$ и приближенно заменим в каждом внутреннем узле (x_i, t_j) производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (4.29)$$

а производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ — одним из двух разностных отношений:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l}; \quad (4.30)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l}. \quad (4.31)$$

Тогда для уравнения (4.26) при $a = 1$ получаем два типа конечно-разностных уравнений:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}; \quad (4.32)$$

$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (4.33)$$

Обозначив $\sigma = l / h^2$, приводим эти уравнения к виду

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad (4.34)$$

$$(1 + 2\sigma)u_{ij} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0. \quad (4.35)$$

Отметим, что для составления уравнения (4.34) была использована схема узлов, данная на рис. 4.14, — *явная схема*, для уравнения (4.35) — схема узлов, данная на рис. 4.15, — *неявная схема*.

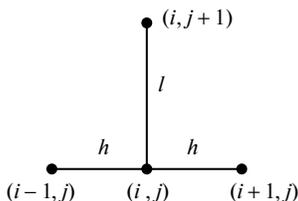


Рис. 4.14. Явная схема для уравнения

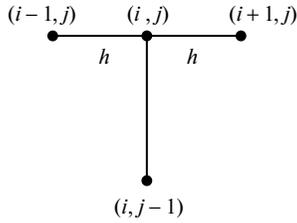


Рис. 4.15. Неявная схема для уравнения

При выборе числа σ в уравнениях (4.34), (4.35) следует учитывать два обстоятельства:

1) погрешность замены дифференциального уравнения разностным должна быть наименьшей;

2) разностное уравнение должно быть устойчивым.

Доказано, что уравнение (4.34) будет устойчивым при $0 < \sigma \leq 1/2$, а уравнение (4.35) — при любом σ . Наиболее удобный вид уравнение (4.34) имеет при $\sigma = 1/2$:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \quad (4.36)$$

и при $\sigma = 1/6$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}). \quad (4.37)$$

Оценки погрешностей приближенных решений, полученных из уравнений (4.36), (4.37), (4.35) в полосе $0 \leq x \leq s, 0 \leq t \leq T$, соответственно имеют вид:

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{3} M_1 h^2; \quad (4.38)$$

$$|u - \bar{u}| \leq \frac{T}{135} M_2 h^4; \quad (4.39)$$

$$|u - \bar{u}| \leq T \left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{12} \right) M_1, \quad (4.40)$$

где \bar{u} — точное решение задачи (4.26)–(4.28);

$$M_1 = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right|, \left| \varphi''(t) \right|, \left| \psi''(t) \right| \right\} \text{ при } 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq s;$$

$$M_2 = \max \left\{ \left| f^{(6)}(x) \right|, \left| \varphi^{(4)}(t) \right|, \left| \psi^{(4)}(t) \right| \right\} \text{ при } 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq s.$$

Из приведенных оценок погрешностей видно, что уравнение (4.37) дает более высокую точность решения по сравнению с уравнением (4.36). Но уравнение (4.36) имеет более простой вид, а кроме того, шаг l по аргументу t для уравнения (4.37) должен быть значительно меньше, что приводит к большему объему вычислений. Уравнение (4.35) дает меньшую точность, но при этом шаги l и h выбираются независимо друг от друга. Уравнения (4.36) и (4.37) позволяют вычислить значения функции $u(x, y)$ на каждом слое по явным формулам через значения на предыдущем слое; уравнение (4.35) (неявная схема) этим свойством не обладает.

Методом сеток можно решать смешанную краевую задачу для неоднородного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t).$$

Тогда соответствующее разностное уравнение, использующее явную схему узлов, имеет вид

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}. \quad (4.41)$$

Отсюда получаем:

- при $\sigma = 1/2$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}; \quad (4.42)$$

- при $\sigma = 1/6$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}) + lF_{ij}. \quad (4.43)$$

В этом случае имеют место следующие оценки погрешности:

- для уравнения (4.42)

$$|\tilde{u} - u| \leq \frac{T}{4} \left(M_2 + \frac{1}{3} M_4 \right) h^2;$$

- для уравнения (4.43)

$$|\bar{u} - u| \leq \frac{T}{72} \left(\frac{1}{3} M_3 + \frac{1}{5} M_6 \right) h^4,$$

$$\text{где } M_2 = \max \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|; M_3 = \max \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|; M_4 = \max \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|; M_6 = \max \left| \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right|.$$

4.1.9. Метод прогонки для уравнения теплопроводности

Пусть требуется в полосе $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}, \quad (4.44)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = f(x), u(0, t) = \varphi(t), u(a, t) = \psi(t). \quad (4.45)$$

Выбираем шаги l, h по аргументам x и t соответственно, в каждом внутреннем узле заменяем производные конечно-разностными отношениями (4.29), (4.31), вычисляем значения функций $f(x), \varphi(t), \psi(t)$ в граничных узлах и, обозначив $s = h^2 / l$, получаем систему

$$u_{i-1, j+1} - (2+s)u_{i, j+1} + u_{i+1, j+1} + su_{ij} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n; j=0, 1, 2, \dots), \quad (4.46)$$

$$u_{i0} = f(x_i), \quad (4.47)$$

$$u_{0j} = \varphi(t_j), \quad (4.48)$$

$$u_{nj} = \psi(t_j). \quad (4.49)$$

Метод прогонки решения системы (4.46)–(4.49) заключается в том, что уравнения (4.46) приводятся к виду

$$u_{i, j+1} = a_{i, j+1} (b_{i, j+1} + u_{i+1, j+1}), \quad (4.50)$$

где числа $a_{i, j+1}, b_{i, j+1}$ определяются последовательно по формулам

$$a_{1, j+1} = \frac{1}{2+s}, b_{1, j+1} = \varphi(t_{j+1}) + su_{1j}, \quad (4.51)$$

$$\begin{cases} a_{i,j+1} = \frac{1}{2+s-a_{i-1,j+1}}, \\ b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + su_{ij} \quad (i=2,3,\dots,n). \end{cases} \quad (4.52)$$

Затем из краевого условия (4.49) находим

$$u_{n,j+1} = \Psi(t_{j+1})$$

и последовательно определяем значения $u_{i,j+1}$ ($i=n-1,\dots,1$) по формуле (4.50).

Таким образом, метод прогонки позволяет определить значения функции $u(x,t)$ на слое $t=t_{j+1}$, если известны ее значения на слое $t=t_j$.

Порядок решения задачи

Прямой ход. Используя краевые условия (4.48), по формулам (4.51), (4.52) находим числа $a_{1,j+1}, b_{1,j+1}, a_{i,j+1}, b_{i,j+1}$ ($i=2,3,\dots,n$).

Обратный ход. Из краевого условия (4.49) получаем $u_{n,j+1} = \Psi(t_{j+1})$. Затем по формуле (4.50) вычисляем

$$\begin{cases} u_{n-1,j+1} = (u_{n,j+1} + b_{n-1,j+1})a_{n-1,j+1}, \\ u_{n-2,j+1} = (u_{n-1,j+1} + b_{n-2,j+1})a_{n-2,j+1}, \\ \dots \\ u_{1,j+1} = (u_{2,j+1} + b_{1,j+1})a_{1,j+1}. \end{cases} \quad (4.53)$$

Пример. Методом прогонки найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}, \quad (4.54)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = 4x(1-x), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0. \quad (4.55)$$

Решение. Возьмем $h=0,1$, $l=0,01$; следовательно, $s=h^2/l=1$.

Найдем методом прогонки значения функции $u(x,t)$ на слое $t=0,01$.

Прямой ход. Записываем в строке u_{j0} табл. 4.1 значения начальной функции $f(x_i)(i=0,1,\dots,10)$, находим по формулам (4.51) при $j=0$ числа

$$a_{11} = \frac{1}{3}, \quad b_{11} = u_{10} = 0,36.$$

Затем по формулам (4.52) при $j=0$ последовательно вычисляем:

$$a_{21} = \frac{1}{3-a_{11}} = \frac{3}{8} = 0,375; \quad b_{21} = a_{11}b_{11} + u_{20} = 0,12 + 0,64 = 0,760;$$

$$a_{31} = \frac{1}{3-a_{21}} = \frac{1}{2,625} = 0,381; \quad b_{31} = a_{21}b_{21} + u_{30} = \\ = 0,375 \cdot 0,760 + 0,84 = 1,125.$$

и т.д.

Результаты вычислений записываем в строках a_{i1}, b_{i1} табл. 4.1.

Таблица 4.1

Решение задачи методом прогонки

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_{j0}	0	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360	0
a_{i1}		0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	
b_{j0}		0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	0,813	
u_{i1}	0	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0,310	0

Обратный ход. Из краевых условий получаем

$$u_{10,1} = 0.$$

Значения $u_{i1}(i=9,8,\dots,1)$ вычисляем по формулам (4.53) при $j=0$:

$$u_{91} = (u_{10,1} + b_{91})a_{91} = 0,813 \cdot 0,382 = 0,310;$$

$$u_{81} = (u_{91} + b_{81})a_{81} = (0,310 + 1,186) \cdot 0,382 = 0,517;$$

...

$$u_{11} = (u_{21} + b_{11})a_{11} = (0,572 + 0,360) \cdot 0,333 = 0,310.$$

4.1.10. Метод сеток для уравнения гиперболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения колебания струны, заключающуюся в отыскании функции, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.56)$$

а также начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \Phi(x) \quad (0 \leq x \leq s) \quad (4.57)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t). \quad (4.58)$$

Так как введение переменной $\tau = at$ приводит уравнение (4.56) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.59)$$

то в дальнейшем можем принять $a = 1$.

Построив в полуполосе $t \geq 0, 0 \leq x \leq s$ (рис. 4.16) два семейства параллельных прямых

$$x = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$t = jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

заменяем производные в уравнении (4.59) разностными отношениями.

Пользуясь симметричными формулами для производных, будем иметь

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (4.60)$$

Обозначив $\alpha = l/h$, получим разностное уравнение

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}). \quad (4.61)$$

При $\alpha \leq 1$ это разностное уравнение устойчиво.

В частности, при $\alpha = 1$ уравнение (4.61) имеет наиболее простой вид:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (4.62)$$

Оценка погрешности приближенного решения, полученного из уравнения (4.61) в полосе $0 \leq x \leq s, 0 < t \leq T$, имеет вид

$$|\tilde{u} - u| \leq \frac{h^2}{12} \left[(M_4 h + 2M_3)T + T^2 M_4 \right], \quad (4.63)$$

где \tilde{u} — точное решение; $M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right\}$ ($k = 3, 4$).

Заметим, что для получения уравнения (4.61) была использована схема узлов, отмеченных на рис. 4.16. Эта схема является явной, так как уравнение (4.61) позволяет найти значения функции $u(x, t)$ на слое t_{j+1} , если известны значения на двух предыдущих слоях. Для того чтобы найти приближенное решение задачи (4.56)–(4.58), необходимо знать значения решения на двух начальных слоях. Их можно найти из начальных условий одним из следующих способов.

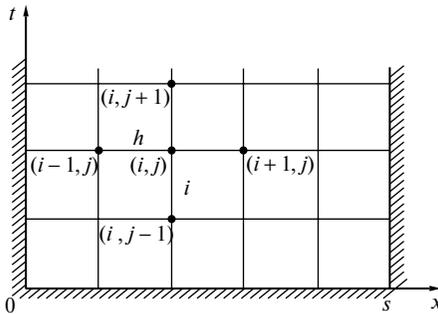


Рис. 4.16. Схема узлов для получения разностного уравнения

Первый способ. Заменяем в начальном условии (4.57) производную $u_t(x, 0)$ разностным отношением

$$\frac{u_{j1} - u_{i0}}{l} = \Phi(x_i) = \Phi_i.$$

Для определения значений $u(x, t)$ на слоях $j = 0, j = 1$ получаем

$$u_{i0} = f_i, \quad u_{i1} = f_i + l\Phi_i. \quad (4.64)$$

Оценка погрешности значений u_{i1} в этом случае имеет вид

$$|\tilde{u}_{i1} - u_{i1}| \leq \frac{\alpha h}{2} M_2, \quad (4.65)$$

где $M_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \right\}$.

Второй способ. Заменяем производную $u_t(x, 0)$ разностным отношением

$$\frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2l},$$

где $u_{i,-1}$ — значения функции $u(x, t)$ на слое $j = -1$.

Тогда из начальных условий (4.57) будем иметь

$$u_{i0} = f_i, \frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2l} = \Phi_i. \quad (4.66)$$

Напишем разностное уравнение (4.62) для слоя $j=0$:

$$u_{i1} = u_{i+1,0} + u_{i-1,0} - u_{i,-1}. \quad (4.67)$$

Исключив из уравнений (4.66), (4.67) значения $u_{i,-1}$, получим

$$u_{i0} = f_i, u_{i1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + l\Phi_i. \quad (4.68)$$

Оценка погрешности значений u_{i1} имеет вид

$$|\tilde{u}_{i1} - u_{i1}| \leq \frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3, \quad (4.69)$$

где $M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right\}$ ($k = 3, 4$).

Третий способ. Если функция $f(x)$ имеет конечную вторую производную, то значения u_{i1} можно определить с помощью формулы Тейлора:

$$u_{i1} \approx u_{i0} + l \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}. \quad (4.70)$$

Используя уравнение (4.59) и начальные условия (4.57), можем записать

$$u_{i0} = f_i, \quad \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} = \Phi_i, \quad \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2} = f_i''$$

Тогда по формуле (4.70) будем иметь

$$u_{i1} \approx f_i + l\Phi_i + \frac{l^2}{2} f_i'' \quad (4.71)$$

Погрешность значений u_{i1} , полученных по этой формуле, имеет порядок $O(l^3)$.

Замечание. Аналогичным образом применяется метод сеток при решении смешанной краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t).$$

В этом случае разностное уравнение имеет вид

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \alpha^2 h^2 F_{ij}.$$

4.2. Численное решение интегральных уравнений

4.2.1. Основные виды линейных интегральных уравнений

Под *интегральным уравнением* понимается уравнение, содержащее неизвестную функцию $y(x)$ под знаком определенного интеграла. Ограничимся рассмотрением *линейных интегральных уравнений*, в которые неизвестная функция входит только в первой степени (линейно).

Приведем некоторые наиболее часто встречающиеся типы интегральных уравнений. Уравнение вида

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (4.72)$$

где $K(x, s)$ (ядро) и $f(x)$ — известные функции, называется *интегральным уравнением Фредгольма первого рода*.

Уравнение вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad (4.73)$$

где λ — числовой параметр, носит название *интегрального уравнения Фредгольма второго рода*.

Параметр λ вводится по следующим соображениям: при данном значении λ интегральное уравнение (4.73) не всегда имеет решение. Варьируя параметр λ , можно добиться того, чтобы решение уравнения (4.73) существовало. Параметр λ можно также ввести в левую часть уравнения Фредгольма первого рода (4.72).

Если в (4.73) $f(x) \equiv 0$, то получается однородное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds, \quad (4.74)$$

допускающее нулевое (тривиальное) решение $y \equiv 0$. Те значения параметра λ , при которых однородное интегральное уравнение (4.74) имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями (собственными числами)* ядра $K(x,s)$ или соответствующего уравнения (4.73), а отвечающие им ненулевые решения — *собственными функциями*. Основным результатом теории следующий (теорема Фредгольма):

1) если λ не есть собственное значение ядра $K(x,s)$, соответствующее неоднородное интегральное уравнение Фредгольма (4.73) с регулярным ядром $K(x,s)$ и непрерывным свободным членом $f(x)$ имеет единственное непрерывное решение $y(x)$ ($a \leq x \leq b$);

2) если же есть собственное значение, то уравнение (4.73) или не имеет решений, или же допускает бесчисленное их множество.

В приложениях важную роль играют уравнения Фредгольма второго рода с *симметрическим ядром* $K(x,s)$, т.е. таким, что

$$K(x,s) = K(s,x).$$

Симметрическое ядро обладает следующими свойствами:

1) для всякого симметрического ядра существует по меньшей мере одно собственное значение;

2) все собственные значения симметрического ядра действительны;

3) собственные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ симметрического ядра, соответствующие различным собственным значениям λ и μ ($\lambda \neq \mu$), ортогональны между собой на основном промежутке (a, b) , т.е.

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

В приложениях встречаются также интегральные уравнения вида

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x) \quad (4.75)$$

и

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad (4.76)$$

которые носят названия *интегральных уравнений Вольтерра* соответственно первого и второго рода. Вводя функцию

$$K^*(x,s) = \begin{cases} K(x,s) & \text{при } a \leq s \leq x, \\ 0 & \text{при } s > x, \end{cases}$$

уравнения Вольтерра (4.75) и (4.76) можно записать в виде соответствующих уравнений Фредгольма с ядром $K^*(x,s)$. Таким образом, теория уравнений Вольтерра сводится к теории уравнений Фредгольма; однако в некоторых случаях уравнения Вольтерра полезно изучать независимо.

Примером уравнения Вольтерра первого рода является *обобщенное уравнение Абеля*

$$\int_0^x \frac{y(s)ds}{(x-s)^\alpha} = f(x) \quad (0 < \alpha < 1), \quad (4.77)$$

где $f(x)$ — известная непрерывно дифференцируемая функция. Решение уравнения (4.77) дается формулой

$$y(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \right],$$

в чем можно убедиться непосредственно.

Заметим, что если ядро $K(x, s)$ и $f(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, причем $K(x, x) \neq 0$ при $a \leq s \leq b$, то уравнение Вольтерра первого рода (4.75) сводится к уравнению Вольтерра второго рода (4.76). Действительно, дифференцируя уравнение (4.75) по x , будем иметь

$$K(x, x)y(x) + \int_a^x K'_x(x, s)y(s)ds = f'(x).$$

Отсюда

$$y(x) + \int_a^x K_1(x, s)y(s)ds = f_1(x),$$

где $K_1(x, s)_1 = \frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)}$; $f_1(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)}$.

К линейным интегральным уравнениям может быть приведено большое количество задач математической физики.

4.2.2. Решение уравнений Фредгольма методом конечных сумм

Мы рассмотрим здесь интегральные уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x) \tag{4.78}$$

и второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x). \tag{4.79}$$

Идея метода конечных сумм заключается в замене определенного интеграла конечной суммой с помощью одной из квадратурных формул:

$$\int_a^b F(x)dx \approx \sum_{j=1}^n A_j F(x_j), \tag{4.80}$$

где x_j — абсциссы точек отрезка $[a, b]$; A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — коэффициенты квадратурной формулы, не зависящие от $F(x)$.

Заменяя приближенно интеграл в уравнениях Фредгольма (4.78), (4.79) по формуле (4.80) и полагая $x = x_i$, будем иметь соответственно

$$\sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (4.81)$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (4.82)$$

где $y_i = y(x_i)$; $K_{ij} = K(x_i, x_j)$; $f_i = f(x_i)$.

Получаем системы линейных алгебраических уравнений относительно значений y_i . Решив эти системы одним из известных методов (Гаусса, итераций), мы получим таблицу приближенных значений y_i в точках x_i . Это позволит записать приближенное решение уравнения (4.78) в виде интерполяционного многочлена, а приближенное решение уравнения (4.79) — в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) y_j. \quad (4.83)$$

В зависимости от выбора квадратурной формулы (4.80) будем иметь следующие значения коэффициентов A_j и абсцисс x_j :

- для формулы трапеций

$$h = \frac{b-a}{n}, A_0 = A_n = \frac{h}{2}, A_j = h \quad (j=1,2,\dots,n-1),$$

$$x_j = a + jh \quad (j=0,1,\dots,n);$$

- для формулы Симпсона

$$n = 2m, h = \frac{b-a}{2m}, A_0 = A_{2m} = \frac{h}{3}, A_1 = A_3 = \dots = A_{2m-1} = \frac{4h}{3},$$

$$A_2 = A_4 = \dots = A_{2m-2} = \frac{2h}{3}, x_j = a + jh \quad (j=0,1,\dots,2m);$$

- для формулы Гаусса

$$A_j = (b-a) A_j^{(n)}, x_j = a + (b-a) x_j^{(n)},$$

где $x_j^{(n)}$ — абсциссы Гаусса; $A_j^{(n)}$ — коэффициенты Гаусса для интервала $(0,1)$.

Погрешность приближенного решения зависит от погрешности выбранной квадратурной формулы.

Пример. Используя квадратурную формулу Симпсона при $n = 2$, найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^1 x e^{xs} y(s) ds = e^x. \quad (4.84)$$

Решение. Для формулы Симпсона имеем

$$h = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}, A_0 = A_2 = \frac{1}{6}, A_1 = \frac{2}{3}, x_0 = 0, x_1 = 0,5, x_2 = 1.$$

Следовательно, для уравнения (4.84) можем написать

$$y(x) + \frac{1}{6} [x e^{0 \cdot x} y_0 + 4x e^{0,5 \cdot x} y_1 + x e^{1 \cdot x} y_2] = e^x.$$

Полагая в последнем равенстве $x = x_i$, получаем систему

$$y_0 = 1,$$

$$y_1 + \frac{0,5}{6} (y_0 + 4e^{0,25} y_1 + e^{0,5} y_2) = e^{0,5},$$

$$y_2 + \frac{1}{6} (y_0 + 4e^{0,5} y_1 + e^1 y_2) = e^1,$$

которая после упрощений принимает вид

$$y_0 = 1,$$

$$1,4280 y_1 + 0,1374 y_2 = 1,5654,$$

$$1,0991 y_1 + 1,4530 y_2 = 2,5516.$$

Решив эту систему, получаем $y_0 = 1, y_1 = 1,0002, y_2 = 0,9995$. Для сравнения заметим, что точным решением уравнения (4.84) является функция $y(x) \equiv 1$.

Используя формулу (4.83), записываем приближенное решение уравнения (4.84) в виде

$$y(x) = e^x - \frac{x}{6} \left(1 + 4,001e^{\frac{x}{2}} + 1,000e^x \right).$$

Пример. Применяя квадратурную формулу Гаусса при $n=2$, найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xs} y(s) ds = 1 - \frac{1}{2x} (e^x - 1). \quad (4.85)$$

Решение. Для формулы Гаусса имеем

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}, x_1 = 0,2113, x_2 = 0,7887.$$

Заменяя уравнение (4.85) системой (4.82), получаем

$$y_1 - \frac{1}{4} (e^{x_1^2} y_1 + e^{x_1 x_2} y_2) = 1 - \frac{1}{2x_1} (e^{x_1} - 1),$$

$$y_2 - \frac{1}{4} (e^{x_1 x_2} y_1 + e^{x_2^2} y_2) = 1 - \frac{1}{2x_2} (e^{x_2} - 1).$$

Подставляя значения x_1 и x_2 , после преобразований приходим к системе

$$0,7386y_1 - 0,2954y_2 = 0,4434,$$

$$-0,2954y_1 + 0,5343y_2 = 0,2384.$$

Решив эту систему, получаем $y_1 = 0,9997, y_2 = 0,9990$. Для сравнения заметим, что точным решением данного уравнения является функция $y(x) \equiv 1$. Таким образом, приближенное решение уравнения (4.85) можем записать в виде

$$y(x) = 0,2499e^{0,2113x} + 0,2497e^{0,7887x} + 1 - \frac{1}{2x} (e^x - 1).$$

4.2.3. Решение уравнения Вольтерра второго рода методом конечных сумм

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x,s) y(s) ds = f(x). \quad (4.86)$$

Известно, что если ядро $K(x, s)$ есть непрерывная функция в области $R\{a \leq s \leq x \leq b\}$, а $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интегральное уравнение (4.86) имеет единственное решение при любом λ . Выберем одну из квадратурных формул Ньютона–Котеса:

$$\int_a^b F(x) dx \approx \sum_{j=0}^n A_j F(x_j), \quad (4.87)$$

где x_j — абсциссы точек отрезка $[a, b]$, а A_j — коэффициенты квадратурной формулы ($j=0, 1, \dots, n$). Полагая в (4.86) $x = x_i$ и заменяя затем приближенно определенные интегралы конечными суммами, будем иметь

$$y_i - \lambda \sum_{j=0}^i A_j^{(i)} K_{ij} y_j = f_i \quad (i=0, 1, \dots, n), \quad (4.88)$$

где $y_i = y(x_i)$; $K_{ij} = K(x_i, x_j)$; $f_i = f(x_i)$.

Получаем линейную систему с треугольной матрицей. Последнее обстоятельство существенно облегчает ее решение. Значения коэффициентов A_j зависят от выбора квадратурной формулы.

Глава 5

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

В этой главе описывается алгоритм применения метода Монте-Карло, дается определение понятию случайного числа, приводятся способы получения случайных чисел. После этого рассматриваются методика вычисления кратных интегралов, решения систем линейных уравнений и решения задачи Дирихле с помощью метода Монте-Карло.

5.1. Идея метода Монте-Карло

Обычный путь решения задачи состоит в том, что указывается *алгоритм* (последовательность действий), с помощью которого искомая величина f находится или точно, или с заданной погрешностью. А именно: если через $f_1, f_2, \dots, f_n \dots$ обозначить соответствующие результаты последовательно накапливаемых действий, то

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n,$$

причем в случае конечного числа операций процесс обрывается на некотором шаге. Здесь процесс вычислений является строго *детерминированным*: два различных вычислителя при отсутствии ошибок приходят к одному и тому же результату.

Однако встречаются задачи, где построение такого рода алгоритма практически невыполнимо или сам алгоритм оказывается чрезмерно сложным. В этих случаях часто прибегают к моделированию математической или физической сущности задачи и использованию законов больших чисел теории вероятностей. Оценки $f_1, f_2, \dots, f_n \dots$ искомой величины f получаются на основании статистической обработки материала, связанного с результатами некоторых многократных *случайных испытаний*. При этом требуется, чтобы случайная величина f_n при $n \rightarrow \infty$ по вероятности сходилась к искомой величине f , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ должно иметь место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f - f_n| < \varepsilon) = 1,$$

где P обозначает соответствующую вероятность.

Выбор величины f_n обуславливается конкретными особенностями задачи. Например, часто искомую величину f трактуют как вероятность некоторого случайного события (или более общего, как математическое ожидание некоторой случайной величины). Тогда частоту f_n появления события при n соответствующих случайных испытаниях (или соответственно эмпирическое среднее значений случайной величины) в широких предположениях можно рассматривать как вероятностную оценку искомой величины. Возможны также и другие варианты. Заметим, что в этих случаях вычислительный процесс является *недетерминированным*, так как он определяется итогами случайных испытаний.

Способы решения задач, использующие случайные величины, получили общее название *метода Монте-Карло*. Более точно под методом Монте-Карло понимается совокупность приемов, позволяющих получать решения математических или физических задач при помощи многократных случайных испытаний. Оценки искомой величины выводятся статистическим путем и носят вероятностный характер. На практике случайные испытания заменяются результатами некоторых вычислений, производимых над *случайными числами*.

Эффективное применение метода Монте-Карло стало возможным после появления быстродействующих ЭВМ, так как для получения достаточно точной оценки искомой величины требуются выполнение вычислений для весьма большого количества частных случаев и последующая статистическая обработка колоссального числового материала. Заметим, что при использовании метода Монте-Карло нет необходимости знать точные соотношения между данными и искомыми величинами задачи, а достаточно лишь выявить тот комплекс условий, при наличии которого соответствующее явление имеет место. Это обстоятельство делает возможным использование метода Монте-Карло для решения логических задач.

Из математических задач, для которых разработано применение метода Монте-Карло, отметим следующие: решение систем линейных уравнений; обращение матриц; нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы; вычисление кратных интегралов; решение задачи Дирихле; решение функциональных уравнений различных типов и др. Метод Монте-Карло успешно используется также для решения задач ядерной физики. Заметим, что для решения одной и той же конкретной задачи схема применения метода может быть существенно различной.

5.2. Случайные числа

При практическом применении метода Монте-Карло случайные испытания обычно заменяют выборкой случайных чисел.

Определение. Величина называется *случайной*, если она принимает те или иные значения в зависимости от появления или неоявления некоторого случайного события.

Случайная величина X задается законом распределения

$$P(X < x) = \Phi(x),$$

где x — любое действительное число; $\Phi(x)$ — известная функция (*функция распределения*). Значения случайной величины называются *случайными числами*.

Определение. Если случайная величина имеет заданный закон распределения (равномерный, нормальный и т.п.), то будем говорить, что соответствующие случайные числа *распределены по этому закону*.

Пусть числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ являются значениями одной и той же случайной величины X при независимых между собой испытаниях с повторяющимися условиями.

Тогда *последовательность случайных чисел* $\{x_n\}$ будем называть *случайной* с соответствующим законом распределения.

В дальнейшем будем рассматривать *равномерно распределенные* на единичном отрезке $0 \leq x \leq 1$ случайные последовательности $\{x_n\}$. Если (a, b) — любой промежуток из отрезка $[0, 1]$ (концы отрезка a и b по договоренности могут как включаться в промежуток (a, b) , так и не включаться в него) и $v_n = v_n(a, b)$ — число элементов конечной подпоследовательности x_1, x_2, \dots, x_n , принадлежащих промежутку (a, b) , то для равномерно распределенной последовательности $\{x_n\}$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(a, b)}{n} = b - a,$$

т.е. *предельная относительная частота равномерно распределенной на $[0, 1]$ последовательности $\{x_n\}$ для каждого частичного промежутка (a, b) равна длине этого промежутка*.

Если случайная последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, то линейное преобразование

$$y_n = A + (B - A)x_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где A и B — данные числа, приводит к случайной последовательности $\{y_n\}$, равномерно распределенной на отрезке $[A, B]$.

Вообще, имея случайную последовательность $\{x_n\}$, равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$, можно построить случайную последовательность $\{y_n\}$ заданным законом распределения $\Phi(x)$. А именно: пусть

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) dt$$

— соответствующая функция распределения (если y_n , $n = 1, 2, \dots$, содержится в конечном отрезке $A \leq y \leq B$, то полагают $\varphi(y) = 0$ при $y \notin [A, B]$, где $\varphi(t)$ — *плотность вероятности*).

Для простоты будем предполагать, что функция

$$x = \Phi(y)$$

непрерывна и строго монотонна (рис. 5.1).

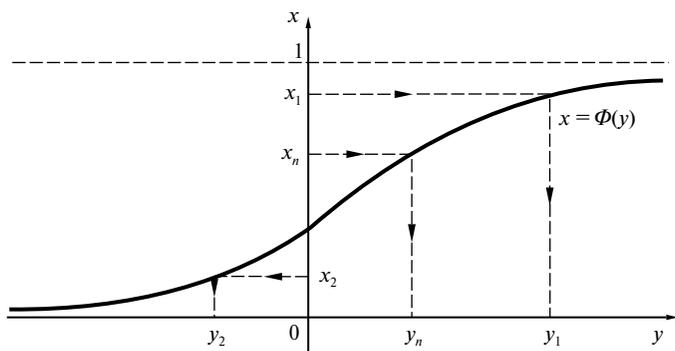


Рис. 5.1. График функции $\Phi(y_n)$

Тогда для каждого x_n , определяя y_n из уравнения $x_n = \Phi(y_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), получим случайную последовательность $\{y_n\}$, имеющую заданный закон распределения $\Phi(y)$. А именно: по способу построения для последовательности $\{y_n\}$ будет справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(a, b)}{n} = \int_a^b \varphi(y) dy,$$

где $v_n(a, b)$ — число элементов конечной подпоследовательности y_1, \dots, y_n , принадлежащих произвольному промежутку (a, b) .

В частности, полагая

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

этим способом получим каноническую нормально распределенную (гауссову) случайную последовательность $\{y_n\}$, соответствующую случайной величине Y математическим ожиданием $MY = 0$ дисперсией $DY = 1$. Линейное преобразование

$$z_n = \sigma y_n + c \quad (n = 1, 2, \dots)$$

дает нормально распределенную случайную последовательность $\{z_n\}$, соответствующую случайной величине Z , для которой математическое ожидание $MZ = c$ и дисперсия $DZ = \sigma^2$.

5.3. Способы получения случайных чисел

Для выработки случайных чисел можно использовать результаты случайных физических процессов (например, бросание игральной кости, вращение рулетки, вспышки в счетчике Гейгера, шум при электрических передачах и т.п.). Имеются также готовые таблицы случайных чисел.

Строго говоря, при пользовании механическими приспособлениями для получения случайных чисел нет абсолютной уверенности, что мы имеем дело со случайными событиями с заданным распределением вероятностей. Поэтому полученный материал обычно подвергается статистической «проверке на случайность».

В этом смысле надежнее употреблять случайные числа из таблиц, где такая проверка уже проделана; однако использование таблиц случайных чисел для решения задач на электронных цифровых машинах часто связано с серьезными неудобствами.

Для решения задач методом Монте-Карло обычно требуется весьма большое количество случайных чисел. Эти числа практически наиболее удобно получают с помощью *специальных датчиков* случайных чисел, подключаемых к машине. Действие этих датчиков регулируется случайными физическими процессами (например, радиоактивным распадом, шумами в электронных лампах и т.п.).

Так как воспроизводство случайных чисел, отвечающих данной теоретической модели, есть процесс весьма тонкий и сложный, то на практике часто ограничиваются получением так называемых *псевдослучайных чисел*, в основных чертах похожих на соответствующие случайные. Источниками (датчиками) псевдослучайных чисел служат достаточно сложные математические алгоритмы. В дальнейшем под термином «случайное число» мы будем понимать как случайные, так и псевдослучайные числа, если различие между ними не имеет существенного значения.

Укажем некоторые простые приемы получения случайных чисел, в обобщенном смысле равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$. Для простоты будем предполагать, что эти числа представляют собой правильные десятичные дроби с фиксированным количеством десятичных знаков после запятой, например *s-разрядные* десятичные дроби, т.е. могут быть записаны в виде

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_s}{10^s},$$

где α_i ($i = 1, 2, \dots, s$) — цифры этого числа, принимающие значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Для составления таблицы случайных чисел подобного вида, равномерно распределенных на $[0, 1]$, достаточно указать способы получения цифр α_i соблюдением следующих условий:

а) α есть *случайная выборка* из системы чисел 0—9, причем все указанные значения равновероятны;

б) выбор предыдущей цифры α_i никоим образом не влияет на выбор последующей α_{i+1} .

Для получения *s-разрядного* случайного числа такая выборка производится *s* раз.

Система выбора, удовлетворяющая условиям а) и б), практически может быть реализована многими способами. Рассмотрим некоторые из них.

1. В урну опускают 10 одинаковых перенумерованных шаров с номерами 0—9. Из урны последовательно извлекается шар и записывается его номер α . После каждого извлечения шар возвращают в урну и перед каждым следующим тиражом все шары в урне перемешиваются.

2. Одновременно бросают две игральные кости. Если n_1 и n_2 — числа выпавших очков ($n_1, n_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) соответственно на первой и второй костях (кости должны быть различаемыми), то очеред-

ная цифра α случайного числа берется равной остатку от деления суммы $6(n_1 - 1) + n_2$ на 10, где $n_1 < 6$, т.е. α есть целое неотрицательное число, меньшее 10, удовлетворяющее сравнению

$$6(n_1 - 1) + n_2 \equiv \alpha \pmod{10}.$$

Если $n_1 = 6$, то кости перебрасываются. Из формулы вытекает, что цифра α с равной вероятностью может принять любое значение от 0 до 9.

3. Берется s -разрядное целое число. Число возводится в квадрат и выбираются средние s его разрядов; затем процесс повторяется. Если s достаточно велико, например $s \geq 10$, то выбираемые разряды могут быть приняты за наборы элементов s -разрядных псевдослучайных чисел.

Для получения последовательности псевдослучайных чисел можно также использовать умножение многозначного числа на постоянный множитель и извлечение средних разрядов или возведение многозначного числа в квадрат и приведение результата по модулю некоторого достаточно большого простого числа.

4. Псевдослучайная последовательность $\{x_n\}$ вырабатывается с помощью процесса

$$x_n = 2^{-42} u_n,$$

где

$$u_0 = 1; u_{n+1} \equiv 5^{17} u_n \pmod{2^{42}}.$$

Используется десятичное разложение положительного иррационального числа

$$\omega = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \dots = \beta_0 + (\omega),$$

где β_0 — целая часть числа ω ; (ω) — его дробная часть.

Для получения случайной последовательности $\{x_n\}$ полагают

$$x_n = (n\omega) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если требуется случайная последовательность, состоящая из s -разрядных чисел, то в числах $(n\omega)$ ограничиваются соответствующими разрядами.

Для решения некоторых задач нужно иметь несколько случайных последовательностей

$$\{x_n^{(1)}\}, \{x_n^{(2)}\}, \dots, \{x_n^{(m)}\}.$$

В этом случае выбирают m линейно независимых положительных иррациональностей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ и полагают

$$x_n^{(k)} = (n\omega_k) \quad (k = 1, 2, \dots, m; \quad n = 1, 2, \dots).$$

Можно также взять одну равномерно распределенную случайную последовательность $\{x_n\}$ и произвести из нее m выборок:

$$\begin{aligned} &\{x_1, x_{m+1}, x_{2m+1}, \dots\}, \\ &\{x_2, x_{m+2}, \dots, x_{2m+2}, \dots\}, \\ &\dots\dots\dots \\ &\{x_m, x_{2m}, x_{3m}, \dots\}, \end{aligned}$$

беря числа не подряд, а через m элементов. Очевидно, таким образом мы будем иметь m равномерно распределенных подпоследовательностей.

С помощью этих и других методов составлены таблицы случайных чисел. В таких таблицах обычно даются случайные десятичные цифры; из них легко можно конструировать случайные числа определенного разряда (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Случайные числа, равномерно распределенные на отрезке

0,57705	0,35483	0,11578	0,65339	0,66674
0,71618	0,09393	0,93045	0,93382	0,99279
0,73710	0,30304	0,93011	0,05758	0,24202
0,70131	0,55186	0,42844	0,00336	0,94010
0,16961	0,64003	0,52906	0,88222	0,60981
0,53324	0,20514	0,09461	0,98585	0,13094
0,43166	0,00188	0,99602	0,52103	0,35193
0,26275	0,55709	0,69962	0,91827	0,64560
0,05926	0,86977	0,31311	0,07069	0,64559
0,66289	0,31303	0,27004	0,13928	0,68008

5.4. Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло

Пусть функция

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

непрерывна в ограниченной замкнутой области S и требуется вычислить m -кратный интеграл

$$I = \iiint_{(S)} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (5.1)$$

Геометрически число I представляет собой $(m+1)$ -мерный объем прямого цилиндриоида в пространстве $Ox_1x_2\dots x_m y$ построенного на основании S и ограниченного сверху данной поверхностью $y = f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ (рис. 5.2).

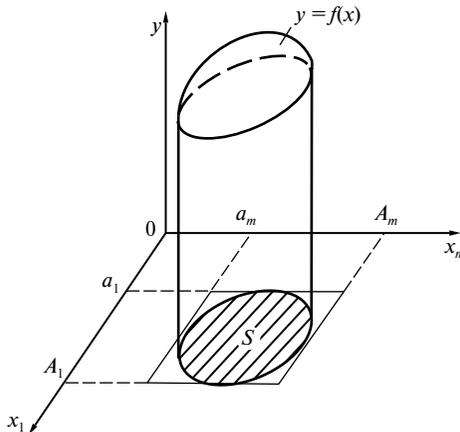


Рис. 5.2. Прямой цилиндриод, построенный на основании S

Преобразуем интеграл (5.1) так, чтобы новая область интегрирования целиком содержалась внутри единичного m -мерного куба. Пусть область S расположена в m -мерном параллелепипеде:

$$a_i \leq x_i \leq A_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.2)$$

Сделаем замену переменных:

$$x_i = a_i + (A_i - a_i)\xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.3)$$

Тогда, очевидно, m -мерный параллелепипед (5.2) преобразуется в m -мерный единичный куб

$$0 \leq \xi_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (5.4)$$

и следовательно, новая область интегрирования σ , которая находится по обычным правилам, будет целиком расположена внутри этого куба.

Вычисляя якобиан преобразования, будем иметь:

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)} = \begin{vmatrix} A_1 - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 - a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_m - a_m \end{vmatrix} = (A_1 - a_1)(A_2 - a_2) \dots (A_m - a_m).$$

Таким образом,

$$I = \iiint_{(\sigma)} \dots \int F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m, \quad (5.5)$$

где

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = (A_1 - a_1)(A_2 - a_2) \dots (A_m - a_m) \times \\ \times f(a_1 + (A_1 - a_1)\xi_1, a_2 + (A_2 - a_2)\xi_2, \dots, a_m + (A_m - a_m)\xi_m).$$

Введя обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \\ d\sigma = d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_m,$$

запишем интеграл (5.5) короче в следующем виде:

$$I = \iiint_{(\sigma)} \dots \int F(\xi) d\sigma. \quad (5.5')$$

Мы укажем два способа вычисления интеграла (5.5') методом случайных испытаний.

Первый способ. Выбираем m равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ последовательностей случайных чисел:

$$\begin{aligned} &\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \dots; \\ &\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}, \dots; \\ &\dots\dots\dots \\ &\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)}, \dots \end{aligned}$$

Точки $M_i(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots, \xi_i^{(m)})(i = 1, 2, \dots)$ можно рассматривать как случайные. Выбрав достаточно большое число N точек M_1, M_2, \dots, M_N ,

проверяем, какие из них принадлежат области σ (первая категория) и какие не принадлежат ей (вторая категория).

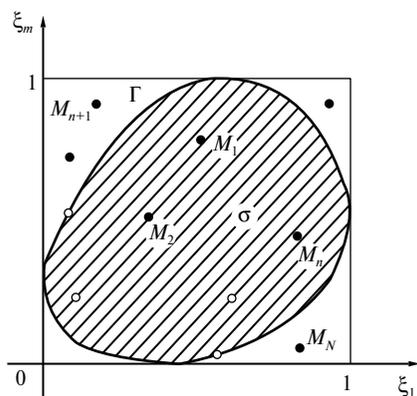


Рис. 5.3. Точки M_i принадлежат области σ

Пусть $M_i \in \sigma$ при $i=1,2,\dots,n$ и $M_i \notin \sigma$ при $i=n+1,n+2,\dots,N$ (рис. 5.3). Для удобства мы здесь изменяем нумерацию точек. Заметим, что относительно границы Γ области σ следует заранее договориться, причисляются ли граничные точки или часть их к области σ или не причисляются к ней. В общем случае при гладкой границе Γ это не имеет существенного значения; в отдельных случаях нужно решать вопрос с учетом конкретной обстановки.

Взяв достаточно большое число n точек $M_i \in \sigma$, приближенно можно положить

$$y_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i).$$

Отсюда искомый интеграл выражается формулой

$$I = y_{\text{cp}} \sigma = \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i), \quad (5.6)$$

где под σ понимается m -мерный объем области интегрирования σ . Если вычисление объема σ затруднительно, то можно принять

$$\sigma \approx \frac{n}{N}.$$

Отсюда

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(M_i).$$

В частном случае, когда σ есть единичный куб ($\sigma = 1$), проверка становится излишней, т.е. $n = N$ и мы имеем просто

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(M_i).$$

Для проверки условий $M_i \in \sigma$ при $i = 1, 2, \dots, n$ и $M_i \notin \sigma$ при $i = n+1, n+2, \dots, N$ обычно исходят из аналитического задания границы Γ области σ . В простейшем случае, если поверхность Γ задана уравнением

$$\varphi(\xi) = 0, \quad (5.7)$$

где при $\varphi(\xi) < 0$ точка $\xi \in \sigma$, при $\varphi(\xi) > 0$ точка $\xi \notin \sigma$, мы имеем:

- 1) если $\varphi(M_i) < 0$, то точка M_i — первой категории;
- 2) если $\varphi(M_i) > 0$ то точка M_i — второй категории;
- 3) точки M_i , для которых $\varphi(M_i) = 0$, причисляются к первой или второй категории по соглашению.

Заметим, что уравнение (5.7) можно заменить любым равносильным ему уравнением, что иногда дает возможность значительно облегчить выкладки. Так, например, неравенство для круга

$$x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} \leq 0$$

удобнее заменить эквивалентным

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

так как второе неравенство проверяется проще.

Если область σ стандартная и задана неравенствами

$$\begin{cases} \underline{\xi}_1 \leq \xi_1 \leq \overline{\xi}_1, \\ \underline{\xi}_2(\xi_1) \leq \xi_2 \leq \overline{\xi}_2(\xi_1), \\ \underline{\xi}_m(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \leq \xi_m \leq \overline{\xi}_m(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}), \end{cases} \quad (5.8)$$

то для определения принадлежности случайной точки $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ первой или второй категории проверяют выполнение этих неравенств.

Таблица 5.2

Схема определения принадлежности случайной точки $M(\xi_1, \dots, \xi_m)$ стандартной области

ξ_1	$\underline{\xi}_1$	$\overline{\xi}_1$	ε_1	ξ_2	$\underline{\xi}_2$	$\overline{\xi}_2$	ε_2

...	ξ_m	$\underline{\xi}_m$	$\overline{\xi}_m$	ε_m	ε	y

Практически это удобно делать по схеме, приведенной в табл. 5.2. Здесь

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_i \in [\underline{\xi}_i, \overline{\xi}_i] \\ 0, & \text{если } \xi_i \notin [\underline{\xi}_i, \overline{\xi}_i] \end{cases}$$

($i = 1, 2, \dots, m$) и $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$. Очевидно, если $\varepsilon = 1$, то $M \in \sigma$; если $\varepsilon = 0$, то $M \notin \sigma$.

Заметим, что если $\varepsilon_j = 0$ ($j < m$), то дальнейшие значения $\varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_m$ можно не подсчитывать, так как они не повлияют на окончательный результат. Значение функции $y = F(M)$ подсчитывается только для тех точек M , для которых $\varepsilon = 1$. Затем для вычисления интеграла I используется формула (5.6).

Пример. Методом Монте-Карло приближенно вычислить интеграл

$$I = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) dx dy, \quad (5.9)$$

где область интегрирования σ определяется следующими неравенствами (рис. 5.4):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 2x - 1. \end{cases}$$

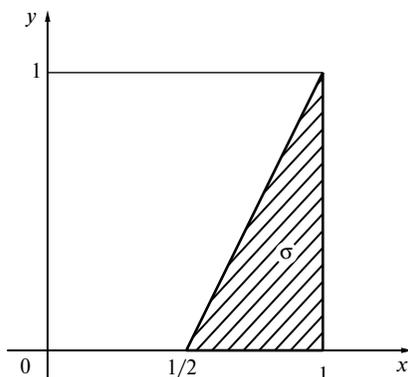


Рис. 5.4. Заданная область интегрирования σ

Решение. Интеграл (5.9) дан в приведенном виде, т.е. область интегрирования σ расположена в единичном квадрате:

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Для решения задачи воспользуемся таблицей случайных чисел (см. табл. 5.1), рассматривая каждую очередную пару чисел таблицы как соответствующие координаты x и y случайной точки $M(x, y)$. Так как вычисление носит иллюстративный характер, то ограничимся $N = 20$ случайными точками, причем координаты их для простоты округлим до трех десятичных знаков. Результаты вычислений приведены в табл. 5.3, где положено

$$\underline{x} = \frac{1}{2}, \quad \bar{x} = 1;$$

$$\underline{y}(x) = 0, \quad \bar{y}(x) = 2x - 1;$$

$$z = x^2 + y_2.$$

Отсюда

$$z_{\text{cp}} = \frac{1}{4} \cdot 3,837 = 0,96.$$

Следовательно, по формуле (5.6), учитывая, что $\sigma = \frac{1}{4}$, имеем

$$I = z_{\text{cp}} \cdot \sigma = 0,96 \cdot \frac{1}{4} = 0,24. \quad (5.10)$$

Если приближенно принять

$$\sigma \approx \frac{n}{N} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

то получим

$$I \approx 0,96 \cdot \frac{1}{5} = 0,19.$$

Заметим, что точное значение интеграла

$$I = \frac{7}{32} \approx 0,22.$$

Поэтому относительная погрешность результата (5.10) равна

$$\delta = \frac{0,24 - 0,22}{0,22} \approx 9\%.$$

Конечно, тут число точек $N = 20$ недостаточно, чтобы статистические закономерности могли проявиться в должной мере, но, тем не менее, для грубой ориентировки получен удовлетворительный результат.

Второй способ. Если функция $F(\xi) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ неотрицательна, то интеграл (5.5) можно рассматривать как объем тела V $(m+1)$ -мерном пространстве $O\xi_1\xi_2 \dots \xi_m y$, т.е.

$$I = \iiint_{(V)} \dots \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m dy, \quad (5.11)$$

где область интегрирования V определяется условиями

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \sigma, 0 \leq y \leq F(\xi).$$

Пусть

$$0 \leq F(\xi) \leq B. \quad (5.12)$$

Таблица 5.3

Вычисление двойного интеграла методом Монте-Карло

x	\underline{x}	\bar{x}	ε_1	y	$\underline{y}(x)$	$\bar{y}(x)$	ε_2	ε	y
0,577	0,500	1,000	1	0,716	0	0,154	0	0	
0,737	0,500	1,000	1	0,701	0	0,474	0	0	

x	\underline{x}	\bar{x}	ε_1	y	$\underline{y}(x)$	$\bar{y}(x)$	ε_2	ε	y
0,170	0,500	1,000	0	0,533				0	
0,432	0,500	1,000	0	0,263				0	
0,059	0,500	1,000	0	0,663				0	
0,355	0,500	1,000	0	0,094				0	
0,303	0,500	1,000	0	0,552				0	
0,640	0,500	1,000	1	0,205	0	0,280	1	1	0,452
0,002	0,500	1,000	0	0,557				0	
0,870	0,500	1,000	1	0,323	0	0,740	1	1	0,855
0,116	0,500	1,000	0	0,930				0	
0,930	0,500	1,000	1	0,428	0	0,860	1	1	1,048
0,529	0,500	1,000	1	0,095	0	0,058	0	0	
0,996	0,500	1,000	1	0,700	0	0,992	1	1	1,482
0,313	0,500	1,000	0	0,270				0	
0,653	0,500	1,000	1	0,934	0	0,306	0	0	
0,058	0,500	1,000	0	0,003				0	
0,882	0,500	1,000	1	0,986	0	0,764	0	0	
0,521	0,500	1,000	1	0,918	0	0,042	0	0	
0,071	0,500	1,000	0	0,239				0	
Σ								4	3,837

Введя в интеграле (5.11) новую переменную

$$\eta = \frac{1}{B} y, \tag{5.13}$$

получим

$$I = B \iiint_{(v)} \dots \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m d\eta,$$

где новая область v есть цилиндроид пространства $O\xi_1\xi_2\dots\xi_m\eta$, построенный на области σ и ограниченный снизу гиперплоскостью

$\eta = 0$, а сверху — гиперповерхностью $\eta = \frac{1}{B} F(\xi)$ (рис. 5.5).

В силу неравенства (5.12) объем v целиком лежит в $(m+1)$ -мерном кубе $0 \leq \xi_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $0 \leq \eta < 1$. Возьмем теперь $m+1$ равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных последовательностей

$$\{\xi_i^{(1)}\}, \{\xi_i^{(2)}\}, \dots, \{\xi_i^{(m)}\}, \{\eta_i\},$$

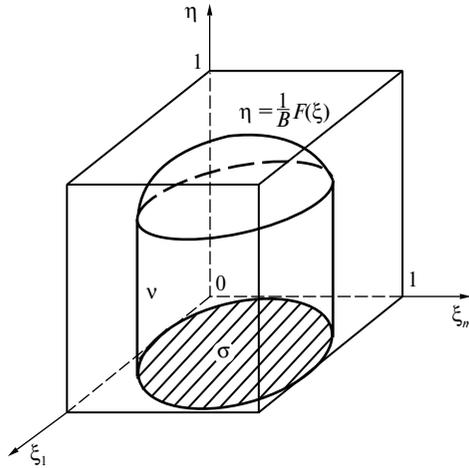


Рис. 5.5. Цилиндроида пространства $O\xi_1\xi_2\dots\xi_m\eta$, построенный на области σ и ограниченный снизу гиперплоскостью $\eta = 0$

соответствующие элементы которых будем рассматривать как координаты случайных точек $M_i \{ \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots, \xi_i^{(m)}, \eta_i \}$ ($i = 1, 2, \dots$) пространства $O\xi_1\xi_2\dots\xi_m\eta$.

Если из общего числа N случайных точек n принадлежит объему v , а $N - n$ не принадлежит этому объему, то при достаточно большом числе N приближенно полагают

$$I \approx B \cdot \frac{n}{N}, \quad (5.14)$$

т.е.

$$I = B \cdot P(M \in v),$$

где точка M с одинаковой вероятностью может занимать положения M_1, M_2, \dots, M_N . Выполнение соотношения $M \in v$ проверяется аналогично тому, как было указано в первом способе.

Заметим, что если σ есть единичный куб $0 \leq \xi_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то для точки $M_i (\xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(m)}, \eta_i)$ все координаты которой предполагаются принадлежащими единичному отрезку $[0, 1]$, достаточно проверить лишь выполнение соотношения

$$\eta_i \leq \frac{1}{B} F(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_m^{(m)}).$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда функция

$$F(\xi) = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

— знакопеременная. Пусть

$$-b \leq F(\xi) \leq B, \quad (5.15)$$

где b и B — неотрицательные числа.

Положим

$$F(\xi) = -b + (B + b)\tilde{F}(\xi).$$

Тогда будем иметь

$$\iint_{(\sigma)} \dots \int F(\xi) d\sigma = -b\sigma + (B + b) \iint_{(\sigma)} \dots \int \tilde{F}(\xi) d\sigma,$$

где функция $\eta = \tilde{F}(\xi)$ в силу неравенства (5.15) удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \tilde{F}(\xi) \leq 1.$$

Интеграл

$$\iint_{(\sigma)} \dots \int \tilde{F}(\xi) d\sigma = \iint_{(\nu)} \dots \int d\sigma d\eta$$

может быть вычислен способом, указанным выше. Для оценки приближенного равенства

$$I_0 = \iint_{(\nu)} \dots \int d\sigma d\eta = P(M \in \nu) \approx \frac{n}{N} \quad (5.16)$$

предположим сначала, что мы имеем дело с идеальными случайными равномерно распределенными последовательностями точек M_i ($i = 1, 2, \dots$), координаты которых принадлежат единичному отрезку $[0, 1]$.

На основании теоремы Бернулли, применяя неравенство Чебышева, будем иметь

$$P\left(\left|\frac{n}{N} - I_0\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{I_0(1 - I_0)}{\varepsilon^2 N} \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 N}. \quad (5.17)$$

Задавшись для данного ε гарантийной вероятностью

$$P\left(\left|\frac{n}{N} - I_0\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \delta, \quad (5.18)$$

из неравенства (5.17) получаем, что условие (5.18) заведомо имеет место, если

$$\frac{1}{4\varepsilon^2 N} = \delta. \quad (5.19)$$

Отсюда выводим

$$\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{\delta N}}. \quad (5.20)$$

Таким образом, точность оценки

$$I_0 \approx \frac{n}{N}$$

при заданной предельной вероятности ее обратно пропорциональна корню квадратному из числа испытаний, т.е. $\varepsilon = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Это обстоятельство обуславливает сравнительно медленную сходимость метода Монте-Карло: например, чтобы уменьшить погрешность результата в 10 раз, число испытаний нужно увеличить в 100 раз! Если точность оценки ε и гарантийная вероятность $1 - \delta$ заданы, то из формулы (5.19) выводим необходимое число испытаний:

$$N = \frac{1}{4\varepsilon^2 \delta}. \quad (5.21)$$

Например, при $\varepsilon = 0,001$ и $\delta = 0,01$ имеем

$$N = 25\,000\,000.$$

Оценка (5.21) является завышенной и может быть значительно улучшена!

Отметим одно важное обстоятельство: число испытаний N не зависит от размерности интеграла I_0 , и поэтому метод Монте-Карло выгодно применять для вычисления кратных интегралов высоких размерностей, где применение обычных кубатурных формул встречает значительные затруднения. Например, для приближенного вычисления обычным путем 10-кратного интеграла, распространенного на единичный объем, при выборе шага $h = 0,1$ понадобится сумма, содержащая примерно 10^{10} слагаемых!

При практическом применении метода Монте-Карло для вычисления кратных интегралов обычно пользуются s -разрядными равномерно распределенными случайными последовательностями. В этом случае дробь $\frac{n}{N}$, если N велико, будет близка не к истинному объему I_0 , а к некоторому фиктивному объему I'_0 приближенно представляющему собой относительную меру числа точек M с координатами вида

$$\xi_i = \frac{k_i}{10^s}, \eta = \frac{k}{10^s} \quad (5.22)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; k_i, k = 0, 1, 2, \dots, 10^s),$$

попавших в объем v ; причем I'_0 , строго говоря, зависит от того, причисляются ли граничные точки к объему v или нет. Полная погрешность результата оценивается следующим образом:

$$\left| \frac{n}{N} - I_0 \right| \leq |I'_0 - I_0| + \left| I'_0 - \frac{n}{N} \right|. \quad (5.23)$$

Первое слагаемое $|I'_0 - I_0|$ правой части неравенства (5.23) представляет собой *обычную вычислительную погрешность*, получающуюся при замене интеграла I_0 интегральной суммой, соответствующей разбиению объема v на элементарные кубические ячейки, вершины которых принадлежат сетке (5.22). Величину этой погрешности можно оценить с помощью неравенства

$$|I'_0 - I_0| \leq \bar{v} - \underline{v}, \quad (5.24)$$

где \bar{v} — верхняя интегральная сумма (в нашем случае для интеграла (5.16) — просто объем описанного ступенчатого тела); \underline{v} — нижняя интегральная сумма (т.е. объем вписанного ступенчатого тела). Величина погрешности $|I'_0 - I_0|$ существенно зависит от разрядности s случайных чисел; и если граница тела v кусочно-гладкая, то эта погрешность при достаточно большом s может быть сделана сколь угодно малой. Неудобство от увеличения разрядности состоит в том, что возрастает объем работы, так как вычисления приходится производить с дополнительными знаками. Второе слагаемое $\left| I'_0 - \frac{n}{N} \right|$ правой части неравенства (5.23) называется *погрешностью выборки* и может быть оценено вероятностным путем с помощью теоремы Бернулли, как указано выше.

5.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Монте-Карло

Рассмотрим линейную систему

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.25)$$

Некоторым способом приведем систему (5.25) к специальному виду

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j + \beta_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.26)$$

Введя матрицу $\alpha = [\alpha_{ij}]$ и векторы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (5.26) можно записать в матрично-векторной форме:

$$x = \alpha x + \beta. \quad (5.26')$$

Будем предполагать, что все собственные значения матрицы α по модулю меньше единицы. В частности, достаточно считать, что какая-нибудь каноническая норма матрицы α подчинена неравенству

$$\|\alpha\| < 1. \quad (5.27)$$

В этом случае система (5.26') имеет единственное решение, которое может быть найдено методом итерации.

Подберем систему множителей v_{ij} таким образом, чтобы числа p_{ij} , определяемые уравнениями

$$\alpha_{ij} = p_{ij}v_{ij} \quad (i, j=1, \dots, n), \quad (5.28)$$

удовлетворяли следующим условиям:

- 1) $p_{ij} \geq 0$, причем $p_{ij} > 0$ при $\alpha_{ij} \neq 0$; 2) $\sum_{j=1}^n p_{ij} < 1$ ($i=1, \dots, n$).

Пусть

$$p_{i,n+1} = 1 - \sum_{j=1}^n p_{ij} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Кроме того, условно положим

$$p_{n+1,j} = 0 \text{ при } j < n+1$$

и

$$p_{n+1,n+1} = 1.$$

Рассмотрим теперь некоторую блуждающую частицу, обладающую конечным числом возможных и несовместимых состояний

$$S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}.$$

Эта частица такова, что с вероятностью p_{ij} ($i, j = 1, \dots, n+1$) переходит из состояния S_i в состояние S_j независимо от прошлых состояний и с неопределенностью будущих. Состояние $S_{n+1} = \Gamma$ («граница» или «поглощающий экран») является особым и соответствует полной остановке частицы, так как в силу условия $p_{n+1,j} = 0$ ($j = 1, \dots, n$) переходы из состояния S_{n+1} в состояние S_j при $j < n+1$ невозможны. Таким образом, процесс блуждания прекращается, как только частица первый раз попадает на границу Γ . Описанная смена состояний обычно называется *дискретной цепью Маркова* с конечным числом состояний. Числа p_{ij} называются *переходными вероятностями*, а матрица

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} & p_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nm} & p_{n,n+1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

представляет собой *матрицу перехода* состояний $\{S_i\}$ (*закон цепи*).

Пусть S_i — некоторое фиксированное состояние, отличное от граничного ($i < n+1$). Рассмотрим случайное блуждание частицы, начинающееся в данном состоянии $S_i = S_{i_0}$ и после ряда промежуточных состояний $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_m}$ заканчивающееся на границе $S_{i_{m+1}} = \Gamma$. Таким образом, S_{i_m} ($m \geq 0$) есть состояние частицы, непосредственно предшествующее выходу ее на границу. Совокупность состояний

$$T_i = \{S_{i_0}, S_{i_1}, \dots, S_{i_m}, S_{i_{m+1}}\} \quad (5.29)$$

для краткости будем называть *траекторией*. Пусть X_i — случайная величина, зависящая от случайных траекторий T_i , начинающихся в состоянии S_i (*функционал траектории T_i*), и принимающая для траектории (5.29) значение

$$\xi(T_i) = \beta_{i_0} + v_{i_0 i_1} \beta_{i_1} + v_{i_0 i_1} v_{i_1 i_2} \beta_{i_2} + \dots + v_{i_0 i_1} \dots v_{i_{m-1} i_m} \beta_{i_m}, \quad (5.30)$$

где β_j ($j = i_0, i_1, \dots, i_m$) — соответствующие свободные члены приведенной системы (5.26).

В частности, если $v_{ij} = 1$, то имеем просто

$$\xi(T_i) = \beta_{i_0} + \beta_{i_1} + \dots + \beta_{i_m}. \quad (5.30')$$

По теореме умножения вероятностей траектория T_i , а следовательно, и значение $\xi(T_i)$ реализуются с вероятностью

$$P(T_i) = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_m i_{m+1}}, \quad (5.31)$$

где $i_0 = i$ и $i_{m+1} = n + 1$.

Теорема. Математические ожидания

$$MX_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

являются корнями системы (5.26).

Доказательство. Траектории T_i начинающиеся из состояния S_i , в зависимости от первого шага можно разбить на $n + 1$ категорий:

$$T_i = \{S_i, S_1, S_{i_2}, \dots\};$$

$$T_{i_2} = \{S_i, S_2, S_{i_2}, \dots\};$$

.....

$$T_{i_n} = \{S_i, S_n, S_{i_2}, \dots\};$$

$$T_{i, n+1} = \{S_i, S_{n+1}\},$$

т.е. частица, начав блуждание из состояния S_i , при первом шаге может переходить или в состояние S_1 , или в состояние S_2 и т.д., а затем через некоторое число шагов закончить блуждание на границе.

Если частица имеет траекторию

$$T_{ij} = \{S_i, S_j, S_{i_2}, \dots, S_{i_m}, S_{i_{m+1}} = \Gamma\},$$

где $j \neq n+1$, то случайная величина X_i в силу формулы (5.30) примет значение

$$\begin{aligned} \xi(T_{ij}) &= \beta_i + v_{ij}\beta_j + v_{ij}v_{ji_2}\beta_{i_2} + \dots + v_{ij}v_{ji_2} \dots v_{i_{m-1}i_m}\beta_{i_m} = \\ &= \beta_i + v_{ij}(\beta_j + v_{ji_2}\beta_{i_2} + \dots + v_{ji_2} \dots v_{i_{m-1}i_m}\beta_{i_m}) = \beta_i + v_{ij}\xi(T_j), \end{aligned} \quad (5.32)$$

где T_j — некоторая траектория с начальным состоянием S_j .

В том случае, когда частица сразу попадает на границу Γ , т.е. траектория имеет вид $T_{i,n+1} = \{S_i, S_{n+1}\}$, то

$$\xi(T_{i,n+1}) = \beta_i. \quad (5.32')$$

Вероятность того, что траектория T_i есть траектория типа T_{ij} , очевидно, равна p_{ij} .

В силу определения математического ожидания имеем

$$MX_i = \sum_{T_i} \xi(T_i) P(T_i) = \sum_i \sum_{T_{ij}} \xi(T_{ij}) P(T_{ij}).$$

Если $j < n+1$, то траектория T_{ij} состоит из отрезка (S_i, S_j) и некоторой траектории T_{ij} . Поэтому $P(T_{ij}) = p_{ij}P(T_j)$. При $j = n+1$ имеем

$$\xi(T_{i,n+1}) = \beta_i \text{ и } P(T_{i,n+1}) = p_{i,n+1}.$$

Кроме того, так как каждой траектории T_{ij} при $j < n+1$ однозначно соответствует траектория T_j и наоборот, то суммирование по траекториям T_{ij} для $j = 1, 2, \dots, n$ можно заменить суммированием по траекториям T_j .

Отсюда, учитывая формулу (5.32), получаем

$$MX_i = \sum_{j=1}^n \sum_{T_j} [\beta_i + v_{ij}\xi(T_j)] \cdot p_{ij}P(T_j) + \beta_i p_{i,n+1}$$

или

$$MX_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} v_{ij} \sum_{T_j} \xi(T_j) P(T_j) + \beta_i \left[\sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{T_j} P(T_j) + p_{i,n+1} \right].$$

Но, очевидно,

$$\sum_{T_j} \xi(T_j) P(T_j) = MX_i \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Кроме того,

$$\sum_{T_j} P(T_j) = 1,$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{T_j} P(T_j) + p_{i, n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} p_{ij} = 1.$$

Следовательно,

$$MX_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} MX_i + \beta_i \quad (i=1, \dots, n),$$

где $\alpha_{ij} = p_{ij} V_{ij}$.

Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы предполагалось, что математические ожидания

$$x_i = MX_i \quad (i=1, \dots, n)$$

существуют. Можно доказать, что при выполнении условия (5.27) случайные величины X_i обладают конечными математическими ожиданиями.

Из доказанной теоремы следует, что корни системы (5.26) можно рассматривать как математические ожидания случайных величин X_1, \dots, X_n . Для экспериментального определения величины $x_i = MX_i$ организуют N случайных блужданий со случайными траекториями $T_i^{(k)}$ ($k=1, \dots, N$) с начальным состоянием S_i и каждый раз регистрируют значение $\xi(T_i^{(k)})$ случайной величины X_i . Предположим, что испытания независимы между собой и величина X_i имеет ограниченную дисперсию. Тогда в силу теоремы Чебышева при достаточно большом N с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, будет справедливо неравенство

$$\left| x_i - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(T_i^{(k)}) \right| < \varepsilon,$$

где ε — заданная предельная погрешность.

Таким образом, корни системы (5.26) приближенно могут быть определены по формуле

$$x_i \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi \left(T_i^{(k)} \right). \quad (5.33)$$

В частности, этим способом можно обращаться матрицы вида

$$A = E - \alpha, \quad (5.34)$$

где $\|\alpha\| < 1$ и $E = [\delta_{ij}]$ — единичная матрица. Для этого заметим, что элементы обратной матрицы

$$A^{-1} = [x_{ij}]$$

являются корнями линейной системы

$$\sum_{k=1}^n (\delta_{ik} - \alpha_{ik}) x_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Отсюда получаем, что элементы каждого столбца

$$x_{1j}, \dots, x_{nj} \quad (j = 1, \dots, n).$$

матрицы A^{-1} определяются из линейной подсистемы

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_{kj} + \delta_{ij} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.35)$$

На основании предыдущего, отправляясь из состояния $S_i = S_l$, при фиксированном j получаем случайную величину X_{ij} со значениями

$$\xi_j(T_i) = \delta_{i_0j} + \delta_{i_1j} v_{i_0i_1} + \dots + \delta_{i_mj} v_{i_0i_1} \dots v_{i_{m-1}i_m},$$

где $T_i = \{S_{i_0}, S_{i_1}, \dots, S_{i_m}, S_{i_{m+1}} = \Gamma\}$ и числа v_{ij} таковы, что p_{ij} , определяемые из уравнений $\alpha_{ij} = p_{ij} v_{ij}$, представляют собой вероятности перехода из состояния S_i в состояние S_j . Математические ожидания $MX_{ij} = x_{ij}$ дадут искомые элементы матрицы A^{-1} .

Покажем теперь, как практически возможно организовать случайное блуждание частицы с заданными вероятностями перехода p_{ij} . Для простоты предположим, что p_{ij} суть десятичные дроби с общим знаменателем 10^s (s — натуральное число):

$$p_{i1} = \frac{t_{i1}}{10^s}; p_{i2} = \frac{t_{i2}}{10^s}, \dots; p_{i,n+1} = \frac{t_{i,n+1}}{10^s},$$

где $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{i,n+1}$ — целые неотрицательные числа, причем

$$t_{i1} + t_{i2} + \dots + t_{i,n+1} = 10^s \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим частицу, имеющую начальное состояние S_i .

Пусть $\{x\}$ есть s -разрядные числа, меньшие единицы, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$, например элементы из соответствующей таблицы случайных чисел. Произведем розыгрыш случайного числа x . Если окажется, что выполнено неравенство

$$0 \leq x < \frac{t_{i1}}{10^s},$$

то будем считать, что частица переходит из состояния S_i в состояние S_1 . Далее, если

$$\frac{t_{i1}}{10^s} \leq x < \frac{t_{i1} + t_{i2}}{10^s},$$

то полагаем, что частица переходит из состояния S_i в состояние S_2 . Аналогично определяются остальные переходы. В частности, частица попадает на границу $S_{n+1} = \Gamma$, если случайное число x таково, что

$$\frac{t_{i1} + \dots + t_{in}}{10^s} \leq x < \frac{t_{i1} + \dots + t_{in} + t_{i,n+1}}{10^s} = 1.$$

На основании данного соглашения ясно, что количества благоприятных случаев для переходов $S_i \rightarrow S_j$ ($j = 1, 2, \dots, n+1$) пропорциональны соответственно числам

$$t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{i,n+1},$$

причем эти случаи равновероятны. Поэтому вероятности перехода

$$P(S_i \rightarrow S_j) = \frac{t_{ij}}{10^s} = p_{ij} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n+1).$$

Выбирая последовательность случайных чисел и руководствуясь указанным выше правилом, получаем случайное блуждание частицы с фиксированным начальным состоянием и данными вероятностями перехода. Для достижения нужной точности корней (в вероятностном смысле) следует рассмотреть достаточно большое количество независимых блужданий.

Пример. Методом Монте-Карло решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,7, \\ x_2 = 0,2x_1 - 0,3x_2 + 1,1. \end{cases} \quad (5.36)$$

Решение. Можно положить

$$\begin{aligned} v_{11} &= 1, & v_{12} &= 1, \\ v_{21} &= 1, & v_{22} &= -1. \end{aligned}$$

Таблица 5.4

Нахождение неизвестного x_1 системы методом Монте-Карло

№ п/п	Случайное число x	Траектория блуждания	Значение случайной величины X_1
1	0,5	$S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7
2	0,7	$S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7
3	0,7	$S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7
4	0,0	$S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7 + 0,7
5	0,5		
	0,7	$S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7
6	0,1	$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \Gamma$	0,7 + 1,1
	0,6		
7	0,1	$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \Gamma$	0,7 + 1,1
	0,8		
8	0,7	$S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7
9	0,3	$S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7
10	0,7	$S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7
11	0,1	$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7 + 1,1 + 0,7
	0,0		
	0,7		
12	0,0	$S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \Gamma$	0,7 + 0,7 + 1,1 -- 1,1 - 0,7 - 1,1
	0,1		
	0,3		
	0,1		
	0,1		
13	0,9	$S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7
14	0,6	$S_1 \rightarrow \Gamma$	0,7

Окончание табл. 5.4

№ п/п	Случайное число x	Траектория блуждания	Значение случайной величины X_1
15	$0,1 \left\{ \right.$ $0,5 \left. \right\}$	$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \Gamma$	$0,7 + 1,1$
16	$0,3$	$S_1 \rightarrow \Gamma$	$0,7$
17	$0,3$	$S_1 \rightarrow \Gamma$	$0,7$
18	$0,2 \left\{ \right.$ $0,4 \left\{ \right.$ $0,4 \left\{ \right.$ $0,3 \left\{ \right.$ $0,1 \left\{ \right.$ $0,6 \left. \right\}$	$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow$ $\rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow \Gamma$	$0,7 + 1,1 - 1,1 + 1,1 - 1,1$ $- 0,7$
19	$0,6$	$S_1 \rightarrow \Gamma$	$0,7$
20	$0,2 \left\{ \right.$ $0,6 \left. \right\}$	$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \Gamma$	$0,7 + 1,1$
		Σ	$21 \cdot 0,7 + 4 \cdot 1,1$

Отсюда матрица перехода есть

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где элементы первой строки представляют собой соответственно вероятности перехода из состояния S_1 в состояния S_1, S_2 и $S_3 = \Gamma$, а элементы второй строки — из состояния S_2 в состояния S_1, S_2 и S_3 , причем «кайма» соответствует границе Γ .

Так как элементы матрицы P кратны $0,1$, то можно использовать одноразрядные случайные числа, цифры которых рекрутируются из какой-нибудь случайной последовательности, например являются элементами случайных чисел из табл. 5.1.

Полученные результаты для 20 случайных блужданий с начальным состоянием S_1 приведены в табл. 5.4. Случайное число x обеспечивало переходы состояний согласно следующей инструкции.

I. Для начального состояния S_1 :

- 1) если $0 \leq x \leq 0,1$, то $S_1 \rightarrow S_1$;
- 2) если $0,1 \leq x < 0,3$, то $S_1 \rightarrow S_2$;
- 3) если $0,3 \leq x < 1$, то $S_1 \rightarrow \Gamma$.

II. Для начального состояния S_2 :

1) если $0 \leq x < 0,2$, то $S_2 \rightarrow S_1$;

2) если $0,2 \leq x < 0,5$, то $S_2 \rightarrow S_2$;

3) если $0,5 \leq x < 1$, то $S_2 \rightarrow \Gamma$.

В последнем столбце табл. 5.4 помещены значения случайной величины X_1 , вычисленные по формуле (5.30). Отсюда

$$x_1 = MX_1 \approx \frac{1}{20}(20 \cdot 0,7 + 0,7 + 4 \cdot 1,1) = 0,96.$$

Аналогично вычисляется неизвестное x_2 .

Заметим, что точные корни системы (5.36) суть $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$.

Для решения алгебраических линейных уравнений по методу Монте-Карло используются также другие способы.

5.6. Понятие о решении задачи Дирихле методом Монте-Карло

Пусть на плоскости Oxy дана область G с кусочно-гладкой границей Γ . В области G построим квадратную сетку S_h с шагом h :

$$x_i = x_0 + ih; \quad y_j = y_0 + jh \quad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.37)$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$; $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j = h$; $h > 0$.

Предположим, что сетка S_h состоит из внутренних узлов и граничных узлов первого рода. Граничные узлы сетки S_h образуют ее *границу* Γ_h . Грубо говоря, граница Γ_h представляет собой линейный ряд точек $M_{pq}(x_p, y_q)$, аппроксимирующий криволинейную границу Γ области G с точностью до h .

Представим себе частицу M , которая совершает *равномерное случайное блуждание* по узлам сетки (5.37). А именно: находясь во внутреннем узле $M_{ij}(x_i, y_j)$ сетки S_h , эта частица за один переход с одной и той же вероятностью, равной $\frac{1}{4}$, может переместиться в один из четырех соседних узлов: или в $M_{i-1, j}(x_i - h, y_j)$ (шаг влево), или в $M_{i+1, j}(x_i + h, y_j)$ (шаг вправо), или в $M_{i, j-1}(x_i, y_j - h)$ (шаг вниз), или в $M_{i, j+1}(x_i, y_j + h)$ (шаг вверх), причем каждый такой единичный переход совершенно случаен и не зависит от положения частицы и ее прошлой истории. Будем считать, что блуждание частицы M закан-

чивается, как только эта частица попадает на границу Γ_h ; в этом смысле граница Γ_h представляет собой «поглощающий экран». Можно доказать, что с вероятностью, равной единице, блуждание точки M через конечное число шагов заканчивается на границе.

Если частица M начала свое блуждание с фиксированной внутренней точки $M_{i_0 j_0}$ сетки S_h , то конечная совокупность последовательных положений этой частицы: $M_{i_0 j_0}, M_{i_1 j_1}, \dots, M_{i_s j_s}$, где $M_{i_k j_k} \in \Gamma_h$ ($k=0, 1, \dots, s-1$) и $M_{i_s j_s} \in \Gamma_h$ называется *траекторией частицы* (с s шагами) или *историей блуждания*.

Равномерное случайное блуждание частицы на плоскости можно организовать с помощью равномерно распределенной последовательности одноразрядных случайных чисел, принимающих значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для этого, например, достаточно производить розыгрыш, т.е. случайную выборку из чисел 0–9, придерживаясь инструкции, указанной в табл. 5.5; причем числа 8 и 9 переигрываются. Случайные числа берутся из готовых таблиц или получаются с помощью ЭВМ.

Таблица 5.5

Определение шага частицы в зависимости от выпавшего случайного числа

Случайное число	Характер перемещения
0 или 4	$\Delta x_i = h$ (шаг вправо)
1 или 5	$\Delta y_j = h$ (шаг вверх)
2 или 6	$\Delta x_i = -h$ (шаг влево)
3 или 7	$\Delta y_j = -h$ (шаг вниз)

Пусть в точках границы Γ области G определена некоторая функция $\varphi(x, y)$. Перенесем эти значения на границу Γ_h сетки S_h . Например, для каждого граничного узла $M_{pq}(x_p, y_q) \in \Gamma_h$ определим ближайшую по горизонтали (или вертикали) точку $N \in \Gamma$ и положим $\varphi(M_{pq}) = \varphi(N)$. Для краткости введем обозначение $\varphi_{pq} = \varphi(x_p, y_q)$.

Пусть $P(i, j; p, q)$ — вероятность того, что траектория частицы, вышедшей из узла M_{ij} сетки S_h , закончится в граничном узле $M_{pq} \in \Gamma_h$. Так как блуждание точки неизбежно заканчивается на границе Γ_h в первой же точке выхода ее на границу, то

$$\sum_{p,q} P(i, j; p, q) = 1,$$

где суммирование распространяется на все точки M_{pq} границы Γ_h , причем

$$P(p', q'; p, q) = \begin{cases} 1 & \text{при } p' = p, \quad q' = q, \\ 0 & \text{при } |p' - p| + |q' - q| \neq 0, \end{cases} \quad (5.38)$$

где $M_{p'q'}$ — граничный узел.

Составим сумму

$$v_{ij} = \sum_{p,q} P(i, j; p, q) \varphi_{pq}, \quad (5.39)$$

где точка $M_{pq}(x_p, y_q)$ пробегает всю границу Γ_h . Если функцию $\varphi(x, y)$ рассматривать как случайную величину, принимающую значения φ_{pq} на границе Γ_h , то сумма (5.39) представляет собой *математическое ожидание* (среднее значение) функции $\varphi(x, y)$ на границе Γ_h для траекторий, начинающихся в точке $M_{ij}(x_i, y_j)$ («премия за выход на границу» из начальной точки M_{ij}).

Частица, начавшая свое случайное блуждание из внутреннего узла M_{ij} , после первого шага с вероятностью, равной $\frac{1}{4}$, попадает в один из четырех соседних узлов. Поэтому случайные блуждания, начинающиеся в узле M_{ij} , в зависимости от вида траекторий распределяются на четыре категории новых случайных блужданий.

I. $M_{ij}, M_{i-1,j}, \dots$ III. $M_{ij}, M_{i,j-1}, \dots$

II. $M_{ij}, M_{i+1,j}, \dots$ IV. $M_{ij}, M_{i,j+1}, \dots$

По формуле полной вероятности имеем

$$P(i, j; p, q) = \frac{1}{4} P(i-1, j; p, q) + \frac{1}{4} P(i+1, j; p, q) + \frac{1}{4} P(i, j-1; p, q) + \frac{1}{4} P(i, j+1; p, q). \quad (5.40)$$

Отсюда, умножая обе части равенства (5.40) на граничные значения φ_{pq} и суммируя по всем возможным значениям, на основании формулы (5.39) получим

$$v_{ij} = \frac{1}{4} (v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1}). \quad (5.41)$$

Кроме того, в силу формулы (5.38) имеем $v_{pq} = \varphi_{pq}$, если точка $M_{pq} \in \Gamma_h$.

Рассмотрим теперь задачу Дирихле об отыскании функции $u = u(x, y)$, гармонической области G и принимающей на ее границе Γ заданные непрерывные значения $\varphi(x, y)$. Согласно методу сеток эта задача сводится к нахождению значений $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ искомой функции $u(x, y)$ во внутренних узлах $M_{ij}(x_i, y_j)$ некоторой сетки S_h при условии, что значения в граничных узлах $M_{pq}(x_p, y_q) \in \Gamma_h$ известны и равны $\varphi_{pq} = \varphi(x_p, y_q)$. Неизвестные u_{ij} определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), \\ u_{pq} = \varphi_{pq}. \end{cases} \quad (5.42)$$

Сравнивая формулы (5.42) с формулами (5.41) и $v_{pq} = \varphi_{pq}$, мы усматриваем, что они совпадают с точностью до обозначений. Следовательно, *искомые неизвестные u_{ij} можно рассматривать как математическое ожидание v_{ij}* .

Величины v_{ij} допускают экспериментальное определение. Рассмотрим достаточно большое число N равномерных случайных блужданий частицы по узлам сетки S_h , исходящих из фиксированного узла M_{ij} и заканчивающихся на границе Γ_h . Пусть $(x_p^{(k)}, y_q^{(k)})$ ($k = 1, 2, \dots, N$) — соответствующие точки выхода частицы на границу Γ_h . Заменяя математическое ожидание v_{ij} эмпирическим математическим ожиданием, будем иметь

$$u_{ij} = v_{ij} \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \varphi(x_p^{(k)}, y_q^{(k)}). \quad (5.43)$$

Формула (5.43) дает статистическую оценку величины u_{ij} и может быть применена для приближенного решения задачи Дирихле. Метод решения задач, основанный на использовании случайных величин, получил название метода Монте-Карло.

Заметим, что с помощью формулы (5.43) можно непосредственно найти приближенное значение u_{ij} решения задачи Дирихле *в единственной фиксированной точке M_{ij}* сетки S_h , не зная решения задачи для остальных точек сетки. Этим обстоятельством метод Монте-Карло для задачи Дирихле резко отличается от обычных стандартных способов решения этой задачи.

Следует отметить, что вероятность $P(i, j; p, q)$ в силу формулы (5.39) представляет собой аналог *функции Грина* для задачи Дирихле в области S_h . Эта величина может быть найдена экспериментально на основании формулы (5.43), если задать следующие граничные условия: $\varphi(x_p, y_q) = 1$; $\varphi(x_{p'}, y_{q'}) = 0$ при $|p' - p| + |q' - q| \neq 0$.

Построив такую функцию Грина, мы получаем возможность, применяя формулу (5.43), просто находить приближенное решение задачи Дирихле для области G с данной границей Γ при любых граничных значениях $\varphi(x, y)$.

Недостатком рассмотренного варианта метода Монте-Карло для задачи Дирихле является слабая сходимость по вероятности $N \rightarrow \infty$ эмпирического математического ожидания

$$\tilde{v}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(x_p^{(k)}, y_q^{(k)}),$$

к математическому ожиданию v_{ij} . Чтобы устранить это неблагоприятное обстоятельство, используют различные модификации случайных блужданий. Кроме того, при решении задачи полезно учитывать также, что блуждание частицы M , начинающееся в точке M_{ij} , автоматически является случайным блужданием частицы, начинающимся в любой промежуточной точке траектории этой частицы.

Библиографический список

1. *Демидович Б.П.*, Основы вычислительной математики [Текст]/ Б.П. Демидович, И.А. Марон. — М.: Наука, 1966. — 664 с.
2. *Демидович Б.П.*, Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения [Текст]/ Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
3. *Калиткин Н.Н.* Численные методы [Текст]/ Н.Н. Калиткин. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
4. *Бахвалов Н.С.*, Численные методы [Текст]/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
5. *Копченова Н.В.*, Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / Н.В. Копченова, И.А. Марон. — СПб.: Лань, 2009. — 368 с.
6. *Березин И.С.*, Методы вычислений [Текст] / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. Т. 1. — 464 с.
7. *Березин И.С.*, Методы вычислений [Текст] / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. Т. 2. — 620 с.
8. *Кантор С.А.* Основы вычислительной математики [Текст] / С.А. Кантор. — Барнаул: Алт. госуд. технич. ун-т им. И.И. Ползунова, 2010. — 357 с.
9. *Колдаев В.Д.* Численные методы и программирование [Текст]: учеб. пособие / В.Д. Колдаев; под ред. проф. Л.Г. Гагариной. — М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2009. — 336 с.
10. *Боглаев Ю.П.* Вычислительная математика и программирование [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов / Боглаев Ю.П.. — М.: Высш. шк., 1990. — 544 с.
11. *Срочко В.А.* Численные методы [Текст]: курс лекций / В.А. Срочко. — Иркутск: Иркут. ун-т, 2003. — 168 с.
12. *Хэмминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров [Текст] / Р.В. Хэмминг. — М.: Наука, 1972.
13. *Амосов А.А.*, Вычислительные методы для инженеров [Текст]: учеб. пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. — М.: Высш. шк., 1994 — 544 с.
14. *Турчак Л.И.*, Основы численных методов [Текст] / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 304 с.
15. *Исаков Б.В.* Элементы численных методов [Текст]: учеб. пособие / Б.В. Исаков. — М.: Академия, 2003.— 192 с.
16. *Огородникова О.М.* Вычислительные методы в компьютерном инжиниринге [Текст]: учеб. пособие / О.М. Огородникова. — Екатеринбург, УрФУ, 2013. — 130 с.
17. *Рыжиков Ю.И.* Вычислительные методы [Текст] / Ю.И. Рыжиков. — СПб.: БВХ-Петербург, 2007. — 400 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
----------------------	----------

Глава 1. ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ	6
--	----------

1.1. Постановка вопроса	6
1.2. Приближенное дифференцирование функций, заданных в равноотстоящих точках.....	8
1.2.1. <i>Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона.....</i>	<i>8</i>
1.2.2. <i>Формулы приближенного дифференцирования, основанные на формуле Стирлинга</i>	<i>12</i>
1.2.3. <i>Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих точек, выраженные через значения функции в этих точках.....</i>	<i>15</i>
1.3. Формулы численного дифференцирования для неравноотстоящих узлов.....	18
1.4. Графическое дифференцирование	21
1.5. Понятие о приближенном вычислении частных производных	22
1.5.1. <i>Интерполирование функций двух переменных.....</i>	<i>22</i>
1.5.2. <i>Двойные разности высших порядков.....</i>	<i>23</i>
1.5.3. <i>Интерполяционная формула Ньютона для функции двух переменных</i>	<i>24</i>
1.5.4. <i>Приближенное вычисление частных производных.....</i>	<i>26</i>
1.6. Погрешности, возникающие при численном дифференцировании.....	27
1.7. Выбор оптимального шага численного дифференцирования	29

Глава 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ	31
---	-----------

2.1. Общие замечания	31
2.2. Квадратурные формулы Ньютона — Котеса	35
2.3. Формула трапеций и ее остаточный член.....	37
2.4. Формула Симпсона и ее остаточный член	39
2.5. Формулы Ньютона — Котеса высших порядков	42
2.6. Общая формула трапеций (правило трапеций)	44
2.7. Общая формула Симпсона (параболическая формула).....	45
2.8. Понятие о квадратурной формуле Чебышева.....	48
2.9. Квадратурная формула Гаусса.....	50
2.10. Некоторые замечания о точности квадратурных формул	54
2.11. Экстраполяция по Ричардсону.....	59
2.12. Числа Бернулли.....	61
2.13. Формула Эйлера — Маклорена.....	64
2.14. Приближенное вычисление несобственных интегралов	68
2.15. Метод Л.В. Канторовича выделения особенностей	70
2.16. Графическое интегрирование	72
2.17. Понятие о кубатурных формулах.....	74
2.18. Кубатурная формула типа Симпсона	78
2.19. Кратные интегралы	80
2.19.1. <i>Метод повторного интегрирования.....</i>	<i>80</i>
2.19.2. <i>Метод Л.А. Люстерника и В.А. Диткина</i>	<i>81</i>

Глава 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	83
--	-----------

3.1. Общие замечания. Задача Коши.....	83
3.2. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.....	87

3.3. Метод последовательных приближений.....	89
3.4. Метод неопределенных коэффициентов.....	93
3.5. Метод Эйлера.....	95
3.6. Модификации метода Эйлера.....	97
3.7. Метод Эйлера с последующей итерационной обработкой.....	98
3.8. Метод Рунге — Кутта.....	99
3.9. Метод Адамса.....	102
3.10. Метод Милна.....	105
3.11. Метод А.Н. Крылова последовательных сближений.....	106
3.12. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.....	109
3.12.1. Постановка задачи.....	109
3.12.2. Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.....	110
3.12.3. Метод прогонки.....	111
3.12.4. Метод конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.....	115
3.12.5. Метод Галеркина.....	116
3.12.6. Метод коллокации.....	118

Глава 4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ..... 120

4.1. Численное решение уравнений с частными производными.....	120
4.1.1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными.....	120
4.1.2. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача. Корректность постановки смешанной задачи.....	123
4.1.3. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа.....	129
4.1.4. Метод сеток.....	130
4.1.5. Метод сеток для задачи Дирихле.....	132
4.1.6. Итерационный метод решения системы конечно-разностных уравнений.....	134
4.1.7. Решение краевых задач для криволинейных областей.....	136
4.1.8. Метод сеток для уравнения параболического типа.....	137
4.1.9. Метод прогонки для уравнения теплопроводности.....	141
4.1.10. Метод сеток для уравнения гиперболического типа.....	144
4.2. Численное решение интегральных уравнений.....	147
4.2.1. Основные виды линейных интегральных уравнений.....	147
4.2.2. Решение уравнений Фредгольма методом конечных сумм.....	150
4.2.3. Решение уравнения Вольтерра второго рода методом конечных сумм.....	153

Глава 5. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО..... 155

5.1. Идея метода Монте-Карло.....	155
5.2. Случайные числа.....	157
5.3. Способы получения случайных чисел.....	159
5.4. Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло.....	163
5.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Монте-Карло.....	175
5.6. Понятие о решении задачи Дирихле методом Монте-Карло.....	184

Библиографический список..... 189

Учебное издание

*Елена Николаевна Проказникова,
Кирилл Валентинович Бухенский*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

Учебник

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 2

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве «КУРС»

Подписано к использованию 02.11.2022.

ООО Издательство «КУРС»
127273, Москва, ул. Олонецкая, д. 17А, офис 104.
Тел.: (495) 203-57-83.
E-mail: kursizdat@gmail.com <http://www.kursizdat.ru>



Е.Н. ПРОКАЗНИКОВА, К.В. БУХЕНСКИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

Часть 3

$$= x_k + \frac{\lambda(1 - x_k^2) - e^{x_k}}{8x_k + e^{x_k}}$$

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Е.Н. Проказникова
К.В. Бухенский

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

ЧАСТЬ 3

ПРАКТИКУМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Рекомендовано
Научно-методическим советом РГРТУ
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по укрупненному направлению подготовки
2.09.00.00 «Информатика и вычислительная техника»
(квалификация «бакалавр»)*

Москва
КУРС
2020

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73
П80

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11
----------------	---

Рецензенты:

Овечкин Г.В. — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина»;

Демидова Л.А. — д-р техн. наук, профессор кафедры «Интеллектуальные системы информационной безопасности» ФГБОУ ВО «Российский технологический университет – МИРЭА»

Проказникова Е.Н.,
П80 **Вычислительная математика для программистов: Ч. 3. Практикум: учебное пособие / Е.Н. Проказникова, К.В. Бухенский. — М.: КУРС, 2020. — 176 с.**

ISBN 978-5-907228-23-8

В учебном пособии представлены в кратком изложении основные положения теории погрешностей, наиболее известные методы решения уравнений с одной переменной, систем линейных уравнений, интерполирования функций, приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными. Для закрепления теоретического материала по каждому из разделов в данном пособии представлено несколько практических работ, содержащих 30 вариантов заданий. Для правильного выполнения практических заданий приводится пример расчета «вручную». Издание предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по укрупненному направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника».

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73



ISBN 978-5-907228-23-8

© Проказникова Е.Н.,
Бухенский К.В., 2020
© КУРС, 2020

ВВЕДЕНИЕ

Появление новых, все более сложных задач, требующих дорогостоящих натуральных экспериментов, привело к тому, что все чаще вместо них используются вычислительные эксперименты. Это дает мощный толчок развитию программного обеспечения, усложнению математических моделей и программных алгоритмов и предъявляет высокие требования к подготовке специалистов в сфере IT-технологий.

Издания, сделанные ранее, посвящены изложению теоретического материала соответствующих разделов вычислительной математики. Данное учебное пособие направлено на оттачивание практических навыков. Материал разбит на тематические части, соответствующие традиционно выделяемым областям. В начале каждой главы расположен теоретический материал для повторения темы, после этого приводятся несколько практических заданий, которые могут быть использованы как для расчетных, так и для лабораторных работ. Почти во всех предложенных в данном учебном пособии заданиях имеется 30 вариантов задач. Для каждого практического задания приведен пример вычислений.

Целью учебного пособия является ознакомление студентов с тематическими основами методов вычислительной математики и применение этих методов для решения прикладных задач.

В пособии не ставится задача фундаментального изучения математических основ изложенных в нем численных методов.

Авторы выражают глубокую благодарность Б. П. Демидовичу, И. А. Марон, Н. В. Копченовой, Э. З. Шуваловой, Н. Н. Калиткину, Н. П. Жидкову, Г. М. Кобелькову, Н. П. Березину, С. А. Кантору, Г. Н. Воробьевой, А. Н. Даниловой, чей научно-педагогический опыт был явно и неявно использован в работе над книгой.

ГЛАВА 1

ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Вычислительная погрешность (погрешность округлений) обусловлена необходимостью выполнять арифметические операции над числами, усеченными до количества разрядов, зависящего от применяемой вычислительной техники.

Введем формальные определения.

Пусть I — точное значение отыскиваемого параметра, \tilde{I} — значение этого параметра, соответствующее принятому математическому описанию, \tilde{I}_h — решение задачи, получаемое при реализации численного метода в предположении отсутствия округлений, \tilde{I}_h^* — приближение к решению задачи, получаемое при реальных вычислениях. Тогда

$\rho_1 = \tilde{I} - I$ — неустранимая погрешность;

$\rho_2 = \tilde{I}_h - \tilde{I}$ — погрешность метода;

$\rho_3 = \tilde{I}_h^* - \tilde{I}_h$ — вычислительная погрешность.

Полная погрешность $\rho_0 = \tilde{I}_h^* - I$, равная разности между реально получаемым и точным решениями задачи, удовлетворяет равенству

$$\rho_0 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3.$$

Во многих случаях под термином «погрешность» того или иного вида понимают не рассмотренные выше разности между приближениями, а некоторые меры близости между ними. Например, в скалярном случае полагают

$$\rho_0 = |\tilde{I}_h^* - I|;$$

$$\rho_1 = |\tilde{I} - I|;$$

$$\rho_2 = |\tilde{I}_h - \tilde{I}|;$$

$$\rho_3 = |\tilde{I}_h^* - \tilde{I}_h|.$$

При таких обозначениях получаем

$$\rho_0 \leq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3.$$

Абсолютная и относительная погрешности

Приближенным числом a называется число, незначительно отличающееся от точного A и заменяющее последнее в вычислениях. Если известно, что $a < A$, то a называется приближенным значением числа A по недостатку, если же $a > A$, то — по избытку. Если a есть приближенное значение числа A , то пишут $a \approx A$.

Под ошибкой или погрешностью Δa приближенного числа a обычно понимается разность между соответствующим точным числом A и данным приближенным, т.е.

$$\Delta a = A - a.$$

Если $A > a$, то ошибка положительна: $\Delta a > 0$; если же $A < a$, то ошибка отрицательна: $\Delta a < 0$. Чтобы получить точное число A , нужно к приближенному числу a прибавить его ошибку Δa , т.е.

$$A = a + \Delta a.$$

Таким образом, точное число можно рассматривать как приближенное с ошибкой, равной нулю.

Во многих случаях знак ошибки неизвестен. Тогда целесообразно пользоваться абсолютной погрешностью приближенного числа

$$\Delta = |\Delta a|.$$

Определение. Если A — точное значение некоторой величины и a — известное приближение к нему, то предельной абсолютной погрешностью приближенного значения a называют некоторую абсолютную величину $\Delta(a)$, про которую известно, что

$$|a - A| \leq \Delta(a).$$

Определение. Предельной относительной погрешностью приближенного значения числа a называют некоторую величину $\delta(a)$, про которую известно, что

$$\left| \frac{a - A}{a} \right| \leq \delta(a) \text{ или } \frac{\Delta(a)}{|a|} \leq \delta(a).$$

Зная предельную относительную погрешность $\Delta(a)$, получают границы для точного числа:

$$A = a(1 \pm \delta(a)).$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Определение. Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример:

$$a = 0,0\underline{2035}, \quad a = 0,0\underline{2035000}.$$

Цифры, подчеркнутые линией, значащие.

Определение. Значащую цифру называют верной, если модуль погрешности числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Пример:

$$a = 0,0\underline{2035} \quad \Delta(a) = 0,000003;$$
$$a = 0,0\underline{20350000} \quad \Delta(a) = 0,00000007.$$

Цифры, подчеркнутые линией, верные.

Определение. Число записано со всеми верными цифрами, если в его записи представлены только верные значащие цифры.

Иногда употребляется термин «число верных цифр после запятой»: подсчитывается число верных цифр после запятой от первой цифры до последней верной цифры.

Если приближенное число содержит лишние (или неверные) знаки, то его следует округлить.

Округление чисел

Правило округления (по дополнению). Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры его, стоящие справа от n -й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

1) если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;

2) если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

3) если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр имеются ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;

За) если же первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра сохраняется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (правило четной цифры).

Иными словами, если при округлении числа отбрасывается меньше половины единицы последнего сохраняемого десятичного разряда, то цифры всех сохраненных разрядов остаются неизменными; если же отброшенная часть числа составляет больше половины единицы последнего сохраненного десятичного разряда, то цифра этого разряда увеличивается на единицу. В исключительном случае, когда отброшенная часть в точности равна половине единицы последнего сохраненного десятичного разряда, для компенсации знаков ошибок округления используется правило четной цифры.

Вычислительная погрешность

Далее для краткости будем обозначать абсолютную погрешность числа x как Δ_x , относительную погрешность — как δ_x .

Погрешность алгебраической суммы чисел $x \pm \Delta_x, y \pm \Delta_y$.

Абсолютная погрешность:

$$u = (x \pm \Delta_x) + (y \pm \Delta_y) = (x + y) \pm (\Delta_x + \Delta_y).$$

Определение. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

Относительная погрешность:

$$\delta_u = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x + y|} = \frac{\Delta_x}{|x + y|} \frac{|x|}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|x + y|} \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x + y|} \delta_x + \frac{|y|}{|x + y|} \delta_y.$$

Определение. Предельная относительная погрешность суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых.

Правило. Чтобы сложить числа с различной абсолютной точностью, следует:

- 1) выделить числа, десятичная запись которых обрывается ранее других, и оставить их без изменения;
- 2) остальные числа округлить по образцу выделенных, сохраняя один или два запасных десятичных знака;
- 3) произвести сложение данных чисел, учитывая все сохраненные знаки;
- 4) полученный результат округлить на один знак.

При округлении по правилу дополнения слагаемых суммы

$$u = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

до m -го десятичного разряда погрешность округления суммы в самом неблагоприятном случае не превышает величины

$$\Delta_{\text{окр}} \leq n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^n.$$

Можно получить более точный расчет погрешности округления суммы, если учесть знаки ошибок округления слагаемых.

Погрешность разности чисел $x \pm \Delta_x$, $y \pm \Delta_y$.

Абсолютная погрешность:

$$u = (x \pm \Delta_x) - (y \pm \Delta_y) = (x - y) \pm (\Delta_x + \Delta_y).$$

Определение. Предельная абсолютная погрешность разности приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

Относительная погрешность:

$$\delta_u = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x - y|} = \frac{\Delta_x}{|x - y|} \frac{|x|}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|x - y|} \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x - y|} \delta_x + \frac{|y|}{|x - y|} \delta_y.$$

Замечание о потере точности при вычитании близких чисел. Если приближенные числа x_1 и x_2 достаточно близки друг к другу и имеют малые абсолютные погрешности, то результирующее число мало. Из этого вытекает, что предельная относительная погрешность в этом случае может быть весьма большой, в то время как относительные погрешности уменьшаемого и вычитаемого остаются малыми, т.е. здесь происходит потеря точности.

Вычислим, например, разность двух чисел: $x_1 = 45,232$ и $x_2 = 45,211$, каждое из которых имеет пять верных знаков. Вычитая, получим $u = 45,232 - 45,211 = 0,021$.

Таким образом можно определить следующее практическое правило: при приближенных вычислениях следует по возможности избегать вычитания двух почти равных приближенных чисел; если же в силу необходимости приходится вычитать такие числа, то следует уменьшаемое и вычитаемое брать с достаточным числом запасных верных знаков (если такая возможность имеется).

Погрешность произведения чисел $x \pm \Delta_x$, $y \pm \Delta_y$.

Абсолютная погрешность:

$$\begin{aligned} u &= (x \pm \Delta_x) \cdot (y \pm \Delta_y) = x \cdot y \pm y \cdot \Delta_x \pm x \cdot \Delta_y \pm \Delta_x \cdot \Delta_y \approx \\ &\approx x \cdot y \pm y \cdot \Delta_x \pm x \cdot \Delta_y. \end{aligned}$$

Относительная погрешность:

$$\delta_u = \frac{|y| \cdot \Delta_x + |x| \cdot \Delta_y}{|x \cdot y|} = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y.$$

Определение. Предельная относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

Зная предельную относительную погрешность δ_u произведения u , можно определить его предельную абсолютную погрешность Δu по формуле

$$\Delta u = |u| \delta_u.$$

Правило. Чтобы найти произведение нескольких приближенных чисел с различным числом верных значащих цифр, достаточно:

1) округлить их так, чтобы каждое из них содержало на одну (или две) значащую цифру больше, чем число верных цифр в наименее точном из сомножителей;

2) в результате умножения сохранить столько значащих цифр, сколько верных цифр имеется в наименее точном из сомножителей (или удержать еще одну запасную цифру).

Правило. Если все сомножители имеют m верных десятичных знаков и число их не больше 10, то число верных (в широком смысле) знаков произведения на одну или на две единицы меньше m .

Погрешность степени приближенного числа

Пусть $u = x^m$ (m — натуральное число), тогда $\ln u = m \ln x$ и, следовательно,

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right| \leq m \left| \frac{\Delta x}{x} \right|.$$

Отсюда

$$\delta_u = m \delta_x.$$

Определение. Предельная относительная погрешность степени приближенного числа равна произведению показателя степени на предельную относительную погрешность основания.

Предельная относительная погрешность m -й степени числа в m раз больше предельной относительной погрешности самого числа.

Погрешность корня из приближенного числа

Пусть теперь $u = \sqrt[m]{x}$, тогда $u^m = x$. Отсюда

$$\delta_u = \frac{1}{m} \delta_x.$$

Определение. Предельная относительная погрешность корня из приближенного числа равна предельной относительной погрешности подкоренного числа, деленной на показатель корня.

Предельная относительная погрешность корня m -й степени в m раз меньше предельной относительной погрешности подкоренного числа.

Погрешность частного $x \pm \Delta_x, y \pm \Delta_y$.

Абсолютная погрешность:

$$u = \frac{x \pm \Delta_x}{y \pm \Delta_y} = \frac{(x \pm \Delta_x) \cdot (y \pm \Delta_y)}{(y \pm \Delta_y) \cdot (y \pm \Delta_y)} \approx \frac{x}{y} \pm \frac{(y \cdot \Delta_x) + (x \cdot \Delta_y)}{y^2}.$$

Относительная погрешность:

$$\delta_u = \frac{|y| \cdot \Delta_x + |x| \cdot \Delta_y}{\left| \frac{x}{y} \right|} = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y.$$

Определение. Предельная относительная погрешность частного от деления двух приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

Пусть делимое x и делитель y имеют по меньшей мере m верных цифр. Если α и β — их первые значащие цифры, то за предельную относительную погрешность частного u может быть принята величина

$$\delta_u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{1}{10} \right)^{m-1}.$$

Отсюда получаем **правило**: 1) если $\alpha \geq 2$ и $\beta \geq 2$, то частное u имеет по меньшей мере $m - 1$ верных знаков; 2) если $\alpha = 2$ или $\beta = 2$, то частное u заведомо имеет $m - 2$ верных знака.

Погрешность функции, зависящей от одной переменной

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x)$, вызываемая достаточно малой погрешностью аргумента Δ_x , оценивается величиной

$$\Delta_y = |f'(x)| \Delta_x.$$

Если значения функции $f(x)$ положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \frac{|f'(x)|}{f(x)} \Delta_x.$$

В частности, для основных элементарных функций получаем следующие правила.

Степенная функция $y = x^a$.

Абсолютная погрешность степенной функции равна

$$\Delta_y = ax^{a-1} \Delta_x.$$

Относительная погрешность степенной функции равна

$$\delta_y = |a| \delta_x,$$

Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$).

Абсолютная погрешность показательной функции равна

$$\Delta_y = a^x \ln a \cdot \Delta_x.$$

Относительная погрешность показательной функции равна

$$\delta_y = \Delta_x \ln a.$$

Заметим, что здесь относительная погрешность функции пропорциональна абсолютной погрешности аргумента.

Для функции $y = e^x$ отсюда получаем

$$\delta_y = \Delta_x$$

Логарифмическая функция $y = \ln x$.

Абсолютная погрешность натурального логарифма числа равна относительной погрешности самого числа:

$$\Delta_y = \frac{1}{x} \Delta_x = \delta_x.$$

Тригонометрические функции

Абсолютные погрешности синуса и косинуса не превосходят абсолютных погрешностей аргумента:

$$\Delta_{\sin x} = |\cos x| \Delta_x \leq \Delta_x; \quad \Delta_{\cos x} = |\sin x| \Delta_x \leq \Delta_x.$$

Абсолютная погрешность тангенса и котангенса всегда больше абсолютной погрешности аргумента:

$$\Delta_{\operatorname{tg} x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \Delta_x \geq \Delta_x, \quad \Delta_{\operatorname{ctg} x} = (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \Delta_x \geq \Delta_x.$$

Погрешность функции, зависящей от нескольких переменных

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вызываемая достаточно малыми погрешностями $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ аргументов x_1, x_2, \dots, x_n , оценивается величиной

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{df}{dx_i} \right| \Delta_{x_i}.$$

Если значения функции положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f} \left| \frac{df}{dx_i} \right| \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{d \ln f}{dx_i} \right| \Delta_{x_i}.$$

Практическое задание 1.1

Определение абсолютной и относительной погрешности приближенного числа

1. Определить, какое равенство точнее.
2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки:
а) в узком смысле; б) в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.
3. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.

№ 1

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| 1. $\sqrt{44} = 6,63;$ | $19/41 = 0,463;$ |
| 2. а) $22,553(\pm 0,016);$ | б) $2,8546; \delta = 0,3\%;$ |
| 3. а) $0,2387;$ | б) $42,884.$ |

№ 2

- | | | |
|----|--------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{30} = 5,48;$ | $7/15 = 0,467;$ |
| 2. | a) $6,4257(\pm 0,0024);$ | б) $17,2834; \delta = 0,3\%;$ |
| 3. | a) $0,537;$ | б) $3,751.$ |

№ 3

- | | | |
|----|--------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{10} = 3,16;$ | $15/7 = 2,14;$ |
| 2. | a) $2,3485(\pm 0,0042);$ | б) $0,34484; \delta = 0,4\%;$ |
| 3. | a) $2,3445;$ | б) $0,745.$ |

№ 4

- | | | |
|----|--------------------------|------------------------------|
| 1. | $\sqrt{10,5} = 3,24;$ | $4/17 = 0,235;$ |
| 2. | a) $0,5748(\pm 0,0034);$ | б) $34,834; \delta = 0,1\%;$ |
| 3. | a) $11,445;$ | б) $2,043.$ |

№ 5

- | | | |
|----|-------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{4,8} = 2,19;$ | $6/7 = 0,857;$ |
| 2. | a) $5,435(\pm 0,0028);$ | б) $10,8441; \delta = 0,5\%;$ |
| 3. | a) $8,345;$ | б) $0,288.$ |

№ 6

- | | | |
|----|----------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{30} = 5,48;$ | $12/11 = 1,091;$ |
| 2. | a) $0,12356(\pm 0,00036);$ | б) $8,24163; \delta = 0,2\%;$ |
| 3. | a) $12,45;$ | б) $3,4453.$ |

№ 7

- | | | |
|----|--------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{22} = 4,69;$ | $2/21 = 0,095;$ |
| 2. | a) $2,4543(\pm 0,0032);$ | б) $24,5643; \delta = 0,1\%;$ |
| 3. | a) $0,374;$ | б) $4,348.$ |

№ 8

- | | | |
|----|--------------------------|------------------------------|
| 1. | $\sqrt{9,8} = 3,13;$ | $23/15 = 1,53;$ |
| 2. | a) $6,4257(\pm 0,0024);$ | б) $23,574; \delta = 0,2\%;$ |
| 3. | a) $20,43;$ | б) $0,576.$ |

№ 9

- | | | |
|----|--------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{83} = 9,11;$ | $6/11 = 0,545;$ |
| 2. | a) $3,7834(\pm 0,0041);$ | б) $21,68563; \delta = 0,3\%;$ |
| 3. | a) $41,72;$ | б) $0,678.$ |

№ 10

- | | | |
|----|--------------------------|------------------------------|
| 1. | $\sqrt{52} = 7,21;$ | $17/19 = 0,895;$ |
| 2. | a) $13,537(\pm 0,0026);$ | б) $7,521; \delta = 0,12\%;$ |
| 3. | a) $5,634;$ | б) $0,0748.$ |

№ 11

- | | | |
|----|---------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{44} = 6,63;$ | $21/29 = 0,723;$ |
| 2. | a) $13,6253(\pm 0,0021);$ | б) $0,3567; \delta = 0,042\%;$ |
| 3. | a) $18,357;$ | б) $2,16.$ |

№ 12,7

- | | | |
|----|-------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{27} = 5,19;$ | $50/19 = 2,63;$ |
| 2. | a) $1,784(\pm 0,0063);$ | б) $0,85637; \delta = 0,21\%;$ |
| 3. | a) $0,5746;$ | б) $236,58.$ |

№ 13

- | | | |
|----|--------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{31} = 5,56;$ | $13/17 = 0,764;$ |
| 2. | a) $3,6878(\pm 0,0013);$ | б) $15,873; \delta = 0,042\%;$ |
| 3. | a) $14,862;$ | б) $8,73.$ |

№ 14

- | | | |
|----|---------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{13} = 3,60;$ | $7/22 = 0,318;$ |
| 2. | a) $27,1548(\pm 0,0016);$ | б) $0,3945; \delta = 0,16\%;$ |
| 3. | a) $0,3648;$ | б) $21,7.$ |

№ 15

- | | | |
|----|------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{18} = 4,24;$ | $17/11 = 1,545;$ |
| 2. | a) $0,86(\pm 0,0013);$ | б) $24,3618; \delta = 0,22\%;$ |
| 3. | a) $2,4516;$ | б) $0,863.$ |

№ 16

- | | | |
|----|----------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{38} = 6,16;$ | $5/3 = 1,667;$ |
| 2. | a) $0,98351(\pm 0,00042);$ | б) $3,7542; \delta = 0,32\%;$ |
| 3. | a) $0,389;$ | б) $62,74.$ |

№ 17

- | | | |
|----|--------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{14} = 3,74;$ | $49/13 = 3,77;$ |
| 2. | a) $5,6483(\pm 0,0017);$ | б) $83,736; \delta = 0,085\%;$ |
| 3. | a) $5,6432;$ | б) $0,00858.$ |

№ 18

- | | | |
|----|---------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{7} = 2,64;$ | $13/7 = 1,857;$ |
| 2. | a) $32,7486(\pm 0,0012);$ | б) $2,8867; \delta = 0,43\%;$ |
| 3. | a) $0,0384;$ | б) $63,745.$ |

№ 19

- | | | |
|----|----------------------------|---------------------------------|
| 1. | $\sqrt{12} = 3,46;$ | $17/11 = 1,545;$ |
| 2. | a) $4,88445(\pm 0,00052);$ | б) $0,096835; \delta = 0,32\%;$ |
| 3. | a) $12,688;$ | б) $4,636.$ |

№ 20

- | | | |
|----|---------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{35} = 5,91;$ | $51/11 = 4,64;$ |
| 2. | a) $38,4258(\pm 0,0014);$ | б) $0,66385; \delta = 0,34\%;$ |
| 3. | a) $0,543;$ | б) $6,743.$ |

№ 21

- | | | |
|----|----------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{22} = 4,69;$ | $18/7 = 2,57;$ |
| 2. | a) $0,39642(\pm 0,00022);$ | б) $46,453; \delta = 0,15\%;$ |
| 3. | a) $15,644;$ | б) $6,125.$ |

№ 22

- | | | |
|----|----------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{17} = 4,12;$ | $19/9 = 2,11;$ |
| 2. | a) $0,66385(\pm 0,00042);$ | б) $5,8425; \delta = 0,23\%;$ |
| 3. | a) $0,3825;$ | б) $24,6.$ |

№ 23

- | | | |
|----|----------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{11} = 3,32;$ | $16/7 = 2,28;$ |
| 2. | a) $0,75244(\pm 0,00013);$ | б) $24,3872; \delta = 0,34\%;$ |
| 3. | a) $16,383;$ | б) $5,734.$ |

№ 24

- | | | |
|----|--------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{63} = 7,94;$ | $20/13 = 1,54;$ |
| 2. | a) $2,3684(\pm 0,0017);$ | б) $45,7832; \delta = 0,18\%;$ |
| 3. | a) $0,573;$ | б) $3,6761.$ |

№ 25

- | | | |
|----|----------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\sqrt{47} = 6,86;$ | $12/7 = 1,71;$ |
| 2. | a) $0,38725(\pm 0,00112);$ | б) $72,354; \delta = 0,24\%;$ |
| 3. | a) $18,275;$ | б) $0,00644.$ |

№ 26

- | | | |
|----|----------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{41} = 6,40;$ | $6/7 = 0,857;$ |
| 2. | a) $0,36127(\pm 0,00034);$ | б) $46,7843; \delta = 0,32\%;$ |
| 3. | a) $3,425;$ | б) $7,38.$ |

№ 27

- | | | |
|----|----------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\sqrt{87} = 9,33;$ | $23/9 = 2,56;$ |
| 2. | a) $4,57633(\pm 0,00042);$ | б) $23,7564; \delta = 0,44\%;$ |
| 3. | a) $3,75;$ | б) $6,8343.$ |

№ 28

- | | | |
|----|---------------------------|---------------------------------|
| 1. | $\sqrt{42} = 6,48;$ | $27/31 = 0,872;$ |
| 2. | a) $15,8372(\pm 0,0026);$ | б) $0,088748; \delta = 0,56\%;$ |
| 3. | a) $3,643;$ | б) $72,385.$ |

№ 29

- $\sqrt{58} = 7,61;$ $7/3 = 2,33;$
- a) $13,5726(\pm 0,0072);$ б) $3,87683; \delta = 0,33\%;$
- a) $26,3;$ б) $4,8556.$

№ 30

- $\sqrt{53} = 7,28;$ $14/17 = 0,823;$
- a) $0,66835(\pm 0,00115);$ б) $23,3748; \delta = 0,27\%;$
- a) $0,645;$ б) $43,813.$

Пример выполнения задания 1.1

- $\sqrt{18} = 4,24;$ $9/11 = 0,818;$
- a) $72,353(\pm 0,026);$ б) $2,3544; \delta = 0,2\%;$
- a) $0,4357;$ б) $12,284.$

1) Находим значения данных выражений с большим числом десятичных знаков: $a_1 = 9/11 = 0,81818\dots$, $a_2 = \sqrt{18} = 4,2426\dots$. Затем вычисляем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\alpha_{a_1} = |0,81818 - 0,818| \leq 0,00019;$$

$$\alpha_{a_2} = |4,2426 - 4,24| \leq 0,0027.$$

Предельные относительные погрешности составляют:

$$\delta_{a_1} = \frac{\alpha_{a_1}}{a_1} = \frac{0,00019}{0,818} = 0,00024 = 0,024\%;$$

$$\delta_{a_2} = \frac{\alpha_{a_2}}{a_2} = \frac{0,0027}{4,24} = 0,00064 = 0,064\%;$$

Так как $\delta_{a_1} < \delta_{a_2}$, то равенство $9/11 = 0,818$ является более точным.

2. а) пусть $72,353(\pm 0,026) = a$. Согласно условию погрешность $\alpha_a = 0,026 < 0,05$; это означает, что в числе 72,353 верными в узком смысле являются цифры 7, 2, 3. По правилам округления найдем приближенное значение числа, сохранив десятые доли:

$$a_1 = 72,4; \quad \alpha_{a_1} = \alpha_a + \Delta_{\text{окр}} = 0,026 + 0,047 = 0,073.$$

Полученная погрешность больше 0,05; значит, нужно уменьшить число цифр в приближенном числе до двух:

$$a_2 = 72; \quad \alpha_{a_2} = \alpha_a + \Delta_{\text{окр}} = 0,026 + 0,353 = 0,379.$$

Так как $\alpha_{a_2} < 0,5$, то обе оставшиеся цифры верны в узком смысле;

б) пусть $a = 2,35$; $\delta_a = 0,2\%$, тогда $\alpha_a = a\delta_a = 0,00471$. В данном числе верными в широком смысле являются три цифры, поэтому округляем его, сохраняя эти три цифры:

$$a_1 = 2,35; \quad \alpha_{a_1} = 0,0044 + 0,00471 = 0,00911 < 0,01.$$

Значит, и в округленном числе 2,35 все три цифры верны в широком смысле.

3. а) так как все четыре цифры $a = 0,4357$ верны в узком смысле, то абсолютная погрешность $\alpha_a = 0,00005$, а относительная погрешность $\delta_a = 1 / (2 \cdot 4 \cdot 10^3) = 0,000125 = 0,0125\%$;

б) так как все пять цифр числа $a = 12,384$ верны в широком смысле, то $\alpha_a = 0,001$; $\delta_a = 1 / (1 \cdot 10^4) = 0,0001 = 0,01\%$.

Практическое задание 1.2

Действия над приближенными числами.

Оценка погрешности результата

1. Вычислить и определить погрешности результата.
2. Вычислить и определить погрешности результата.
3. Вычислить, пользуясь правилами подсчета цифр.

№ 1

$$1. X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}:$$

- | | |
|---|---|
| <p>а) $a = 3,85(\pm 0,01)$;
 $b = 2,0435(\pm 0,0004)$;
 $c = 962,6(\pm 0,1)$</p> | <p>б) $a = 4,16(\pm 0,005)$;
 $b = 12,163(\pm 0,002)$;
 $c = 55,18(\pm 0,01)$.</p> |
|---|---|

$$2. X = \left[\frac{(a+b)c}{m-n} \right]^2 :$$

a) $a = 4,3(\pm 0,05);$
 $b = 17,21(\pm 0,02);$
 $c = 8,2(\pm 0,05);$
 $m = 12,417(\pm 0,003);$
 $n = 8,37(\pm 0,005);$

б) $a = 5,2(\pm 0,04);$
 $b = 15,32(\pm 0,01);$
 $c = 7,5(\pm 0,05);$
 $m = 21,823(\pm 0,002);$
 $n = 7,56(\pm 0,003).$

$$3. S = \frac{h^2}{18} \div \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2} :$$

a) $a = 1,141;$
 $b = 3,156;$
 $h = 1,14;$

б) $a = 2,234;$
 $b = 4,518;$
 $h = 4,48.$

№ 2

$$1. X = \frac{\sqrt{ab}}{c} :$$

a) $a = 228,6(\pm 0,06);$
 $b = 86,4(\pm 0,02);$
 $c = 68,7(\pm 0,05);$

б) $a = 315,6(\pm 0,05);$
 $b = 72,5(\pm 0,03);$
 $c = 53,8(\pm 0,04).$

$$2. X = \frac{m^3(a+b)}{c-d} :$$

a) $a = 13,5(\pm 0,03);$
 $b = 3,7(\pm 0,02);$
 $m = 4,22(\pm 0,004);$
 $c = 34,5(\pm 0,02);$
 $d = 23,725(\pm 0,005);$

б) $a = 18,5(\pm 0,03);$
 $b = 5,6(\pm 0,02);$
 $m = 3,42(\pm 0,003);$
 $c = 26,3(\pm 0,01);$
 $d = 14,782(\pm 0,006).$

$$3. S = \frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12} :$$

a) $a = 8,53;$
 $b = 6,271;$
 $h = 12,48;$

б) $a = 6,44;$
 $b = 5,323;$
 $h = 15,44.$

№ 3

$$1. X = \frac{\sqrt{ab}}{c} :$$

a) $a = 3,845(\pm 0,004);$
 $b = 16,2(\pm 0,05);$
 $c = 10,8(\pm 0,1);$

б) $a = 4,632(\pm 0,003);$
 $b = 23,3(\pm 0,04);$
 $c = 11,3(\pm 0,06).$

$$2. X = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2} :$$

a) $a = 2,754(\pm 0,001);$
 $b = 11,7(\pm 0,04);$
 $m = 0,56(\pm 0,005);$
 $c = 10,536(\pm 0,002);$
 $d = 6,32(\pm 0,008);$

б) $a = 3,236(\pm 0,002);$
 $b = 15,8(\pm 0,03);$
 $m = 0,64(\pm 0,004);$
 $c = 12,415(\pm 0,003);$
 $d = 7,18(\pm 0,006).$

$$3. N = \frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2+b^2)h}{5} :$$

a) $a = 0,562;$
 $b = 0,2518;$
 $h = 0,68;$

б) $a = 0,834;$
 $b = 0,3523;$
 $h = 0,74.$

№ 4

$$1. X = \frac{a^2b}{c} :$$

a) $a = 3,456(\pm 0,002);$
 $b = 0,642(\pm 0,0005);$
 $c = 7,12(\pm 0,004);$

б) $a = 1,245(\pm 0,001);$
 $b = 0,121(\pm 0,0002);$
 $c = 2,34(\pm 0,003).$

$$2. X = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}} :$$

a) $a = 23,16(\pm 0,02);$
 $b = 8,23(\pm 0,005);$
 $c = 145,5(\pm 0,08);$
 $d = 28,6(\pm 0,01);$
 $m = 0,28(\pm 0,006);$

б) $a = 17,41(\pm 0,01);$
 $b = 1,27(\pm 0,002);$
 $c = 342,2(\pm 0,04);$
 $d = 11,7(\pm 0,01);$
 $m = 0,71(\pm 0,003).$

$$3. V = \frac{h}{3} S \left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right):$$

a) $a = 8,51;$
 $A = 23,42;$
 $S = 34,8;$
 $h = 3,81;$

б) $a = 5,71;$
 $A = 32,17;$
 $S = 51,7;$
 $h = 2,42.$

№ 5

$$1. X = \frac{ab^3}{c}:$$

a) $a = 0,643(\pm 0,0005);$
 $b = 2,17(\pm 0,002);$
 $c = 5,843(\pm 0,001);$

б) $a = 0,142(\pm 0,0003);$
 $b = 1,71(\pm 0,002);$
 $c = 3,727(\pm 0,001).$

$$2. X = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}:$$

a) $a = 27,165(\pm 0,006);$
 $b = 5,035(\pm 0,01);$
 $c = 3,6(\pm 0,02);$
 $m = 12,375(\pm 0,004);$
 $n = 86,2(\pm 0,05);$

б) $a = 15,71(\pm 0,005);$
 $b = 3,28(\pm 0,02);$
 $c = 7,2(\pm 0,01);$
 $m = 13,752(\pm 0,001);$
 $n = 33,7(\pm 0,03).$

$$3. S = \frac{h^2}{18} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}:$$

a) $a = 21,1;$
 $b = 22,08;$
 $h = 31,11$

б) $a = 17,8;$
 $b = 32,47;$
 $h = 31,42$

№ 6

$$1) X = \frac{ab}{c^2}:$$

a) $a = 0,3575(\pm 0,0002);$
 $b = 2,63(\pm 0,01);$
 $c = 0,854(\pm 0,0005);$

б) $a = 0,1756(\pm 0,0001);$
 $b = 3,71(\pm 0,03);$
 $c = 0,285(\pm 0,0002).$

$$2. X = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}};$$

a) $a = 16,342(\pm 0,001);$
 $b = 2,5(\pm 0,03);$
 $c = 38,17(\pm 0,002);$
 $d = 9,14(\pm 0,005);$
 $m = 3,6(\pm 0,04);$

б) $a = 12,751(\pm 0,001);$
 $b = 3,7(\pm 0,02);$
 $c = 23,76(\pm 0,003);$
 $d = 8,12(\pm 0,004);$
 $m = 1,7(\pm 0,01).$

$$3. V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2);$$

a) $a = 2,456;$
 $h = 1,76;$

б) $a = 7,751;$
 $h = 3,35.$

№ 7

$$1. V = \frac{\pi}{4} D d^2;$$

a) $\pi = 3,14;$
 $D = 54(\pm 0,5);$
 $d = 8,235(\pm 0,001);$

б) $\pi = 3,14;$
 $D = 72(\pm 0,3);$
 $d = 3,274(\pm 0,002).$

$$2. S = \frac{1}{64}\pi\sqrt{D^4 - d^4};$$

a) $\pi = 3,14;$
 $D = 36,5(\pm 0,1);$
 $d = 26,35(\pm 0,005);$

б) $\pi = 3,14;$
 $D = 41,4(\pm 0,2);$
 $d = 31,75(\pm 0,003).$

$$3. a = c^2 \left(1 + \frac{2\beta}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right);$$

a) $c = 2,435;$
 $\beta = 0,151;$
 $\gamma = 1,27;$

б) $c = 7,834;$
 $\beta = 0,21;$
 $\gamma = 3,71.$

№ 8

$$1. Y = \frac{m^2 n}{c^3};$$

a) $m = 1,6531(\pm 0,0003);$
 $n = 3,78(\pm 0,002);$
 $c = 0,158(\pm 0,0005);$

б) $m = 2,348(\pm 0,001);$
 $n = 4,37(\pm 0,004);$
 $c = 0,235(\pm 0,0003).$

$$2. X = \frac{m\sqrt{a-b}}{c+d} :$$

a) $a = 9,542(\pm 0,001);$
 $b = 3,128(\pm 0,002);$
 $m = 2,8(\pm 0,03);$
 $c = 0,172(\pm 0,001);$
 $d = 5,4(\pm 0,02);$

б) $a = 8,357(\pm 0,003);$
 $b = 2,48(\pm 0,004);$
 $m = 3,17(\pm 0,01);$
 $c = 1,315(\pm 0,0004);$
 $d = 2,4(\pm 0,02).$

$$3. V = \frac{1}{15}\pi h(2D^2 + Dd + 0,75d^2) :$$

a) $h = 84,2;$
 $D = 28,3;$
 $d = 42,08;$

б) $h = 76;$
 $D = 17,2;$
 $d = 9,344.$

№ 9

$$1. X = \sqrt{\frac{cd}{b}} :$$

a) $c = 0,7568(\pm 0,0002);$
 $d = 21,7(\pm 0,02);$
 $b = 2,65(\pm 0,01);$

б) $c = 0,8345(\pm 0,0004);$
 $d = 13,8(\pm 0,03);$
 $b = 1,84(\pm 0,006).$

$$2. Y = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)} :$$

a) $a = 10,82(\pm 0,03);$
 $b = 2,786(\pm 0,0006);$
 $m = 0,28(\pm 0,006);$
 $n = 14,7(\pm 0,06);$

б) $a = 9,37(\pm 0,004);$
 $b = 3,108(\pm 0,0003);$
 $m = 0,46(\pm 0,002);$
 $n = 15,2(\pm 0,04).$

$$3. S = \sqrt[2]{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = (a+b+c) / 2 :$$

a) $a = 46,3;$
 $b = 29,72;$
 $c = 37,654;$

б) $a = 10,5;$
 $b = 34,18;$
 $c = 27,327.$

№ 10

1. $f = Qe^3 / 48E$:

a) $Q = 54,8(\pm 0,02);$
 $e = 2,45(\pm 0,01);$
 $E = 0,863(\pm 0,004);$

б) $Q = 38,5(\pm 0,01);$
 $e = 3,435(\pm 0,02);$
 $E = 0,734(\pm 0,001).$

2. $Q = \frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$:

a) $n = 10,82(\pm 0,03);$
 $x = 2,786(\pm 0,0006);$
 $y = 0,28(\pm 0,006);$

б) $n = 1,1753(\pm 0,0002);$
 $x = 5,4(\pm 0,01);$
 $y = 0,65(\pm 0,02).$

3. $\gamma = \frac{\alpha b - \beta a}{b^2} - \frac{\beta(ab - \beta\alpha)}{b^2(b + \beta)}$:

a) $\alpha = 5,27;$
 $\beta = 0,0562;$
 $a = 158,35;$
 $b = 61,21.$

б) $\alpha = 7,31;$
 $\beta = 0,0761;$
 $a = 234,36;$
 $b = 81,26.$

Пример выполнения задания 1.2

1. $X = \frac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}$,

где $m = 28,3(\pm 0,02)$; $n = 7,45(\pm 0,01)$; $k = 0,678(\pm 0,003)$.

2. $N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, где $m = 5,72(\pm 0,02)$; $n = 3,0567(\pm 0,0001)$.

3. $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$, где $h = 11,8$; $R = 23,67$.

1. Находим $m^2 = 800,9$; $n^3 = 413,5$; $\sqrt{k} = 0,8234$;

$$X = \frac{800,9 \cdot 413,5}{0,8234} = 402\,200 = 4,02 \cdot 10^5 .$$

Далее, имеем $\delta_m = 0,02 / 28,3 = 0,00071$;

$$\delta_n = 0,01 / 7,45 = 0,00135 ; \delta_k = 0,003 / 0,678 = 0,00443 ,$$

откуда

$$\delta_X = 2\delta_m + 3\delta_n + 0,5\delta_k = 0,00142 + 0,00405 + 0,00222 = 0,00769 = 0,77\% ;$$

$$\alpha_X = 4,02 \cdot 10^5 \cdot 0,0077 = 3,1 \cdot 10^3 .$$

Ответ: $X = 4,02 \cdot 10^5 (\pm 3,1 \cdot 10^3)$; $\delta_X = 0,77\%$.

2. Имеем $n-1 = 2,0567 (\pm 0,0001)$;

$$m+n = 3,057 (\pm 0,0004) + 5,72 (\pm 0,02) = 8,777 (\pm 0,0204) ;$$

$$m-n = 5,72 (\pm 0,02) - 3,057 (\pm 0,0004) = 2,663 (\pm 0,0204) ;$$

$$N = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{2,663^2} = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{7,092} = 2,545 \approx 2,55 ;$$

$$\delta_N = \frac{0,0001}{2,0567} + \frac{0,0204}{8,777} + 2 \frac{0,0204}{2,663} = 0,000049 + 0,00233 + 2 \cdot 0,00766 = \\ = 0,00238 + 0,01532 = 0,0177 = 1,77\% ;$$

$$\alpha_N = 2,55 \cdot 0,0177 = 0,046 .$$

Ответ: $N \approx 2,55 (\pm 0,046)$; $\delta_N = 1,77\%$.

3. Находим

$$V = 3,142 \cdot 11,8^2 \cdot (23,67 - 3,933) = 3,142 \cdot 11,8^2 \cdot 19,737 = \\ = 3,142 \cdot 139,2 \cdot 19,737 = 437,37 \cdot 19,737 = 8630 \approx 8,63 \cdot 10^3 .$$

Ответ: $V \approx 8,63 \cdot 10^3$.

ГЛАВА 2

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Общий вид нелинейного уравнения можно представить следующим образом:

$$F(x) = 0, \quad (2.1)$$

где функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$.

Определение. Всякое число $\xi \in [a, b]$, обращающее функцию $F(x)$ в нуль, называется корнем уравнения (2.1).

Определение. Число ξ называется корнем k -й кратности, если при $x = \xi$ вместе с функцией $F(x)$ равны нулю ее производные до $(k - 1)$ -го порядка включительно:

$$F(\xi) = F'(\xi) = \dots = F^{(k-1)}(\xi). \quad (2.2)$$

Определение. Однократный корень называется простым.

Определение. Уравнения $F(x) = 0$ и $G(x) = 0$ называются равносильными (эквивалентными), если множества решений данных уравнений совпадают.

Нелинейные уравнения с одной переменной подразделяются на алгебраические и трансцендентные.

Определение. Уравнение (2.1) называется алгебраическим, если функция $F(x)$ является алгебраической.

Путем алгебраических преобразований из всякого алгебраического уравнения можно получить уравнение в канонической форме:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (2.3)$$

где a_0, a_1, \dots, a_n — действительные коэффициенты уравнения; x — неизвестное.

Всякое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один вещественный или два комплексно сопряженных корня.

Определение. Уравнение (2.1) называется трансцендентным, если функция $F(x)$ не является алгебраической.

Определение. Решить уравнение (2.1) означает следующее.

1. Установить, имеет ли уравнение корни.
2. Определить число корней уравнения.
3. Найти значения корней уравнения с заданной точностью.

Отделение корней

Определение. Отделение корней — это процедура нахождения отрезков, на которых уравнение (2.1) имеет только одно решение.

В большинстве случаев отделение корней можно провести графически. Для этого достаточно построить график функции $F(x)$ и определить отрезки, на которых функция $F(x)$ имеет только одну точку пересечения с осью абсцисс.

При отделении корней можно руководствоваться также следующими положениями:

- если непрерывная функция принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков, т.е. $F(a), F(b) < 0$, то уравнение (2.1) имеет на этом отрезке по меньшей мере один корень;
- если функция $F(x)$ к тому же и строго монотонна, то корень на отрезке единственный.

Метод половинного деления

Пусть уравнение (2.1) имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень, причем функция $F(x)$ на данном отрезке непрерывна (рис. 2.1).

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $c = \frac{a+b}{2}$. Если $F(c) \neq 0$, то возможны два случая:

- функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[a, c]$;
- функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[c, b]$.

Выбирая в каждом случае тот отрезок, на котором функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

Графическое решение уравнений

Действительные корни уравнение (2.1) приближенно можно определить как абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox . Если уравнение (2.1) не имеет близких между собой корней, то этим способом его корни легко отделяются. На практике часто бывает выгодно уравнение (2.1) заменить равносильным ему уравнением

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad (2.4)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — более простые, чем функция $f(x)$.

Тогда, построив графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Метод итераций

Одним из наиболее важных способов численного решения уравнений является метод итераций. Сущность этого метода заключается в следующем. Пусть дано уравнение (2.1) $F(x) = 0$, где $F(x)$ — непрерывная функция, и требуется определить его вещественные корни. Заменим уравнение (2.1) равносильным уравнением

$$x = \varphi(x). \quad (2.5)$$

Выберем каким-либо способом грубо приближенное значение корня x_0 и подставим его в правую часть уравнения (2.5). Тогда получим некоторое число

$$x_1 = \varphi(x_0). \quad (2.6)$$

Подставляя теперь в правую часть равенства (2.6) вместе x_0 число x_1 , получим новое число $x_2 = \varphi(x_1)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность чисел

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.7)$$

Если эта последовательность — сходящаяся, т.е. существует предел $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то, переходя к пределу в равенстве (2.7) и предполагая функцию $\varphi(x)$ непрерывной, найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) \text{ или } \xi = \varphi(\xi). \quad (2.8)$$

Таким образом, предел ξ является корнем уравнения (2.5) и может быть вычислен по формуле (2.7) с любой степенью точности.

Условие сходимости итерационного процесса определяется теоремой о достаточном условии сходимости итерационного процесса.

Теорема. Пусть уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$ и выполнены условия:

- 1) $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$;
- 2) $\varphi(x) \in [a, b]$ для всех $x \in [a, b]$;
- 3) существует такое вещественное q , что $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ для всех $x \in [a, b]$.

Тогда итерационная последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится при любом начальном приближении $x_0 \in [a, b]$.

Замечание. Условия теоремы не являются необходимыми. Это означает, что итерационная последовательность может оказаться сходящейся и при невыполнении этих условий.

Преобразование уравнения к итерационному виду

Уравнение $F(x) = 0$ преобразуется к виду, пригодному для итерационного процесса, следующим преобразованием:

$$x = x - mF(x),$$

где m — отличная от нуля константа.

В этом случае

$$\varphi(x) = x - mF(x). \quad (2.9)$$

Функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям теоремы. Дифференцируя (2.9), получим

$$\varphi'(x) = x - mF'(x). \quad (2.10)$$

Для выполнения условия 3 теоремы достаточно подобрать m так, чтобы для всех $x \in [a, b]$ выполнялось $|1 - mF'(x)| \leq 1$.

Практическое задание 2.1

Уточнение корней уравнения методом хорд

1. Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001.

2. Отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001.

№ 1. 1) $x - \sin(x) = 0,25$; 2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$.

№ 2. 1) $\operatorname{tg}(0,58x + 0,1) = x^2$; 2) $x^3 - 6x - 8 = 0$.

№ 3. 1) $\sqrt{x} - \cos(0,38x) = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$.

№ 4. 1) $\operatorname{tg}(0,4x + 0,4) = x^2$; 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$.

№ 5. 1) $\lg(x) - \frac{7}{2x+6} = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$.

№ 6. 1) $\operatorname{tg}(0,5x + 0,2) = x^2$; 2) $x^3 + x - 5 = 0$.

- № 7. 1) $3x - \cos(x) - 1 = 0$; 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 0$.
- № 8. 1) $x + \lg(x) = 0,5$; 2) $x^3 + 3x + 1 = 0$.
- № 9. 1) $\operatorname{tg}(0,5x + 0,1) = x^2$; 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0$.
- № 10. 1) $x^2 + 4\sin(x) = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$.
- № 11. 1) $\operatorname{ctg}(1,05x) - x^2 = 0$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0$.
- № 12. 1) $\operatorname{tg}(0,4x + 0,3) = x^2$; 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$.
- № 13. 1) $x \lg(x) - 1,2 = 0$; 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$.
- № 14. 1) $1,8x^2 - \sin(10x) = 0$; 2) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$.
- № 15. 1) $\operatorname{ctg}(x) - \frac{x}{4} = 0$; 2) $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$.
- № 16. 1) $\operatorname{tg}(0,3x + 0,4) = x^2$; 2) $x^3 + 4x - 6 = 0$.
- № 17. 1) $x^2 - 20\sin(x) = 0$; 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0$.
- № 18. 1) $\operatorname{ctg}(x) - \frac{x}{3} = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$.
- № 19. 1) $\operatorname{tg}(0,47x + 0,2) = x^2$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x + 1,2 = 0$.
- № 20. 1) $x^2 + 4\sin(x) = 0$; 2) $x^3 - 2x^2 + 4 = 0$.
- № 21. 1) $\operatorname{ctg}(x) - \frac{x}{2} = 0$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1,4 = 0$.
- № 22. 1) $2x - \lg(x) - 7 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$.
- № 23. 1) $\operatorname{tg}(0,44x + 0,3) = x^2$; 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 1,2 = 0$.
- № 24. 1) $3x - \cos(x) - 1 = 0$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0$.
- № 25. 1) $\operatorname{ctg}(x) - \frac{x}{10} = 0$; 2) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$.
- № 26. 1) $x^2 + 4\sin(x) = 0$; 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$.
- № 27. 1) $\operatorname{tg}(0,36x + 0,4) = x^2$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$.
- № 28. 1) $x + \lg(x) = 0,5$; 2) $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,4 = 0$.
- № 29. 1) $\operatorname{ctg}(x) - \frac{x}{5} = 0$; 2) $x^3 + x - 3 = 0$.
- № 30. 1) $2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,4 = 0$.

Пример выполнения задания 2.1

1. $\operatorname{tg}(0,55x + 0,1) = x^2$.

2. $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$.

Отделим корень графически. Построим графики уравнений $y_1 = \operatorname{tg}(0,55x + 0,1)$ и $y_2 = x^2$ (см. рис. 2.1), составив таблицы этих функций.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y_2 = x^2$	0	0,04	0,16	0,36	0,64	1
$0,55x$	0	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55
y_1	0,1	0,21	0,33	0,46	0,60	0,76

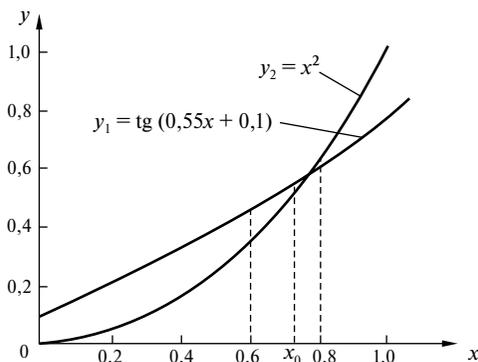


Рис. 2.1. Графики уравнений $y_1 = \operatorname{tg}(0,55x + 0,1)$ и $y_2 = x^2$

Таким образом, положительный корень уравнения заключен в промежутке $[0,6; 0,8]$.

Чтобы уточнить корень методом хорд, определим знаки функции $f'(x) = \operatorname{tg}(0,55x + 0,1) - x^2$ на концах промежутка $[0,6; 0,8]$ и знак второй производной в этом промежутке:

$$f'(0,6) = \operatorname{tg}(0,43) - 0,36 = 0,4586 - 0,36 = 0,0986;$$

$$f'(0,8) = \operatorname{tg}(0,54) - 0,64 = 0,5994 - 0,64 = -0,0406;$$

$$f''(x) = \frac{0,55}{\cos^2(0,55x + 0,1)} - 2x;$$

$$f''(x) = 0,55 \cdot 2 \cos^3(0,55x + 0,1) \sin(0,55x + 0,1) \cdot 0,55 - 2 = \\ = \frac{0,605 \sin(0,55x + 0,1)}{\cos^3(0,55x + 0,1)} - 2 < 0$$

при $x \in [0,6; 0,8]$.

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n),$$

где $b = 0,8$ и $x_0 = 0,8$.

Вычисления удобно располагать в таблице.

n	x_n	$0,8 - x_n$	$0,55x_n + 0,1$	$\operatorname{tg}(0,55x_n + 0,1)$
0	0,6	0,2	0,43	0,4586
1	0,742	0,058	0,5081	0,5570
2	0,750	0,50	0,5125	0,5627
3	0,7502	0,0498	0,5126	0,5628

n	x_n^2	$f(x_n)$	$f(0,8) - f(x_n)$	$h = \frac{f(x_n)}{f(0,8) - f(x_n)} \cdot (b - x_n)$
0	0,36	0,0986	-0,1392	-0,142
1	0,5506	0,0064	-0,0470	-0,008
2	0,5625	0,0002	-0,0408	-0,0002
3	0,5628	0		

Ответ: $x = 0,750$.

2. Отделим корни аналитически. Находим

$$f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5; \quad D = 0,16 - 6 < 0.$$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty + \infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	-	-	+	+

Уравнение имеет один действительный корень, лежащий в промежутке $[-1, 0]$.

Чтобы уточнить корень, находим вторую производную $f''(x) = 6x - 0,4$; в промежутке $[-1, 0]$ выполняется неравенство $f''(x) < 0$.

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a),$$

где $a = -1$; $x_0 = 0$; $f(a) = f(-1) = -1 - 0,2 - 0,5 + 1,5 = -0,2$.

Вычисления располагаем в таблице.

n	x_n	x_n^3	x_n^2	$0,2x_n^2$	$0,5x_n$
0	0	0	0	0	0
1	-0,882	-0,6861	0,7779	0,1556	-0,441
2	-0,943	-0,8386	0,8892	0,1778	-0,4715
3	-0,946	-0,8466	0,8949	0,1790	-0,473
4	-0,946				

n	$f(x_n)$	$f(x_n) + 0,2$	$x_n - a$	$\frac{f(a)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}$
0	1,5	1,7	1	-0,118
1	0,2173	0,4173	0,118	-0,057
2	0,0121	0,2121	0,057	-0,054
3	0,0014	0,2014	0,054	-0,054

Ответ: $x \approx -0,946$.

Практическое задание 2.2

Уточнение корней уравнения методом касательных

1. Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0,001.

2. Отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них с точностью до 0,001 методом касательных.

Воспользоваться вариантами работы 2.1.

Пример выполнения задания 2.2

1. $\text{tg}(0,55x + 0,1) = x^2$. 2. $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$.

1. Отделим один из корней этого уравнения. Установили, что он заключен в промежутке $[0,6; 0,8]$. Уточним этот корень методом ка-

сательных. Так как $f(0,6) > 0$; $f(0,8) < 0$ и $f'(x) < 0$, то за начальное приближение примем $x_0 = 0,8$.

Вычисления производим по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Предварительно найдем

$$\begin{aligned} f'(0,8) &= \frac{0,55}{\cos^2(0,44 + 0,1)} - 2 \cdot 0,8 = \frac{0,55}{0,8523} - 1,6 = \frac{0,55}{0,7356} - 1,6 = \\ &= 0,7477 - 1,6 = -0,8523. \end{aligned}$$

Составим таблицу.

n	x_n	x_n^2	$0,55x_n + 0,1$	$\operatorname{tg}(0,55x_n + 0,1)$	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{-0,8523}$
0	0,8	0,64	0,54	0,5994	-0,0406	0,0476
1	0,7524	0,5661	0,5138	0,5643	-0,0018	0,0021
2	0,7503	0,5630	0,5127	0,5630	-0,0000	0

Ответ: $x \approx 0,750$.

2. Можно убедиться, что уравнение имеет действительный корень, принадлежащий промежутку $[-1, 0]$. Уточним этот корень методом касательных. Так как $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$ и $f''(x) < 0$, то за начальное приближение принимаем $x_0 = -1$.

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Находим

$$f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5; \quad f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5.$$

Для вычислений используем таблицу.

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-1	1	-1	-0,2	3,9	-0,051
1	-0,949	0,9006	-1,8547	-0,0093	3,5814	-0,0026
2	-0,9464	0,8957	-0,8477	-0,0004	3,5657	-0,00001

Ответ: $x \approx -0,946$.

Практическое задание 2.3

Уточнение корней уравнения комбинированным методом хорд и касательных

Комбинированным методом хорд и касательных решить уравнение третьей степени, вычислив корни с точностью до 0,001.

№ 1. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$.

№ 2. $x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$.

№ 3. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

№ 4. $2x^3 - 12x + 6 = 0$.

№ 5. $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$.

№ 6. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$.

№ 7. $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$.

№ 8. $x^3 - 3x^2 + 2,5 = 0$.

№ 9. $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

№ 10. $x^3 + 3x^2 - 3,5 = 0$.

№ 11. $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$.

№ 12. $x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0$.

№ 13. $2x^3 - 9x^2 - 10 = 0$.

№ 14. $x^3 - 12x + 10 = 0$.

№ 15. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$.

№ 16. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$.

№ 17. $x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$.

№ 18. $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$.

№ 19. $x^3 - 12x - 5 = 0$.

№ 20. $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$.

№ 21. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$.

№ 22. $2x^3 + 9x^2 - 6 = 0$.

№ 23. $x^3 - 3x^2 + 1,5 = 0$.

№ 24. $x^3 - 3x^2 - 24x + 1 = 0$.

№ 25. $x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$.

№ 26. $x^3 - 12x - 10 = 0$.

№ 27. $2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$.

№ 28. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$.

№ 29. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$.

№ 30. $x^3 - 3x^2 + 3,5 = 0$.

Пример выполнения задания 2.3

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0.$$

Отделим корни аналитически. Находим

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7; \quad f'(x) = 3x^2 - 4x - 4;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3}; \quad x_1 = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = 2.$$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$.

x	$-\infty$	$-2/3$	2	$+\infty$
$\text{sign } f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Итак, уравнение имеет три действительных корня:

$$x_1 \in \left[-\infty, -\frac{2}{3}\right]; \quad x_2 \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]; \quad x_3 \in [2, +\infty].$$

Уменьшим промежутки, содержащие корни, до длины, равной 1.

x	-2	-1	0	1	2	3
$\text{sign } f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$

Значит, $x_1 \in [-2, -1]$; $x_2 \in [1, 2]$; $x_3 \in [2, 3]$.

Уточним корни комбинированным методом хорд и касательных.

1. $x_1 \in [-2, -1]$; $f(-2) < 0$; $f(-1) > 0$; $f''(x) = 6x - 4$. При $-2 \leq x \leq -1$ имеем $f''(x) < 0$. Для расчетов применяем формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad \bar{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n),$$

где x_n и \bar{x}_n — значения корня соответственно по недостатку и избытку.

Полагаем $x_0 = -2$; $\bar{x}_0 = -1$.

Все вычисления производим в таблице, обозначив

$$h_{1n} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad h_{2n} = \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n).$$

n	x_n	$\bar{x}_n - x_n$	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(\bar{x}_n) -$	h_{1n}
	\bar{x}_n		\bar{x}_n^2	\bar{x}_n^3	$f(\bar{x}_n)$		$-f(x_n)$	h_{2n}
0	-2	1	4	-8	-1	16	9	-0,06
	-1		1	-1	8			-0,11
1	-1,94	0,05	3,7636	-7,3014	-0,0686	15,0508	0,7331	-0,0045
	-1,89		3,5721	-6,7513	0,6645			-0,0047
2	-1,9355	0,0002	3,7462	-7,2507	-0,0011	-	-	-
	-1,9353		3,7454	-7,2484	0,0020			-

Ответ: $x_1 \approx -1,935$.

2. $x_2 \in [1, 2]$; $f(1) > 0$; $f(2) < 0$; $f''(x) > 0$ при $1 \leq x \leq 2$. Для расчетов применяем те же формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad \bar{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n),$$

полагая $x_0 = 1$, $\bar{x}_0 = 2$.

Вычисления производим в таблице.

n	x_n	$\bar{x}_n - x_n$	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(\bar{x}_n) -$	h_{1n}
	\bar{x}_n		\bar{x}_n^2	\bar{x}_n^3	$f(\bar{x}_n)$		$-f(x_n)$	h_{2n}
0	1	1	1	1	2	-5	-3	-0,4
	2		4	8	-1			-0,7
1	1,4	0,3	1,96	2,744	0,224	-3,72	-0,891	-0,060
	1,7		2,89	4,913	-0,667			-0,075

2	1,46	0,015	2,1316	3,1121	0,0089	-3,4452	-0,0511	-0,0025
	-1,9353		3,7454	-7,2484	0,0020			-0,0026
3	1,4625	0,0001	2,1389	3,1282	0,0004			
	1,4626		2,1392	3,1288	0			

Ответ: $x_2 \approx 1,463$.

3. $x_3 \in [2, 3]$; $f(2) < 2$; $f(3) > 0$; $f''(x) > 0$ при $2 \leq x \leq 3$. Для расчетов применяем формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n);$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}, \quad \text{где } x_0 = 2, \bar{x}_0 = 3.$$

Вычисления производим по таблице, обозначив

$$h_{1n} = \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n); \quad h_{2n} = \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$$

n	x_n	$\bar{x}_n - x_n$	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(\bar{x}_n) -$	h_{1n}
	\bar{x}_n		\bar{x}_n^2	\bar{x}_n^3	$f(\bar{x}_n)$		$-f(x_n)$	h_{2n}
0	2	1	4	8	-1	5	11	-0,20
	3		9	27	4			0,36
1	2,2	0,44	4,84	10,648	-0,832	1,7325	6,3488	-0,126
	2,64		6,9696	18,3997	-0,9005			0,142
2	2,326	0,172	5,4103	12,8430	-0,2816	0,3971	4,728	-0,122
	2,498		6,2400	15,5875	0,1155			0,024
3	2,448	0,026	5,9927	14,6701	-0,1073	0,1125	4,4661	-0,0248
	2,474		6,1207	15,1426	0,0052			0,0012
4	2,4728	0						
	2,4728							

Ответ: $x_2 \approx 2,473$.

Практическое задание 2.4

Уточнение корней уравнения методом итераций

1. Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0,001.

2. Отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0,001.

№ 1. 1) $\ln(x) + (x+1)^3 = 0$; 2) $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$.

№ 2. 1) $x \cdot 2^x = 1$; 2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$.

№ 3. 1) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$; 2) $x^3 - 2x + 2 = 0$.

№ 4. 1) $x - \cos(x) = 0$; 2) $x^3 + 3x - 1 = 0$.

№ 5. 1) $3x + \cos(x) + 1 = 0$; 2) $x^3 + x - 3 = 0$.

№ 6. 1) $x + \ln(x) = 0,5$; 2) $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$.

№ 7. 1) $2 - x = \ln(x)$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$.

№ 8. 1) $(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$; 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$.

№ 9. 1) $(2-x)e^x = 0,5$; 2) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$.

№ 10. 1) $2,2x - 2^x = 0$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0$.

№ 11. 1) $x^2 + 4\sin(x) = 0$; 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 1,2 = 0$.

№ 12. 1) $2x - \lg(x) = 7$; 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$.

№ 13. 1) $5x - 8\ln(x) = 8$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1,4 = 0$.

№ 14. 1) $3x - e^x = 0$; 2) $x^3 + 2x + 4 = 0$.

№ 15. 1) $x(x+1)^2 = 1$; 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$.

№ 16. 1) $x = (x+1)^3$; 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0$.

№ 17. 1) $x^2 = \sin(x)$; 2) $x^3 + 4x - 6 = 0$.

№ 18. 1) $x^3 = \sin(x)$; 2) $x^3 + 0,1x^2 + 0,4 - 1,2 = 0$.

№ 19. 1) $x = \sqrt{\lg(x+2)}$; 2) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$.

- № 20. 1) $x^2 = \ln(x+1)$; 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$.
- № 21. 1) $2x + \lg(x) = -0,5$; 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$.
- № 22. 1) $2x + \cos(x) = 0,5$; 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0$.
- № 23. 1) $\sin(0,5x) + 1 = x^2$; 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$; $x > 0$;
- № 24. 1) $0,5x + \lg(x-1) = 0,5$; 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0$.
- № 25. 1) $\sin(0,5+x) = 2x - 0,5$; 2) $x^3 + 3x + 1 = 0$.
- № 26. 1) $\lg(2+x) + 2x = 3$; 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 0$.
- № 27. 1) $\lg(1+2x) = 2-x$; 2) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$.
- № 28. 1) $2\sin(x-0,6) - 1,5 - x$; 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$.
- № 29. 1) $x + \lg(1+x) = 1,5$; 2) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$.
- № 30. 1) $x + \cos(x) = 1$; 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,3x - 0,6 = 0$.

Пример выполнения задания 2.4

1) $2x + \lg(2x+3) = 1$. 2) $x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$.

1. Найдем приближенные значения корней графически: для этого уравнение удобно представить в виде $\lg(2x+3) = 1-2x$ (рис. 2.2). Из графика видно, что уравнение имеет один корень, лежащий в промежутке $[0; 0,5]$. Для уточнения его методом итераций приведем уравнение к виду $x = \varphi(x)$.

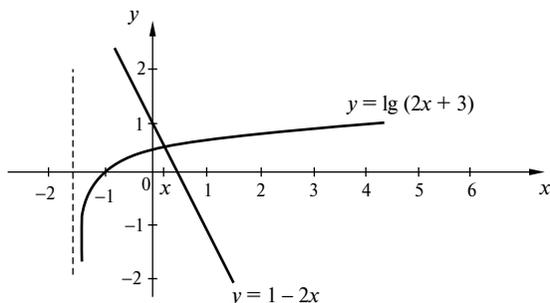


Рис. 2.2. Уравнение, представленное в виде $\lg(2x+3) = 1-2x$

Функцию $\varphi(x)$ будем искать из соотношения $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}$, считая, что $|k| \geq \frac{Q}{2}$, где $Q = \max|f'(x)|$; число k имеет тот же знак, что и $f'(x)$ в промежутке $[0; 0,5]$.

Находим

$$f(x) = 2x + \lg(2x+3) - 1;$$

$$f'(x) = 2 + \frac{0,8686}{2x+3};$$

$$Q = \max_{[0;0,5]} f'(x) = 2 + \frac{0,8686}{2 \cdot 0 + 3} \approx 2,2895; f'(x) > 0$$

при $0 \leq x \leq 0,5$.

Примем $k = 2$, тогда

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{2} = x - x - \frac{\lg(2x+3)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lg(2x+3).$$

За начальное приближение возьмем $x_0 = 0$, все остальные приближения будем определять из равенства

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lg(2x+3).$$

Вычисления удобно располагать в таблице.

n	x_n	$2x_n+3$	$\lg(2x_n+3)$	$\frac{1}{2} \lg(2x_n+3)$
0	0	3	0,4771	0,2386
1	0,2614	3,5228	0,5469	0,2734
2	0,2266	3,4532	0,5382	0,2691
3	0,2309	3,4618	0,5394	0,2697
4	0,2303	3,4606	0,5392	0,2696
5	0,2304			

Ответ: $x \approx 0,230$.

2. Отделяем корни аналитически. Находим

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 3; f'(x) = 3x^2 - 4x + 7;$$

$$D = 4 - 21 \cdot 4 < 0.$$

Составим таблицу.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$\text{sign } f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Уравнение имеет действительный корень, лежащий в промежутке $[-1; 0]$.

Приведем уравнение к виду $x = \varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)| < 1$ при $-1 \leq x \leq 0$. Так как $Q = \max_{[-1; 0]} |f'(x)| = f'(-1) = 3 + 4 + 7 = 14$, то можно взять $k = 10$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x - \frac{f(x)}{k} = x - 0,1x^3 + 0,2x^2 - 0,7x - 0,3 = \\ &= -0,1x^3 + 0,2x^2 + 0,3x - 0,3. \end{aligned}$$

Пусть $x_0 = 0$, тогда $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Вычисления располагаем в таблице.

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$\varphi(x)$
0	0	0	0	-0,3
1	-0,3	0,09	-0,027	-0,3693
2	-0,3693	0,1364	-0,0504	-0,3785
3	-0,3785	0,1433	-0,0542	-0,3795
4	-0,3795	0,1440	-0,0546	-0,3796
5	-0,3796			

Ответ: $x \approx -0,380$.

ГЛАВА 3

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Способы решения систем линейных уравнений можно разделить на две группы: точные методы, представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы (например, правило Крамера, метод Гаусса, метод главных элементов, метод квадратных корней и др.); итерационные методы, позволяющие получать корни системы с заданной точностью путем сходящихся бесконечных процессов (например, метод итерации, метод Зейделя, метод релаксации и т.п.).

Вследствие неизбежных округлений результаты даже точных методов являются приближенными, причем оценка погрешностей корней в общем случае затруднительна. При использовании итерационных процессов, сверх того, добавляется погрешность метода. Эффективное применение итерационных методов существенно зависит от удачного выбора начального приближения и быстроты сходимости процесса.

При большом числе неизвестных линейной системы схема метода Гаусса, дающая точное решение, становится весьма сложной. В этих условиях для нахождения корней системы иногда удобнее пользоваться приближенными численными методами.

Пусть дана линейная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (3.1) коротко можно записать в виде матричного уравнения

$$Ax = b. \quad (3.1)'$$

Предполагая, что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0$ ($i = \overline{1, n}$).

Решим первое уравнение системы (3.1) относительно x_1 , второе — относительно x_2 и т.д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$; $\alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$ и $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$ ($i, j = \overline{1, n}$).

Введем матрицы

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & \dots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \text{ и } \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (3.2) можно записать в матричной форме

$$x = \beta + \alpha x. \quad (3.2)'$$

Систему (3.2) решим методом последовательных приближений.

За нулевое приближение примем столбец свободных членов $x^{(0)} = \beta$.

Далее, последовательно строим матрицы-столбцы

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)} \text{ (первое приближение);}$$

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)} \text{ (второе приближение) и т.д.}$$

В общем случае любое $(k + 1)$ -е приближение вычисляют по формуле

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (3.3)$$

Если последовательность приближений $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$ имеет предел $\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)}$, то этот предел является решением системы (3.2). Действительно, переходя к пределу в равенстве (3.3) будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)}$$

или

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha \mathbf{x},$$

т.е. предельный вектор \mathbf{x} является решением системы (3.2)', а следовательно, и системы (3.1).

Напишем формулы приближений в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \\ (\alpha_{ij} = 0; i = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (3.3)'$$

Заметим, что иногда выгоднее приводить систему (3.1) к виду (3.2) так, чтобы коэффициенты α_{ij} не были равны нулю.

Вообще, имея систему

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, n}),$$

можно положить

$$a_{ii} = a_{ii}^{(1)} + a_{ii}^{(2)},$$

где $a_{ii}^{(1)} \neq 0$.

Тогда данная система эквивалентна приведенной системе

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, n}),$$

где

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}^{(1)}}; \quad \alpha_{ii} = -\frac{a_{ii}^{(2)}}{a_{ii}^{(1)}}; \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}^{(1)}} \quad \text{при } i \neq j.$$

Поэтому в дальнейшем будем предполагать $\alpha_{ii} = 0$.

Метод последовательных приближений, определяемых формулой (3.3) или (3.3)', носит название метода итерации. Процесс итерации (3.3) хорошо сходится, т.е. число приближений, необходимых для получения корней системы (3.1) с заданной точностью, невелико, если элементы матрицы α малы по абсолютной величине. Иными словами, для успешного применения процесса итерации модули диагональных коэффициентов системы (3.1) должны быть велики по сравнению с модулями недиагональных коэффициентов этой системы (свободные члены при этом роли не играют).

Замечание. При применении метода итерации (формула (3.3)) нет необходимости за нулевое приближение $x^{(0)}$ принимать столбец свободных членов. Сходимость процесса итерации зависит только от свойств матрицы α , причем при выполнении известных условий, если этот процесс сходится при каком-нибудь выборе исходного начального приближения, он будет сходиться к тому же предельному вектору и при любом другом выборе этого начального приближения. Поэтому начальный вектор $x^{(0)}$ в процессе итерации может быть взят произвольным. Целесообразно за компоненты начального вектора выбирать приближенные значения корней системы, находимые грубой прикидкой.

Сходящийся процесс итерации обладает важным свойством самоисправляемости, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новый начальный вектор.

Отметим, что иногда бывает удобнее подсчитывать не сами приближения, а их разности.

Недостатком этого варианта метода итерации является систематическое накопление ошибок при увеличении числа слагаемых, в результате чего могут возникнуть значительные погрешности искомым корней. Кроме того, ошибка, допущенная в вычислениях, повлияет на окончательный результат. Поэтому надежнее пользоваться первым вариантом метода итерации.

Замечания о точности расчета. Если все коэффициенты и свободные члены данной системы являются точными числами, то решение ее методом последовательных приближений может быть получено с любым заранее заданным числом m верных десятичных знаков. При этом в значениях последовательных приближений следует удерживать $m + 1$ десятичных знаков и последовательные приближения вычислять до их совпадения, после чего нужно округлить результат на один знак. Если коэффициенты и свободные члены данной системы являются приближенными числами, написанными с p

знаками, то решение этой системы производится, как в случае точных чисел, с точностью до $m = p$ знаков.

Рассмотрим без доказательства достаточное условие сходимости процесса итерации.

Теорема. Если для приведенной системы (3.2) выполнено по меньшей мере одно из условий:

$$1) \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

или

$$2) \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

то процесс итерации (3.3) сходится к единственному решению этой системы независимо от выбора начального приближения.

Следствие. Для системы $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$ метод итерации сходится, если выполнены неравенства $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (i=1, 2, \dots, n)$, т.е. если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Практическое задание 3.1

Решение систем линейных уравнений по схеме Гаусса

Используя схему Гаусса, решить систему уравнений с точностью до 0,001.

$$\text{№ 1.} \quad \begin{cases} 4,4x_1 - 2,5x_2 + 19,2x_3 - 10,8x_4 = 4,3; \\ 5,5x_1 - 9,3x_2 - 14,2x_3 + 13,2x_4 = 6,8; \\ 7,1x_1 - 11,5x_2 + 5,3x_3 - 6,7x_4 = -1,8; \\ 14,2x_1 + 23,4x_2 - 8,8x_3 + 5,3x_4 = 7,2. \end{cases}$$

$$\text{№ 2.} \quad \begin{cases} 8,2x_1 - 3,2x_2 + 14,2x_3 + 14,8x_4 = -8,4; \\ 5,6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6,4x_4 = 4,5; \\ 5,7x_1 + 3,6x_2 - 12,4x_3 - 2,3x_4 = 3,3; \\ 6,8x_1 + 13,2x_2 - 6,3x_3 - 8,7x_4 = 14,3. \end{cases}$$

$$\text{№ 3. } \begin{cases} 5,7x_1 - 7,8x_2 - 5,6x_3 - 8,3x_4 = 2,7; \\ 6,6x_1 + 13,1x_2 - 6,3x_3 + 4,3x_4 = -5,5; \\ 14,7x_1 - 2,8x_2 + 5,6x_3 - 12,1x_4 = 8,6; \\ 8,5x_1 + 12,7x_2 - 23,7x_3 + 5,7x_4 = 14,7. \end{cases}$$

$$\text{№ 4. } \begin{cases} 3,8x_1 + 14,2x_2 + 6,3x_3 - 15,5x_4 = 2,8; \\ 8,3x_1 - 6,6x_2 + 5,8x_3 + 12,2x_4 = -4,7; \\ 6,4x_1 - 8,5x_2 - 4,3x_3 + 8,8x_4 = 7,7; \\ 17,1x_1 - 8,3x_2 + 14,4x_3 - 7,2x_4 = 13,5. \end{cases}$$

$$\text{№ 5. } \begin{cases} 15,7x_1 + 6,6x_2 - 5,7x_3 + 11,5x_4 = -2,4; \\ 8,8x_1 - 6,7x_2 + 5,5x_3 - 4,5x_4 = 5,6; \\ 6,3x_1 - 5,7x_2 - 23,4x_3 + 6,6x_4 = 7,7; \\ 14,3x_1 + 8,7x_2 - 15,7x_3 - 5,8x_4 = 23,4. \end{cases}$$

$$\text{№ 6. } \begin{cases} 4,3x_1 - 12,1x_2 + 23,2x_3 - 14,1x_4 = 15,5; \\ 2,4x_1 - 4,4x_3 + 3,5x_3 + 5,5x_4 = 2,5; \\ 5,4x_1 + 8,3x_2 - 7,4x_3 - 12,7x_4 = 8,6; \\ 6,3x_1 - 7,6x_2 + 1,34x_3 + 3,7x_4 = 12,1. \end{cases}$$

$$\text{№ 7. } \begin{cases} 14,4x_1 - 5,3x_2 + 14,3x_3 - 12,7x_4 = -14,4; \\ 23,4x_1 - 14,2x_2 - 5,4x_3 + 2,1x_4 = 6,6; \\ 6,3x_1 - 13,2x_2 - 6,5x_3 + 14,3x_4 = 9,4; \\ 5,6x_1 + 8,8x_2 - 6,7x_3 - 23,8x_4 = 7,3. \end{cases}$$

$$\text{№ 8. } \begin{cases} 1,7x_1 + 10x_2 - 1,3x_3 + 2,1x_4 = 3,1; \\ 3,1x_1 + 1,7x_2 - 2,1x_3 + 5,4x_4 = 2,1; \\ 3,3x_1 - 7,7x_2 + 4,4x_3 - 5,1x_4 = 1,9; \\ 10x_1 - 20,1x_2 + 20,4x_3 + 1,7x_4 = 1,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 9. } \begin{cases} 1,7x_1 - 1,8x_2 + 1,9x_3 - 57,4x_4 = 10; \\ 1,1x_1 - 4,3x_2 + 1,5x_3 - 1,7x_4 = 19; \\ 1,2x_1 + 1,4x_2 + 1,6x_3 + 1,8x_4 = 20; \\ 7,1x_1 - 1,3x_2 - 4,1x_3 + 5,2x_4 = 10. \end{cases}$$

$$\text{№ 10. } \begin{cases} 6,1x_1 + 6,2x_2 - 6,3x_3 + 6,4x_4 = 6,5; \\ 1,1x_1 - 1,5x_2 + 2,2x_3 - 3,8x_4 = 4,2; \\ 5,1x_1 - 5,0x_2 + 4,9x_3 - 4,6x_4 = 4,7; \\ 1,8x_1 + 1,9x_2 + 2,0x_3 - 2,1x_4 = 2,2. \end{cases}$$

$$\text{№ 11. } \begin{cases} 2,2x_1 - 3,1x_2 + 4,2x_3 - 5,1x_4 = 6,01; \\ 1,3x_1 + 2,2x_2 - 1,4x_3 + 1,5x_4 = 10; \\ 6,2x_1 - 7,4x_2 + 8,5x_3 - 9,6x_4 = 1,1; \\ 1,2x_1 + 1,3x_2 + 1,4x_3 + 4,5x_4 = 1,6. \end{cases}$$

$$\text{№ 12. } \begin{cases} 35,8x_1 + 2,1x_2 - 34,5x_3 - 11,8x_4 = 0,5; \\ 27,1x_1 - 7,5x_2 + 11,7x_3 - 23,5x_4 = 12,8; \\ 11,7x_1 + 1,8x_2 - 6,5x_3 + 7,1x_4 = 1,7; \\ 6,3x_1 + 10x_2 + 7,1x_3 + 3,4x_4 = 20,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 13. } \begin{cases} 35,1x_1 + 1,7x_2 + 37,5x_3 - 2,8x_4 = 7,5; \\ 45,2x_1 + 21,1x_2 - 1,1x_3 - 1,2x_4 = 11,1; \\ -21,1x_1 + 31,7x_2 + 1,2x_3 - 1,5x_4 = 2,1; \\ 31,7x_1 + 18,1x_2 - 31,7x_3 + 2,2x_4 = 0,5. \end{cases}$$

$$\text{№ 14. } \begin{cases} 1,1x_1 + 11,2x_2 + 11,1x_3 - 13,1x_4 = 1,3; \\ -3,3x_1 + 1,1x_2 + 30,1x_3 - 20,1x_4 = 1,1; \\ 7,5x_1 + 1,3x_2 + 1,1x_3 + 10x_4 = 20; \\ 1,7x_1 + 7,5x_2 - 1,8x_3 + 2,1x_4 = 1,1. \end{cases}$$

$$\text{№ 15. } \begin{cases} 7,5x_1 + 1,8x_2 - 2,1x_3 - 7,7x_4 = 1,1; \\ -10x_1 + 1,3x_2 - 20x_3 - 1,4x_4 = 1,5; \\ 2,8x_1 - 1,7x_2 + 3,9x_3 + 4,8x_4 = 1,2; \\ 10x_1 + 31,4x_2 - 2,1x_3 - 10x_4 = -1,1. \end{cases}$$

$$\text{№ 16. } \begin{cases} 30,1x_1 - 1,4x_2 + 10x_3 - 1,5x_4 = 10; \\ -17,5x_1 + 11,1x_2 + 1,3x_3 - 7,5x_4 = 1,3; \\ 1,7x_1 - 21,1x_2 + 7,1x_3 - 17,1x_4 = 10; \\ 2,1x_1 + 2,1x_2 + 3,5x_3 + 3,3x_4 = 1,7. \end{cases}$$

$$\text{№ 17. } \begin{cases} 7,3x_1 - 8,1x_2 + 12,7x_3 - 6,7x_4 = 8,8; \\ 11,5x_1 + 6,2x_2 - 8,3x_3 + 9,2x_4 = 21,5; \\ 8,2x_1 - 5,4x_2 + 4,3x_3 - 2,5x_4 = 6,2; \\ 2,4x_1 + 11,5x_2 - 3,3x_3 + 14,2x_4 = -6,2. \end{cases}$$

$$\text{№ 18. } \begin{cases} 4,8x_1 + 12,5x_2 - 6,3x_3 - 9,7x_4 = 3,5; \\ 22x_1 - 31,7x_2 + 12,4x_3 - 8,7x_4 = 4,6; \\ 15x_1 + 21,1x_2 - 4,5x_3 + 14,4x_4 = 15; \\ 8,6x_1 - 14,4x_2 + 6,2x_3 + 2,8x_4 = -1,2. \end{cases}$$

$$\text{№ 19. } \begin{cases} 6,4x_1 + 7,2x_2 - 8,3x_3 + 42x_4 = 2,23; \\ 5,8x_1 - 8,3x_2 + 14,3x_3 - 6,2x_4 = 17,1; \\ 8,6x_1 + 7,7x_2 - 18,3x_3 + 8,8x_4 = -5,4; \\ 13,2x_1 - 5,2x_2 - 6,5x_3 + 12,2x_4 = 6,5. \end{cases}$$

$$\text{№ 20. } \begin{cases} 14,2x_1 + 3,2x_2 - 4,2x_3 + 8,5x_4 = 13,2; \\ 6,3x_1 - 4,3x_2 + 12,7x_3 - 5,8x_4 = -4,4; \\ 8,4x_1 - 22,3x_2 - 5,2x_3 + 4,7x_4 = 6,4; \\ 2,7x_1 + 13,7x_2 + 6,4x_3 - 12,7x_4 = 8,5. \end{cases}$$

$$\text{№ 21. } \begin{cases} 7,3x_1 + 12,4x_2 - 3,8x_3 - 14,3x_4 = 5,8; \\ 10,7x_1 - 7,7x_2 + 12,5x_3 + 6,6x_4 = -6,6; \\ 15,6x_1 + 6,6x_2 + 14,4x_3 - 8,7x_4 = 12,4; \\ 7,5x_1 + 12,2x_2 - 8,3x_3 + 3,7x_4 = 9,2. \end{cases}$$

$$\text{№ 22. } \begin{cases} 13,2x_1 - 8,3x_2 - 4,4x_3 + 6,2x_4 = 6,8; \\ 8,3x_1 + 4,2x_2 - 5,6x_3 + 7,7x_4 = 12,4; \\ 5,8x_1 - 3,7x_2 + 12,4x_3 - 6,2x_4 = 8,7; \\ 3,5x_1 + 6,6x_2 - 13,8x_3 - 9,3x_4 = -10,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 23. } \begin{cases} 8,1x_1 + 1,2x_2 - 9,1x_3 + 1,7x_4 = 10; \\ 1,1x_1 - 1,7x_2 + 7,2x_3 - 3,4x_4 = 1,7; \\ 1,7x_1 - 1,8x_2 + 10x_3 + 2,3x_4 = 2,1; \\ 1,3x_1 + 1,7x_2 - 9,9x_3 + 3,5x_4 = 27,1. \end{cases}$$

$$\text{№ 24. } \begin{cases} 3,3x_1 - 2,2x_2 - 10x_3 + 1,7x_4 = 1,1; \\ 1,8x_1 + 21,1x_2 + 1,3x_3 - 2,2x_4 = 2,2; \\ -10x_1 + 1,1x_2 + 20x_3 - 4,5x_4 = 10; \\ 70x_1 - 1,7x_2 - 2,2x_3 + 3,3x_4 = 2,1. \end{cases}$$

$$\text{№ 25. } \begin{cases} 1,7x_1 + 9,9x_2 - 20x_3 - 1,7x_4 = 1,7; \\ 20x_1 + 0,5x_2 - 30,1x_3 - 1,1x_4 = 2,1; \\ 10x_1 - 20x_2 + 30,2x_3 + 0,5x_4 = 1,8; \\ 3,3x_1 - 0,7x_2 + 3,3x_3 + 20x_4 = -1,7. \end{cases}$$

$$\text{№ 26. } \begin{cases} 1,7x_1 - 1,3x_2 - 1,1x_3 - 1,2x_4 = 2,2; \\ 10x_1 - 10x_2 - 1,3x_3 + 1,3x_4 = 1,1; \\ 3,5x_1 + 3,3x_2 + 1,2x_3 + 1,3x_4 = 1,2; \\ 1,3x_1 + 1,1x_2 - 1,3x_3 - 1,1x_4 = 10. \end{cases}$$

$$\text{№ 27. } \begin{cases} 1,1x_1 + 11,3x_2 - 1,7x_3 + 1,8x_4 = 10; \\ 1,3x_1 - 11,7x_2 + 1,8x_3 + 1,4x_4 = 1,3; \\ 1,1x_1 - 10,5x_2 - 1,7x_3 - 1,5x_4 = 1,1; \\ 1,5x_1 - 0,5x_2 + 1,8x_3 - 1,1x_4 = 10. \end{cases}$$

$$\text{№ 28. } \begin{cases} 1,4x_1 + 2,1x_2 - 3,3x_3 + 1,1x_4 = 10; \\ 10x_1 - 1,7x_2 + 1,1x_3 - 1,5x_4 = 1,7; \\ 2,2x_1 + 34,4x_2 - 1,1x_3 - 1,2x_4 = 20; \\ 1,1x_1 + 1,3x_2 + 1,2x_3 + 1,4x_4 = 1,3. \end{cases}$$

$$\text{№ 29. } \begin{cases} 1,3x_1 - 1,7x_2 + 3,3x_3 + 1,7x_4 = 1,1; \\ 10x_1 + 5,5x_2 - 1,3x_3 + 3,4x_4 = 1,3; \\ 1,1x_1 + 1,8x_2 - 2,2x_3 - 1,1x_4 = 10; \\ 1,3x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 2,2x_4 = 1,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 30. } \begin{cases} 1,2x_1 + 1,8x_2 - 2,2x_3 - 4,1x_4 = 1,3; \\ 10x_1 - 5,1x_2 + 1,2x_3 + 5,5x_4 = 1,2; \\ 2,2x_1 - 30,1x_2 + 3,1x_3 + 5,8x_4 = 10; \\ 10x_1 + 2,4x_2 - 30,5x_3 - 2,2x_4 = 34,1. \end{cases}$$

Пример выполнения задания 3.1

$$\begin{cases} 0,68x_1 + 0,05x_2 - 0,11x_3 + 0,08x_4 = 2,15; \\ 0,21x_1 - 0,13x_2 + 0,27x_3 - 0,08x_4 = 0,44; \\ -0,11x_1 - 0,84x_2 + 0,28x_3 + 0,06x_4 = -0,83; \\ -0,08x_1 + 0,15x_2 - 0,5x_3 - 0,12x_4 = 1,16. \end{cases}$$

Вычисления производим по схеме единственного деления.

Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Контрольные суммы Σ	Строчные суммы Σ'
x_1	x_2	x_3	x_4			
0,68	0,05	-0,11	0,08	2,15	2,85	2,85
0,21	-0,13	0,27	-0,8	0,44	-0,01	-0,01
-0,11	-0,84	0,28	0,06	-0,83	-1,44	-1,44
-0,08	0,15	-0,5	-0,12	1,16	0,61	0,61
1	0,0735	-0,1618	0,1176	3,1618	4,1912	4,1912
2,8264	-0,1454	0,30398	-0,8247	-0,22398	-0,89015	-0,8901
	-0,8319	0,2622	0,0729	-0,4822	-0,97897	-0,97896
	0,1559	-0,5129	-0,1106	1,4129	0,9453	0,9453
	1	-2,0906	5,6719	1,5404	6,1221	6,1217
	-0,3337	-1,47697	4,79139	0,7992	4,1140	4,1136
		-0,18697	-0,9948	1,1723	-0,00913	-0,0095
	1	-3,2441	-0,5411	-2,7854	-2,7851	
	-2,7110	-1,6013	1,0711	-0,5299	-0,5302	
1	-0,6689	-0,6689	0,3309	0,3311		
1	-0,6689					
3,8263	0,6664	-1,7119	0,3309			

Ответ: $x_1 = 2,286$; $x_2 = -0,334$; $x_3 = -2,711$; $x_4 = -0,669$.

Практическое задание 3.2

Решение системы линейных уравнений методом главных элементов

Решить систему линейных уравнений методом главных элементов с точностью до 0,001.

$$\text{№ 1.} \quad \begin{cases} 0,34x_1 + 0,71x_2 + 0,63x_3 = 2,08; \\ 0,71x_1 - 0,65x_2 - 0,18x_3 = 0,17; \\ 1,17x_1 - 2,35x_2 + 0,75x_3 = 1,28. \end{cases}$$

$$\text{№ 2. } \begin{cases} 3,75x_1 - 0,28x_2 + 0,17x_3 = 0,75; \\ 2,11x_1 - 0,11x_2 - 0,12x_3 = 1,11; \\ 0,22x_1 - 3,17x_2 + 1,81x_3 = 0,05. \end{cases}$$

$$\text{№ 3. } \begin{cases} 0,21x_1 - 0,18x_2 + 0,75x_3 = 0,11; \\ 0,13x_1 + 0,75x_2 - 0,11x_3 = 2,00; \\ 3,01x_1 - 0,33x_2 + 0,11x_3 = 0,13. \end{cases}$$

$$\text{№ 4. } \begin{cases} 0,13x_1 - 0,14x_2 - 2,00x_3 = 0,15; \\ 0,75x_1 + 0,18x_2 - 0,77x_3 = 0,11; \\ 0,28x_1 - 0,17x_2 + 0,39x_3 = 0,12. \end{cases}$$

$$\text{№ 5. } \begin{cases} 3,01x_1 - 0,14x_2 - 0,15x_3 = 1,00; \\ 1,11x_1 + 0,13x_2 - 0,75x_3 = 0,13; \\ 0,17x_1 - 2,11x_2 + 0,71x_3 = 0,17. \end{cases}$$

$$\text{№ 6. } \begin{cases} 0,92x_1 - 0,83x_2 + 0,62x_3 = 2,15; \\ 0,24x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 = 0,62; \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 - 0,67x_3 = 0,88. \end{cases}$$

$$\text{№ 7. } \begin{cases} 1,24x_1 - 0,87x_2 - 3,17x_3 = 0,46; \\ 2,11x_1 - 0,45x_2 + 1,44x_3 = 1,50; \\ 0,48x_1 + 1,25x_2 - 0,63x_3 = 0,35. \end{cases}$$

$$\text{№ 8. } \begin{cases} 0,64x_1 - 0,83x_2 + 4,2x_3 = 2,23; \\ 0,58x_1 - 0,83x_2 + 1,43x_3 = 1,71; \\ 0,86x_1 + 0,77x_2 + 0,88x_3 = 0,54. \end{cases}$$

$$\text{№ 9. } \begin{cases} 0,32x_1 - 0,42x_2 + 0,85x_3 = 1,32; \\ 0,63x_1 - 1,43x_2 - 0,58x_3 = -0,44; \\ 0,84x_1 - 2,23x_2 - 0,52x_3 = 0,64. \end{cases}$$

$$\text{№ 10. } \begin{cases} 0,73x_1 + 1,24x_2 - 0,38x_3 = 0,58; \\ 1,25x_1 + 0,66x_2 - 0,78x_3 = 0,66; \\ 0,75x_1 + 1,22x_2 - 0,83x_3 = 0,92. \end{cases}$$

$$\text{№ 11. } \begin{cases} 0,62x_1 - 0,44x_2 - 0,86x_3 = 0,68; \\ 0,83x_1 + 0,42x_2 - 0,56x_3 = 1,24; \\ 0,58x_1 - 0,37x_2 - 0,62x_3 = 0,87. \end{cases}$$

$$\text{№ 12. } \begin{cases} 1,26x_1 - 2,34x_2 + 1,17x_3 = 3,14; \\ 0,75x_1 + 1,24x_2 - 0,48x_3 = -1,17; \\ 3,44x_1 - 1,85x_2 + 1,16x_3 = 1,83. \end{cases}$$

$$\text{№ 13. } \begin{cases} 0,46x_1 + 1,72x_2 + 2,53x_3 = 2,44; \\ 1,53x_1 - 2,32x_2 - 1,83x_3 = 2,83; \\ 0,75x_1 + 0,86x_2 + 3,72x_3 = 1,06. \end{cases}$$

$$\text{№ 14. } \begin{cases} 2,47x_1 + 0,65x_2 - 1,18x_3 = 1,24; \\ 1,34x_1 + 1,17x_2 + 2,54x_3 = 2,35; \\ 0,86x_1 - 1,73x_2 - 1,08x_3 = 3,15. \end{cases}$$

$$\text{№ 15. } \begin{cases} 4,24x_1 + 2,73x_2 - 1,55x_3 = 1,87; \\ 2,34x_1 + 1,27x_2 + 3,15x_3 = 2,16; \\ 3,05x_1 - 1,05x_2 - 0,63x_3 = -1,25. \end{cases}$$

$$\text{№ 16. } \begin{cases} 0,43x_1 + 1,24x_2 - 0,58x_3 = 2,71; \\ 0,74x_1 + 0,83x_2 + 1,17x_3 = 1,26; \\ 1,43x_1 - 1,58x_2 + 0,83x_3 = 1,03. \end{cases}$$

$$\text{№ 17. } \begin{cases} 0,43x_1 + 0,63x_2 + 1,44x_3 = 2,18; \\ 1,64x_1 - 0,83x_2 - 2,45x_3 = 1,84; \\ 0,58x_1 + 1,55x_2 + 3,18x_3 = 0,74. \end{cases}$$

$$\text{№ 18. } \begin{cases} 1,24x_1 + 0,62x_2 - 0,95x_3 = 1,43; \\ 2,15x_1 - 1,18x_2 + 0,57x_3 = 2,43; \\ 1,72x_1 - 0,83x_2 + 1,57x_3 = 3,88. \end{cases}$$

$$\text{№ 19. } \begin{cases} 0,62x_1 + 0,56x_2 - 0,43x_3 = 1,16; \\ 1,32x_1 - 0,88x_2 + 1,76x_3 = 2,07; \\ 0,73x_1 + 1,42x_2 - 0,34x_3 = 2,18. \end{cases}$$

$$\text{№ 20. } \begin{cases} 1,06x_1 + 0,34x_2 + 1,26x_3 = 1,17; \\ 2,54x_1 - 1,16x_2 + 0,55x_3 = 2,23; \\ 1,34x_1 - 0,47x_2 - 0,83x_3 = 3,26. \end{cases}$$

$$\text{№ 21. } \begin{cases} 3,15x_1 - 1,72x_2 - 1,23x_3 = 2,15; \\ 0,72x_1 + 0,67x_2 + 1,18x_3 = 1,43; \\ 2,57x_1 - 1,34x_2 - 0,68x_3 = 1,03. \end{cases}$$

$$\text{№ 22. } \begin{cases} 1,73x_1 - 0,83x_2 + 1,82x_3 = 0,36; \\ 0,27x_1 + 0,53x_2 - 0,64x_3 = 1,23; \\ 0,56x_1 - 0,48x_2 + 1,95x_3 = -0,76. \end{cases}$$

$$\text{№ 23. } \begin{cases} 0,95x_1 + 0,72x_2 - 1,14x_3 = 2,15; \\ 0,63x_1 + 0,24x_2 + 0,38x_3 = 0,74; \\ 1,23x_1 - 1,08x_2 - 1,16x_3 = 0,97. \end{cases}$$

$$\text{№ 24. } \begin{cases} 2,18x_1 + 1,72x_2 - 0,93x_3 = 1,06; \\ 1,42x_1 + 0,18x_2 + 1,12x_3 = 2,07; \\ 0,92x_1 - 1,14x_2 - 2,53x_3 = -0,45. \end{cases}$$

$$\text{№ 25. } \begin{cases} 2,23x_1 - 0,73x_2 + 1,27x_3 = 2,43; \\ 2,15x_1 + 3,17x_2 - 1,43x_3 = -0,73; \\ 0,83x_1 + 0,72x_2 + 2,12x_3 = 1,42. \end{cases}$$

$$\text{№ 26. } \begin{cases} 0,65x_1 - 0,93x_2 + 0,45x_3 = -0,72; \\ 1,15x_1 + 0,43x_2 - 0,72x_3 = 1,24; \\ 0,56x_1 - 0,18x_2 + 1,03x_3 = 2,15. \end{cases}$$

$$\text{№ 27. } \begin{cases} 1,16x_1 - 0,28x_2 + 2,16x_3 = 1,16; \\ 0,65x_1 + 0,76x_2 - 1,18x_3 = 0,28; \\ 0,53x_1 + 1,07x_2 - 0,63x_3 = 1,27. \end{cases}$$

$$\text{№ 28. } \begin{cases} 2,16x_1 - 2,83x_2 + 1,15x_3 = 2,32; \\ 1,71x_1 + 2,17x_2 - 0,83x_3 = 1,25; \\ 0,35x_1 - 0,72x_2 + 1,03x_3 = 0,82. \end{cases}$$

$$\text{№ 29. } \begin{cases} 1,02x_1 + 0,72x_2 - 0,65x_3 = 1,27; \\ 0,74x_1 - 1,24x_2 - 1,73x_3 = 0,77; \\ 1,78x_1 + 2,32x_2 + 0,74x_3 = 1,12. \end{cases}$$

$$\text{№ 30. } \begin{cases} 1,53x_1 - 1,63x_2 - 0,76x_3 = 2,18; \\ 0,86x_1 + 1,17x_2 + 1,84x_3 = 1,95; \\ 0,32x_1 - 0,65x_2 + 1,11x_3 = -0,47. \end{cases}$$

Пример выполнения задания 3.2

$$\begin{cases} 2,74x_1 - 1,18x_2 + 3,17x_3 = 2,18; \\ 1,12x_1 + 0,83x_2 - 2,16x_3 = -1,15; \\ 0,18x_1 + 1,27x_2 + 0,76x_3 = 3,23. \end{cases}$$

Вычисления производим по следующей схеме.

m_1	Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	Σ	Σ'
	x_1	x_2	x_3			
-1	2,74	-1,18	3,17	2,18	6,91	6,91
0,6814	1,12	0,83	-2,16	-1,15	-1,36	-1,36
-0,2397	0,18	1,27	0,76	3,23	5,44	5,44
-1	2,9870	0,0259		0,3355	3,3485	3,3484
0,1596	-0,4768	1,5528		2,7075	3,7837	3,7835
		1,5569		2,7601	4,3181	4,3170
	0,0970	1,7728	1,2638			
	1,9070	2,7735	2,2638			

$$x_2 = \frac{2,7602}{1,5569} = 1,7728;$$

$$x_2 = \frac{4,3181}{1,5569} = 2,7735;$$

$$x_1 = \frac{0,3355 - 0,0259 \cdot 1,7728}{2,9870} = 0,0970;$$

$$x_1 = \frac{0,3485 - 0,0259 \cdot 2,7735}{2,9870} = 1,0970;$$

$$x_3 = \frac{2,18 - 2,74 \cdot 0,0970 + 1,18 \cdot 1,7728}{3,17} = 1,2638;$$

$$\bar{x}_3 = \frac{6,91 - 2,74 \cdot 1,0970 + 1,18 \cdot 2,7728}{3,17} = 2,2638.$$

Ответ: $x_1 \approx 0,097$; $x_2 \approx 1,773$; $x_3 \approx 1,264$.

Практическое задание 3.3

Решение системы линейных уравнений методом итераций

Методом итераций решить систему линейных уравнений с точностью до 0,001, предварительно оценив число необходимых для этого шагов.

$$\text{№ 1.} \begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,04x_2 + 0,21x_3 - 0,18x_4 + 1,24; \\ x_2 = 0,45x_1 - 0,23x_2 + 0,06x_3 - 0,88; \\ x_3 = 0,26x_1 + 0,34x_2 - 0,11x_3 + 0,62; \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,26x_2 + 0,34x_3 - 0,12x_4 - 1,17. \end{cases}$$

$$\text{№ 2.} \begin{cases} x_1 = 0,21x_1 + 0,12x_2 - 0,34x_3 - 0,16x_4 - 0,64; \\ x_2 = 0,34x_1 - 0,08x_2 + 0,17x_3 - 0,18x_4 + 1,42; \\ x_3 = 0,16x_1 + 0,34x_2 + 0,15x_3 - 0,31x_4 - 0,42; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,26x_2 - 0,08x_3 + 0,25x_4 + 0,83. \end{cases}$$

$$\text{№ 3.} \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,18x_2 + 0,02x_3 + 0,21x_4 + 1,83; \\ x_2 = 0,16x_1 + 0,12x_2 - 0,14x_3 + 0,27x_4 - 0,65; \\ x_3 = 0,37x_1 + 0,27x_2 - 0,02x_3 - 0,24x_4 + 2,23; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,21x_2 - 0,18x_3 + 0,25x_4 - 1,13. \end{cases}$$

$$\text{№ 4.} \begin{cases} x_1 = 0,42x_1 - 0,32x_2 - 0,03x_3 + 0,44; \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,26x_2 - 0,36x_3 + 1,42; \\ x_3 = 0,12x_1 - 0,08x_2 + 0,14x_3 - 0,24x_4 - 0,83; \\ x_4 = 0,15x_1 + 0,35x_2 + 0,18x_3 + 1,42. \end{cases}$$

$$\text{№ 5.} \begin{cases} x_1 = 0,18x_1 - 0,34x_2 - 0,12x_3 + 0,15x_4 - 0,64; \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,23x_2 - 0,15x_3 + 0,32x_4 + 1,42; \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,12x_2 + 0,14x_3 - 0,18x_4 - 0,42; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,08x_2 + 0,06x_3 + 0,57. \end{cases}$$

$$\text{№ 6. } \begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,23x_2 - 0,44x_3 - 0,05x_4 + 1,24; \\ x_2 = 0,24x_1 - 0,31x_3 + 0,15x_4 - 0,18; \\ x_3 = 0,06x_1 + 0,15x_2 - 0,23x_4 + 1,44; \\ x_4 = 0,72x_1 - 0,08x_2 - 0,05x_3 + 2,42. \end{cases}$$

$$\text{№ 7. } \begin{cases} x_1 = 0,17x_1 + 0,31x_2 - 0,18x_3 + 0,22x_4 - 1,71; \\ x_2 = -0,21x_1 + 0,33x_3 + 0,22x_4 + 0,62; \\ x_3 = 0,32x_1 - 0,18x_2 + 0,05x_3 - 0,19x_4 - 0,89; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,28x_2 - 0,14x_3 + 0,94. \end{cases}$$

$$\text{№ 8. } \begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,27x_2 - 0,22x_3 - 0,18x_4 + 1,21; \\ x_2 = -0,21x_1 - 0,45x_3 + 0,18x_4 - 0,33; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,13x_2 - 0,33x_3 + 0,18x_4 - 0,48; \\ x_4 = 0,33x_1 - 0,05x_2 + 0,06x_3 - 0,28x_4 - 0,17. \end{cases}$$

$$\text{№ 9. } \begin{cases} x_1 = 0,19x_1 - 0,07x_2 + 0,38x_3 - 0,21x_4 - 0,81; \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,08x_2 + 0,11x_3 + 0,33x_4 - 0,64; \\ x_3 = 0,51x_1 - 0,07x_2 + 0,09x_3 - 0,111x_4 + 1,71; \\ x_4 = 0,33x_1 - 0,41x_2 - 1,21. \end{cases}$$

$$\text{№ 10. } \begin{cases} x_1 = 0,22x_2 - 0,11x_3 + 0,31x_4 + 2,7; \\ x_2 = 0,38x_1 - 0,12x_3 + 0,22x_4 - 1,5; \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,23x_2 - 0,51x_4 + 1,2; \\ x_4 = 0,17x_1 - 0,21x_2 + 0,31x_3 - 0,17. \end{cases}$$

$$\text{№ 11. } \begin{cases} x_1 = 0,07x_1 - 0,08x_2 + 0,11x_3 - 0,18x_3 - 0,51; \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,52x_2 + 0,21x_4 + 1,17; \\ x_3 = 0,13x_1 + 0,31x_2 - 0,21x_4 - 1,02; \\ x_4 = 0,08x_1 - 0,33x_3 + 0,28x_4 - 0,28. \end{cases}$$

$$\text{№ 12. } \begin{cases} x_1 = 0,05x_1 - 0,06x_2 - 0,12x_3 + 0,14x_4 - 2,17; \\ x_2 = 0,04x_1 - 0,12x_2 + 0,08x_3 + 0,11x_4 + 1,4; \\ x_3 = 0,34x_1 + 0,08x_2 - 0,06x_3 + 0,14x_4 - 2,1; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,12x_2 - 0,03x_4 - 0,8. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{№ 13.} & \begin{cases} x_1 = 0,08x_1 - 0,03x_2 - 0,04x_4 - 1,2; \\ x_2 = 0,31x_2 + 0,27x_3 - 0,08x_4 + 0,81; \\ x_3 = 0,33x_1 - 0,07x_3 + 0,21x_4 - 0,92; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,03x_3 + 0,58x_4 + 0,17. \end{cases} \\ \text{№ 14.} & \begin{cases} x_1 = 0,12x_1 - 0,23x_2 + 0,25x_3 - 0,16x_3 + 1,24; \\ x_2 = 0,14x_1 + 0,34x_2 - 0,18x_3 + 0,24x_3 - 0,89; \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,03x_2 + 0,16x_3 - 0,32x_3 + 1,15; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,05x_2 + 0,15x_4 - 0,57. \end{cases} \\ \text{№ 15.} & \begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,14x_2 + 0,25x_3 - 0,16x_3 + 1,21; \\ x_2 = 0,12x_1 + 0,32x_3 - 0,18x_4 - 0,24; \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,03x_2 + 0,16x_3 + 0,32x_3 - 0,58; \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,22x_2 + 0,14x_3 + 1,56. \end{cases} \\ \text{№ 16.} & \begin{cases} x_1 = 0,14x_1 + 0,23x_2 + 0,18x_3 - 0,17x_4 - 1,42; \\ x_2 = 0,12x_1 - 0,14x_2 + 0,08x_3 - 0,09x_4 - 0,83; \\ x_3 = 0,16x_1 + 0,24x_2 - 0,35x_4 + 1,21; \\ x_4 = 0,23x_1 - 0,08x_2 + 0,05x_3 - 0,25x_4 + 0,65. \end{cases} \\ \text{№ 17.} & \begin{cases} x_1 = 0,24x_1 + 0,21x_2 - 0,18x_3 - 0,17x_4 + 1,42; \\ x_2 = 0,05x_1 - 0,32x_3 + 0,12x_4 - 0,57; \\ x_3 = 0,35x_1 + 0,24x_2 - 0,35x_4 + 0,68; \\ x_4 = 0,23x_1 + 0,08x_2 + 0,05x_3 + 0,25x_4 - 0,65. \end{cases} \\ \text{№ 18.} & \begin{cases} x_1 = 0,17x_1 + 0,27x_2 - 0,13x_3 - 0,11x_4 - 1,42; \\ x_2 = 0,13x_1 - 0,12x_2 + 0,09x_3 - 0,06x_4 + 0,48; \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,05x_2 - 0,02x_3 + 0,12x_4 - 2,34; \\ x_4 = 0,13x_1 + 0,18x_2 + 0,24x_3 + 0,43x_4 + 0,72. \end{cases} \\ \text{№ 19.} & \begin{cases} x_1 = 0,15x_1 + 0,05x_2 - 0,08x_3 + 0,14x_4 - 0,48; \\ x_2 = 0,32x_1 - 0,13x_2 - 0,12x_3 + 0,11x_4 + 1,24; \\ x_3 = 0,17x_1 + 0,06x_2 - 0,08x_3 + 0,12x_4 + 1,15; \\ x_4 = 0,21x_1 - 0,16x_2 + 0,36x_3 - 0,88. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{№ 20. } \begin{cases} x_1 = 0,28x_2 - 0,17x_3 + 0,06x_4 + 0,21; \\ x_2 = 0,52x_1 + 0,12x_3 + 0,17x_4 - 1,17; \\ x_3 = 0,17x_1 - 0,18x_2 + 0,21x_3 - 0,81; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,22x_2 + 0,03x_3 + 0,05x_4 + 0,72. \end{cases}$$

$$\text{№ 21. } \begin{cases} x_1 = 0,52x_2 + 0,08x_3 - 0,13x_4 - 0,22; \\ x_2 = 0,07x_1 - 0,38x_2 + 0,05x_3 - 0,41x_4 + 1,8; \\ x_3 = 0,04x_1 + 0,42x_2 - 0,11x_3 + 0,07x_4 - 1,3; \\ x_4 = 0,17x_1 + 0,18x_2 + 0,13x_3 + 0,19x_4 + 0,33. \end{cases}$$

$$\text{№ 22. } \begin{cases} x_1 = 0,01x_1 + 0,02x_2 - 0,62x_3 + 0,08x_4 - 1,3; \\ x_2 = 0,03x_1 + 0,28x_2 + 0,33x_3 - 0,07x_4 + 1,1; \\ x_3 = 0,09x_1 + 0,13x_2 + 0,42x_3 + 0,28x_4 - 1,7; \\ x_4 = 0,19x_1 - 0,23x_2 + 0,08x_3 + 0,37x_4 + 1,5. \end{cases}$$

$$\text{№ 23. } \begin{cases} x_1 = 0,17x_2 - 0,33x_3 + 0,18x_4 - 1,2; \\ x_2 = 0,18x_2 + 0,43x_3 - 0,08x_4 + 0,33; \\ x_3 = 0,22x_1 + 0,18x_2 - 0,21x_3 + 0,07x_4 + 1,3; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,07x_2 + 0,21x_3 + 0,04x_4 - 1,2. \end{cases}$$

$$\text{№ 24. } \begin{cases} x_1 = 0,03x_1 - 0,05x_2 + 0,22x_3 - 0,33x_4 + 0,43; \\ x_2 = 0,22x_1 + 0,55x_2 - 0,08x_3 + 0,07x_4 - 1,8; \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,13x_2 - 0,08x_3 - 0,18x_4 - 0,8; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,17x_2 + 0,29x_3 + 0,33x_4 + 1,7. \end{cases}$$

$$\text{№ 25. } \begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,22x_2 - 0,33x_3 + 0,07x_4 + 0,11; \\ x_2 = 0,45x_2 - 0,23x_3 + 0,07x_4 - 0,33; \\ x_3 = 0,11x_1 - 0,08x_3 + 0,18x_4 + 0,85; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,14x_2 + 0,33x_3 + 0,21x_4 - 1,7. \end{cases}$$

$$\text{№ 26. } \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,16x_2 - 0,08x_3 + 0,15x_4 + 2,42; \\ x_2 = 0,16x_1 - 0,23x_2 + 0,11x_3 - 0,21x_4 + 1,43; \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,08x_2 + 0,34x_4 - 1,16; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,14x_2 - 0,18x_3 + 0,06x_4 + 1,62. \end{cases}$$

$$\text{№ 27.} \begin{cases} x_1 = 0,08x_2 - 0,23x_3 + 0,32x_4 + 1,34; \\ x_2 = 0,16x_1 - 0,23x_2 + 0,18x_3 + 0,16x_4 - 2,33; \\ x_3 = 0,15x_1 + 0,12x_2 + 0,32x_3 - 0,18x_4 + 0,34; \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,21x_2 - 0,16x_3 + 0,03x_4 + 0,63. \end{cases}$$

$$\text{№ 28.} \begin{cases} x_1 = 0,06x_1 + 0,18x_2 + 0,33x_3 + 0,16x_4 + 2,43; \\ x_2 = 0,32x_1 + 0,23x_3 - 0,05x_4 - 1,12; \\ x_3 = 0,16x_1 - 0,08x_2 - 0,12x_4 + 0,43; \\ x_4 = 0,09x_1 + 0,22x_2 - 0,13x_3 + 0,83. \end{cases}$$

$$\text{№ 29.} \begin{cases} x_1 = 0,34x_2 - 0,23x_3 + 0,06x_4 + 1,42; \\ x_2 = 0,11x_1 - 0,23x_2 + 0,18x_3 + 0,36x_4 - 0,66; \\ x_3 = 0,23x_1 + 0,12x_2 + 0,16x_3 - 0,35x_4 + 1,08; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,12x_2 - 0,47x_3 + 0,18x_4 + 1,72. \end{cases}$$

$$\text{№ 30.} \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,23x_2 + 0,11x_3 - 0,06x_4 + 0,67; \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,12x_2 - 0,33x_3 - 0,88; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,32x_2 - 0,05x_3 + 0,35x_4 - 0,18; \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,11x_2 + 0,09x_3 - 0,18x_4 + 1,44. \end{cases}$$

Пример выполнения задания 3.3

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 + 0,05x_2 + 0,11x_3 + 0,08x_4 + 2,15; \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,16x_2 - 0,28x_3 + 0,06x_4 + 0,83; \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,15x_2 - 0,12x_3 + 1,16; \\ x_4 = -0,21x_1 + 0,13x_2 - 0,27x_3 + 0,44. \end{cases}$$

Число шагов, дающих наверняка ответ с точностью до 0,001, определим с помощью соотношения

$$\|X^* - X^k\| \leq \frac{\|A\|^{k-1}}{1 - \|A\|} \|F\| \leq 0,001.$$

Здесь $\|A\|_1 = \max\{0,56; 0,61; 0,35; 0,61\} < 1$; значит, итерационный процесс сходится; $\|F\|_1 = 2,15$. Имеем

$$\frac{0,61^{k+1}}{0,39} \cdot 2,15 < 0,001; \quad 0,61^{k+1} < \frac{0,01 \cdot 0,39}{2,15},$$

$$(k+1) \cdot \lg 0,61 < -3 + \lg 0,39 - \lg 2,15,$$

$$k+1 > \frac{-3 + 1,5911 - 0,3324}{1,7853} = \frac{3,7413}{0,2147} = 17,5; \quad k \geq 17.$$

Вычисления располагаем в таблице.

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	2,15	-0,83	1,16	0,44
1	2,9719	-1,0775	1,5093	-0,4326
2	2,3555	-1,0721	1,5075	-0,7317
3	3,5017	-1,0106	1,5015	-0,8111
4	3,5511	-0,9277	1,4944	-0,8321
5	3,5637	-0,9563	1,4834	-0,8298
6	3,5678	-0,9566	1,4890	-0,8332
7	3,5700	-0,9575	1,4889	-0,8356
8	3,5709	-0,9573	1,4890	-0,8362
9	3,5712	-0,9571	1,4889	-0,8364
10	3,5713	-0,9570	1,4890	-0,8364

Сходимость в тысячных долях имеет место уже на 10-м шаге.

Ответ: $x_1 \approx 3,571$; $x_2 \approx -0,957$; $x_3 \approx 1,489$; $x_4 \approx -0,836$.

Практическое задание 3.4

Решение системы линейных уравнений методом Зейделя

Методом Зейделя решить с точностью до 0,001 систему линейных уравнений, приведя ее к виду, удобному для итерации.

$$\text{№ 1.} \quad \begin{cases} 2,7x_1 + 3,3x_2 + 1,3x_3 = 2,1; \\ 3,5x_1 - 1,7x_2 + 2,8x_3 = 1,7; \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 - 1,7x_3 = 0,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 2.} \quad \begin{cases} 1,7x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,7; \\ 2,1x_1 + 3,4x_2 + 1,8x_3 = 1,1; \\ 4,2x_1 - 1,7x_2 + 1,3x_3 = 2,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 3.} \quad \begin{cases} 3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,2; \\ 1,9x_1 + 3,1x_2 + 2,1x_3 = 2,1; \\ 7,5x_1 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,6. \end{cases}$$

$$\text{№ 4.} \quad \begin{cases} 9,1x_1 + 5,6x_2 + 7,8x_3 = 9,8; \\ 3,8x_1 + 5,1x_2 + 2,8x_3 = 6,7; \\ 4,1x_1 + 5,7x_2 + 1,2x_3 = 5,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 5.} \quad \begin{cases} 3,3x_1 + 2,1x_2 + 2,8x_3 = 0,8; \\ 4,1x_1 + 3,7x_2 + 4,8x_3 = 5,7; \\ 2,7x_1 + 1,8x_2 + 1,1x_3 = 3,2. \end{cases}$$

$$\text{№ 6.} \quad \begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,1; \\ 3,8x_1 + 4,1x_2 + 2,7x_3 = 9,7; \\ 2,9x_1 + 2,1x_2 + 3,8x_3 = 7,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 7.} \quad \begin{cases} 3,2x_1 - 2,5x_2 + 3,7x_3 = 6,5; \\ 0,5x_1 + 0,34x_2 + 1,7x_3 = -0,24; \\ 1,6x_1 + 2,3x_2 - 1,5x_3 = 4,3. \end{cases}$$

$$\text{№ 8.} \quad \begin{cases} 5,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = -3,5; \\ 4,2x_1 + 1,7x_2 - 2,3x_3 = 2,7; \\ 3,4x_1 + 2,4x_2 + 7,4x_3 = 1,9. \end{cases}$$

$$\text{№ 9.} \quad \begin{cases} 3,6x_1 + 1,8x_2 - 4,7x_3 = 3,8; \\ 2,7x_1 - 3,6x_2 + 1,9x_3 = 0,4; \\ 1,5x_1 + 4,5x_2 + 3,3x_3 = -1,6. \end{cases}$$

$$\text{№ 10.} \quad \begin{cases} 5,6x_1 + 2,7x_2 - 1,7x_3 = 1,9; \\ 3,4x_1 - 3,6x_2 - 6,7x_3 = -2,4; \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 + 3,7x_3 = 1,2. \end{cases}$$

$$\text{№ 11.} \quad \begin{cases} 2,7x_1 + 0,9x_2 - 1,5x_3 = 2,1; \\ 3,5x_1 - 1,7x_2 + 2,8x_3 = 1,7; \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 + 1,7x_3 = 0,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 12. } \begin{cases} 4,5x_1 - 3,5x_2 + 7,4x_3 = 2,5; \\ 3,1x_1 - 0,6x_2 - 2,3x_3 = -1,5; \\ 0,8x_1 + 7,4x_2 + 0,5x_3 = 6,4. \end{cases}$$

$$\text{№ 13. } \begin{cases} 3,8x_1 + 6,7x_2 - 1,2x_3 = 5,2; \\ 6,4x_1 + 1,3x_2 - 2,7x_3 = 3,8; \\ 2,4x_1 - 4,5x_2 + 3,5x_3 = -0,6. \end{cases}$$

$$\text{№ 14. } \begin{cases} 5,4x_1 - 6,2x_2 - 0,5x_3 = 0,52; \\ 3,4x_1 + 2,3x_2 + 0,8x_3 = -0,8; \\ 2,4x_1 - 1,1x_2 + 3,8x_3 = 1,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 15. } \begin{cases} 7,8x_1 + 5,3x_2 + 4,8x_3 = 1,8; \\ 3,3x_1 + 1,1x_2 + 1,8x_3 = 2,3; \\ 4,5x_1 + 3,3x_2 + 2,8x_3 = 3,4. \end{cases}$$

$$\text{№ 16. } \begin{cases} 3,8x_1 + 4,1x_2 - 2,3x_3 = 4,8; \\ -2,1x_1 + 3,9x_2 - 5,8x_3 = 3,3; \\ 1,8x_1 + 1,1x_2 - 2,1x_3 = 5,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 17. } \begin{cases} 1,7x_1 + 2,2x_2 + 3,0x_3 = 1,8; \\ 2,1x_1 + 1,9x_2 - 2,3x_3 = 2,8; \\ 4,2x_1 + 3,9x_2 - 3,1x_3 = 5,1. \end{cases}$$

$$\text{№ 18. } \begin{cases} 2,8x_1 + 3,8x_2 + 3,2x_3 = 4,5; \\ 2,5x_1 - 2,8x_2 + 3,3x_3 = 7,1; \\ 6,5x_1 - 7,1x_2 + 4,8x_3 = 6,3. \end{cases}$$

$$\text{№ 19. } \begin{cases} 3,3x_1 + 3,7x_2 + 4,2x_3 = 5,8; \\ 2,7x_1 + 2,3x_2 - 2,9x_3 = 6,1; \\ 4,1x_1 + 4,8x_2 - 5,0x_3 = 7,0. \end{cases}$$

$$\text{№ 20. } \begin{cases} 7,1x_1 + 6,8x_2 + 6,1x_3 = 7,0; \\ 5,0x_1 + 4,8x_2 + 5,3x_3 = 6,1; \\ 8,2x_1 + 7,8x_2 + 7,1x_3 = 5,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 21. } \begin{cases} 3,7x_1 + 3,1x_2 + 4,0x_3 = 5,0; \\ 4,1x_1 + 4,5x_2 - 4,8x_3 = 4,9; \\ -2,1x_1 - 3,7x_2 + 1,8x_3 = 2,7. \end{cases}$$

$$\text{№ 22. } \begin{cases} 4,1x_1 + 5,2x_2 + 5,8x_3 = 7,0; \\ 3,8x_1 + 3,1x_2 + 4,0x_3 = 5,3; \\ 7,8x_1 + 5,3x_2 + 6,3x_3 = 5,8. \end{cases}$$

$$\text{№ 23. } \begin{cases} 3,7x_1 - 2,3x_2 + 4,5x_3 = 2,4; \\ 2,5x_1 + 4,7x_2 - 7,8x_3 = 3,5; \\ 1,6x_1 + 5,3x_2 + 1,3x_3 = -2,4. \end{cases}$$

$$\text{№ 24. } \begin{cases} 6,3x_1 + 5,2x_2 - 0,6x_3 = 1,5; \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = 2,7; \\ 0,8x_1 + 1,4x_2 + 3,5x_3 = -2,3. \end{cases}$$

$$\text{№ 25. } \begin{cases} 1,5x_1 + 2,3x_2 - 3,7x_3 = 4,5; \\ 2,8x_1 + 3,4x_2 + 5,8x_3 = -3,2; \\ 1,2x_1 + 7,3x_2 - 2,3x_3 = 5,6. \end{cases}$$

$$\text{№ 26. } \begin{cases} 0,9x_1 + 2,7x_2 - 3,8x_3 = 2,4; \\ 2,5x_1 + 5,8x_2 - 0,5x_3 = 3,5; \\ 4,5x_1 - 2,1x_2 + 3,2x_3 = -1,2. \end{cases}$$

$$\text{№ 27. } \begin{cases} 2,4x_1 + 2,5x_2 - 2,9x_3 = 4,5; \\ 0,8x_1 + 3,5x_2 - 1,4x_3 = 3,2; \\ 1,5x_1 - 2,3x_2 + 8,6x_3 = -5,5. \end{cases}$$

$$\text{№ 28. } \begin{cases} 5,4x_1 - 2,4x_2 + 3,8x_3 = 2,1; \\ 2,5x_1 + 6,8x_2 - 1,1x_3 = 4,3; \\ 2,7x_1 - 0,6x_2 + 1,5x_3 = -3,5. \end{cases}$$

$$\text{№ 29. } \begin{cases} 2,4x_1 + 3,7x_2 - 8,3x_3 = 2,3; \\ 1,8x_1 + 4,3x_2 + 1,2x_3 = -1,2; \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 5,2x_3 = 3,5. \end{cases}$$

$$\text{№ 30. } \begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8; \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5; \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5. \end{cases}$$

Пример выполнения задания 3.4

$$\begin{cases} 4,5x_1 - 1,8x_2 + 3,6x_3 = -1,7 & (I); \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 + 1,2x_3 = 3,6 & (II); \\ 1x_1 + 2,5x_2 + 4,6x_3 = 2,2 & (III). \end{cases}$$

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк.

$$\begin{cases} 7,6x_1 - 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 & (I + II); \\ 2,4x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 & (2III + II - I); \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4 & (III); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = 2,4x_1 + 0,5x_2 - 2,4x_3 + 1,9; \\ 10x_2 = -2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3 + 9,7; \\ 10x_3 = 1,3x_1 + 0,2x_2 - 4,2x_3 + 1,4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,24x_1 + 0,05x_2 - 0,2,4x_3 + 0,19; \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 + 0,97; \\ x_3 = 0,13x_1 + 0,02x_2 - 0,42x_3 + 0,14. \end{cases}$$

Норма $\|A\|_1$ матрицы, состоящей из коэффициентов при неизвестных в правых частях уравнений, равна $\{0,53; 0,77; 0,57\} = 0,77 < 1$; значит, процесс Зейделя сходится. Вычисления располагаем в таблице.

N	x_1	x_2	x_3	N	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	-0,14	5	0,2467	1,1138	-0,223
1	0,2207	1,0703	-0,1915	6	0,2472	1,1143	-0,224
2	0,2354	1,0988	-0,2118	7	0,2474	1,1145	-0,224
3	0,2424	1,1088	-0,2196	8	0,2475	1,1145	-0,224
4	0,2454	1,1124	-0,2225				

Ответ: $x_1 \approx 0,248$; $x_2 \approx 1,115$; $x_3 \approx -0,224$.

ГЛАВА 4

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Первая интерполяционная формула Ньютона

Узлы интерполяции называются равноотстоящими, если $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = \text{const}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Первая интерполяционная формула Ньютона имеет вид

$$y = P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots \\ \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (4.1)$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Заметим, что в формуле используется верхняя горизонтальная строка таблицы разностей.

Остаточный член $R_n(x)$ формулы (4.1) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

При наличии дополнительного узла x_{n+1} на практике пользуются более удобной приближенной формулой

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\dots(q-n).$$

Последняя формула полезна, например, в случае эмпирически заданных функций.

Число n желательно выбирать так, чтобы разности $\Delta^n y_i$ были практически постоянными.

Формула (4.1) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x , близких к началу таблицы, т.е. к x_0 .

При $n = 1$ и $n = 2$ из формулы (4.1) получаем частные случаи.

Линейная интерполяция:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

Квадратичная интерполяция:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0.$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

Вторая интерполяционная формула Ньютона имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y(x) = P_n(x) = & y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots \\ & \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $q = \frac{x - x_n}{h}$.

В формуле используется нижняя наклонная строка разностей. Остаточный член $R_n(x)$ формулы (4.2) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi),$$

где ξ — внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) и точку x .

Формула (4.2) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x , близких к концу таблицы, т.е. к x_n .

Таким образом, первая интерполяционная формула Ньютона обычно используется для *интерполирования вперед* и *экстраполирования назад*, а вторая интерполяционная формула Ньютона, наоборот, — для *интерполирования назад* и *экстраполирования вперед*.

Заметим, что операция экстраполирования, вообще говоря, менее точна, чем операция интерполирования, в узком смысле слова.

Интерполяционные формулы Гаусса

Первая интерполяционная формула Гаусса (для интерполирования вперед) имеет вид

$$\begin{aligned}
P(x) = & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\
& + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \dots \\
& \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$, используемые в этой формуле, образуют нижнюю ломаную линию в таблице разностей.

Вторая интерполяционная формула Гаусса (для интерполирования назад) записывается в виде

$$\begin{aligned}
P(x) = & y_0 + q\Delta y_{-1} \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \\
& + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\
& + \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \quad (4.4)
\end{aligned}$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Разности $\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$, используемые в этой формуле, образуют верхнюю ломаную линию в таблице разностей. Остаточный член формул (4.3) и (4.4) может быть записан в виде

$$R_{2n} = \frac{h^{2n+1} f^{2n+1}(\xi)}{(2n+1)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)\dots(q^2 - n^2), \quad (4.5)$$

где ξ — внутренняя точка промежутка, содержащего все узлы x_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) и точку x .

Формулы Гаусса применяются для интерполирования в середине таблицы вблизи x_0 . При этом первая формула Гаусса применяется при $x > x_0$, а вторая — при $x < x_0$.

Интерполяционная формула Стирлинга

Эта формула представляет собой среднее арифметическое первой и второй формул Гаусса:

$$\begin{aligned}
 P(x) = & y_0 + q \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1^2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{5!} \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{6!} \Delta^6 y_{-3} + \dots \\
 \dots + & \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2) \dots (q^2 - (n-1)^2)}{(2n-1)!} \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} + \\
 & + \frac{q^2(q^2 - 1^2) \dots (q^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}, \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Остаточный член этой формулы имеет тот же вид (4.5).

Формула применяется для интерполирования в середине таблицы при значениях q , близких к нулю. Практически ее используют при $|q| \leq 0,25$.

Интерполяционная формула Бесселя

Эта формула имеет вид

$$\begin{aligned}
 P(x) = & \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + \left(q - \frac{1}{2} \right) \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\
 & + \frac{(q-0,5)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \\
 & + \frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!} \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots \\
\dots & + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\
& + \frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n},
\end{aligned}$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Остаточный член можно записать в виде

$$R_n(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot f^{(2n+2)}(\xi) q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)\dots(q^2 - n^2)(q - n - 1),$$

где ξ лежит между $x_0 - nh$ и $x_0 + nh$.

Формула Бесселя используется для интерполирования в середине таблицы при значениях q , близких к 0,5. Практически она используется при $0,25 \leq q \leq 0,75$. Наиболее простой вид имеет формула при $q = 0,5$, так как все члены, содержащие разности нечетного порядка, пропадают. Этот специальный случай формулы Бесселя называется *формулой интерполирования на середину*. Ее используют для уплотнения таблиц, т.е. для составления таблиц с более мелким шагом. Для остаточного члена при $q = 0,5$ имеем

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} h^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot f^{(2n+2)}(\xi) \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1))^2}{2^{2n+2}}.$$

Общая характеристика интерполяционных формул с постоянным шагом

Давая общую характеристику интерполяционным формулам, отметим следующее: при построении интерполяционных формул Ньютона в качестве начального значения x_0 выбирается первый или последний узел интерполирования; для центральных же формул интерполирования начальный узел является средним.

Более детальное рассмотрение интерполяционных формул показывает, что при $q \leq 0,25$ целесообразно применять формулу Стирлинга, а при $0,25 \leq q \leq 0,75$ — формулу Бесселя. Первую и вторую

интерполяционные формулы Ньютона выгодно применять тогда, когда интерполирование производится в начале или соответственно в конце таблицы и нужных центральных разностей не хватает.

Интерполяционная формула Лагранжа. Схема Эйткена

Пусть $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ — произвольные узлы, а $y_i = f(x_i)$ — значения функции $f(x)$. Многочленом степени n , принимающим в точках x_i значения y_i , является интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_i^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Остаточный член равен

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

где ξ есть некоторая точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ и точку x .

Выражения

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

называются коэффициентами Лагранжа.

Для вычисления $L_i^{(n)}(x)$ удобно применить следующие расположения разностей, подчеркнув разности, расположенные на главной диагонали:

$$\left. \begin{array}{cccccc} \underline{x-x_0} & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \dots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & \underline{x-x_1} & x_1-x_2 & \dots & x_1-x_n \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & \underline{x-x_2} & \dots & x_2-x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \dots & \underline{x-x_n} \end{array} \right\}$$

Обозначим произведение элементов i -й строки через D_i , а произведение элементов главной диагонали — через $\Pi_{n+1}(x)$, т.е. $\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

Тогда

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{D_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Иногда бывает полезным для упрощения вычислений использовать инвариантность коэффициентов Лагранжа относительно линейной подстановки:

если $x = at + b$, $x_j = at_j + b$ ($j = 0, 1, \dots, n$),

$$\text{то } L_i^{(n)}(x) = L_i^{(n)}(t).$$

В случаях равноотстоящих узлов имеются таблицы для лагранжевых коэффициентов и процесс вычисления значительно облегчается.

Если требуется найти не общее выражение $L_n(x)$, а лишь его значения при конкретных x и при этом значения функции даны в достаточно большом количестве узлов, то удобно пользоваться интерполяционной схемой Эйткена. Согласно этой схеме последовательно вычисляются многочлены:

$$L_{i, i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix};$$

$$L_{i, i+1, i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2} - x_i} \begin{vmatrix} L_{i, i+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1, i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix};$$

$$L_{i, i+1, i+2, i+3}(x) = \frac{1}{x_{i+3} - x_i} \begin{vmatrix} L_{i, i+1, i+2}(x) & x_i - x \\ L_{i+1, i+2, i+3}(x) & x_{i+3} - x \end{vmatrix} \text{ и т.д.}$$

Интерполяционный многочлен n -й степени, принимающий в точках x_i значения y_i ($i = 0, 1, \dots, n$), запишется следующим образом:

$$L_{01\dots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} L_{01\dots(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{12\dots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Вычисления по схеме Эйткена удобно расположить в такой таблице (табл. 4.1).

По определению получаем

$$\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = P(x, x_0);$$

отсюда

$$P(x) = P(x_0) + P(x, x_0)(x - x_0). \quad (4.7)$$

Из определения разделенных разностей следует, что

$$P(x, x_0, \dots, x_m) = \frac{P(x, x_0, \dots, x_{m-1}) - P(x_0, \dots, x_m)}{x - x_m}.$$

Отсюда

$$P(x, x_0, \dots, x_{m-1}) = P(x_0, \dots, x_m) + (x - x_m)P(x, x_0, \dots, x_m), \quad (4.8)$$

где $(m = 1, 2, \dots, n)$.

Используя формулу (4.8), из формулы (4.7) последовательно выведем:

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0) + P(x, x_0)(x - x_0) = P(x_0) + P(x_0, x_1)(x - x_0) + \\ &+ P(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1) = P(x_0) + P(x_0, x_1)(x - x_0) + \\ &+ P(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &+ P(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \\ &+ P(x, x_0, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \end{aligned}$$

Учитывая приведенные ранее равенства, окончательно получаем интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих значений аргумента

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &+ [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Погрешность формулы (4.7), как обычно, равна

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

где ξ — промежуточное значение между точками x_0, x_1, \dots, x_n и x .

Практическое задание 4.1

Нахождение значений функции с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа

Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана: 1) в неравноотстоящих узлах таблицы; 2) в равноотстоящих узлах таблицы.

Варианты к заданию 1

Таблица 1

x	y	№ варианта	x
0,43	1,63597	1	0,702
0,48	1,73234	7	0,512
0,55	1,87686	13	0,645
0,62	2,03345	19	0,736
0,70	2,22846	25	0,608
0,75	2,35973		

Таблица 2

x	y	№ варианта	x
0,02	1,02316	2	0,102
0,08	1,09590	8	0,114
0,12	1,14725	14	0,125
0,17	1,21483	20	0,203
0,23	1,30120	26	0,154
0,30	1,40976		

Таблица 3

x	y	№ варианта	x
0,35	2,73951	3	0,526
0,41	2,30080	9	0,453
0,47	1,96864	15	0,482
0,51	1,78776	21	0,552
0,56	1,59502	27	0,436
0,64	1,34310		

Таблица 4

x	y	№ варианта	x
0,41	2,57418	4	0,616
0,46	2,32513	10	0,478

Окончание табл. 4

x	y	№ варианта	x
0,52	2,09336	16	0,665
0,60	1,86203	22	0,537
0,65	1,74926	28	0,673
0,72	1,62098		

Таблица 5

x	y	№ варианта	x
0,68	0,80866	5	0,896
0,73	0,89492	11	0,812
0,80	1,02964	17	0,774
0,88	1,20966	23	0,955
0,93	1,34087	29	0,715
0,99	1,52368		

Таблица 6

x	y	№ варианта	x
0,11	9,05421	6	0,314
0,15	6,61659	12	0,235
0,21	4,69170	18	0,332
0,29	3,35106	24	0,275
0,35	2,73951	30	0,186
0,40	2,36522		

Варианты к заданию 2

Таблица 1

x	y	№ варианта	x
1,375	5,04192	1	1,3832
1,380	5,17744	7	1,3926
1,385	5,32016	13	1,3862
1,390	5,47069	19	1,3934
1,395	5,62968	25	1,3866
1,400	5,79788		

Таблица 2

x	y	№ варианта	x
0,115	8,65729	2	0,1264
0,120	8,29329	8	0,1315
0,125	7,95829	14	0,1232

Окончание табл. 2

x	y	№ варианта	x
0,130	7,64893	20	0,1334
0,135	7,36235	26	0,1285
0,143	7,09613		

Таблица 3

x	y	№ варианта	x
0,150	6,61659	3	0,1521
0,155	6,39989	9	0,1611
0,160	6,19658	15	0,1662
0,165	6,00551	21	0,1542
0,170	5,82558	27	0,1625
0,175	5,65583		

Таблица 4

x	y	№ варианта	x
0,180	5,61543	4	0,1838
0,185	5,46693	10	0,1875
0,190	5,32634	16	0,1944
0,195	5,19304	22	0,1976
0,200	5,06649	28	0,2038
0,205	4,94619		

Таблица 5

x	y	№ варианта	x
0,210	4,83170	5	0,2121
0,215	4,72261	11	0,2165
0,220	4,61855	17	0,2232
0,225	4,51919	23	0,2263
0,230	4,42422	29	0,2244
0,235	4,33337		

Таблица 6

x	y	№ варианта	x
1,415	0,888551	6	1,4179
1,420	0,889599	12	1,4258
1,425	0,890637	18	1,4396
1,430	0,891667	24	1,4236
1,435	0,892687	30	1,4315
1,440	0,893698		

Пример выполнения задания 4.1

x	y
0,05	0,050042
0,10	0,100335
0,17	0,171657
0,25	0,255342
0,30	0,309336
0,36	0,376403

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,32130
0,126	1,32660

1. Вычислить значение функции $f(x) = y(x)$ при $x = 0,263$.

2. Определить значение функции $y(x)$ при $x = 0,01157$.

1. Воспользуемся формулой

$$f(x) \approx \Pi_{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n (y_i / D_i),$$

где $\Pi_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$;

$$D_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n).$$

Вычисления приведены в таблице.

i							D_i	y_i / D_i
0	0,213	-0,05	-0,12	-0,20	-0,25	-0,31	$-0,19809 \cdot 10^{-4}$	-2526,2
1	0,05	0,163	-0,07	-0,15	-0,20	-0,26	$0,44499 \cdot 10^{-5}$	25547,7
2	0,12	0,07	0,093	-0,08	-0,13	-0,19	$-0,154365 \cdot 10^{-5}$	-111202,0
3	0,20	0,15	0,08	0,013	-0,05	-0,11	$0,1716 \cdot 10^{-6}$	1488007,0
4	0,25	0,20	0,13	0,05	-0,037	-0,06	$0,7215 \cdot 10^{-6}$	428740,0
5	0,31	0,26	0,19	0,11	0,06	-0,097	$-0,980402 \cdot 10^{-6}$	-38392,7

Итак, $\Pi_{5+1} = 0,1506492 \cdot 10^{-6}$, $\sum_{i=0}^5 (y_i / D_i) = 1790173,8$.

Следовательно,

$$f(0,263) \approx \Pi_{5+1} \cdot \sum_{i=0}^5 (y_i / D_i) = 0,1506492 \cdot 10^{-6} \cdot 1790173,8 = 0,269678;$$

2. Для вычислений используем формулу

$$f(x) = y(x) \approx \Pi_{n+1}(t) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(t-i)C_i},$$

где $\Pi_{n+1}(t) = t(t-1)\dots(t-n)$; $t = \frac{x-x_0}{h}$; $h = x_{i+1} - x_i$;

$$C_i = (-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)!$$

Здесь $t = (0,1157 - 0,101) / 0,005 = 2,94$.

Вычисления располагаем в таблице.

i	x_i	l_i	$t-i$	C_i	$(t-i) \cdot C_i$	$\frac{y_i}{(t-i)C_i}$
0	0,101	1,26183	2,94	-120	-352,8	-0,0035766
1	0,106	1,27644	1,94	24	46,56	0,0274149
2	0,111	1,29122	0,94	-12	-11,28	-0,1144691
3	0,116	1,30617	-0,06	12	-0,72	-1,8141250
4	0,121	1,32130	-1,06	-24	25,44	0,0519379
5	0,126	1,33660	-2,06	120	-247,2	-0,0054069

Итак, $\Pi_{n+1}(t) = -0,7024271$, $\sum_{i=0}^5 \frac{y_i}{(t-i)C_i} = -1,858225$.

Следовательно, $f(0,1157) \approx 1,30527$.

Практическое задание 4.2

Вычисление значений функции по первой и второй интерполяционным формулам Ньютона

Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента. При составлении таблицы разностей контролировать вычисления.

Таблица 1

x	y
1,415	0,888551
1,420	0,889599
1,425	0,890637
1,430	0,891667
1,435	0,892687
1,440	0,893698
1,445	0,894700
1,450	0,895693
1,455	0,896677
1,460	0,897653
1,465	0,898619

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1,4161	1,4625	1,4135	1,470
11	1,4179	1,4633	1,4124	1,4655
21	1,4263	1,4575	1,410	1,4662

Таблица 2

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,32130
0,126	1,33660
0,131	1,35207
0,136	1,36773
0,141	1,38357
0,146	1,39959
0,151	1,41579

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
2	0,1026	0,1440	0,099	0,161
12	0,1035	0,1492	0,096	0,153
22	0,1074	0,1485	0,1006	0,156

Таблица 3

x	y
0,15	0,860708
0,20	0,818731
0,25	0,778801
0,30	0,740818
0,35	0,704688
0,40	0,670320
0,45	0,637628
0,50	0,606531
0,55	0,576950
0,60	0,548812
0,65	0,522046
0,70	0,496585
0,75	0,4722367

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
3	0,1511	0,7250	0,1430	0,80
13	0,1535	0,7333	0,100	0,7540
23	0,1525	0,6730	0,1455	0,85

Таблица 4

x	y
0,180	5,61543
0,185	5,46693
0,190	5,32634
0,195	5,19304
0,200	5,06649
0,205	4,94619
0,210	4,83170
0,215	4,72261
0,220	4,61855
0,225	4,51919
0,230	4,42422
0,235	4,33337

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
4	0,1817	0,2275	0,175	0,2375

Окончание табл. 4

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
14	0,1827	0,2292	0,1776	0,240
24	0,1873	0,2326	0,1783	0,245

Таблица 5

x	y
3,50	33,1154
3,55	34,8133
3,60	36,5982
3,65	38,4747
3,70	40,4473
3,75	42,5211
3,80	44,7012
3,85	46,9931
3,90	49,4024
3,95	51,9354
4,00	54,5982
4,05	57,3975
4,10	60,3403
4,15	63,4340
4,20	66,6863

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
5	3,522	4,176	3,475	4,25
15	3,543	4,184	3,488	4,30
25	3,575	4,142	3,45	4,204

Таблица 6

x	y
0,115	8,65729
0,120	8,29329
0,125	7,95829
0,130	7,64893
0,135	7,36235
0,140	7,09613
0,145	6,84815

Окончание табл. 6

x	y
0,150	6,61659
0,155	6,39986
0,160	6,19658
0,165	6,00551
0,170	5,82558
0,175	5,65583
0,180	5,49543

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
6	0,1217	0,1736	0,1141	0,185
16	0,1168	0,1745	0,110	0,1825
26	0,1175	0,1773	0,1134	0,190

Таблица 7

x	y
1,340	4,25562
1,345	4,35325
1,350	4,45522
1,355	4,56184
1,360	4,67344
1,365	4,79038
1,370	4,91306
1,375	5,04192
1,380	5,17744
1,385	5,32016
1,390	5,47069
1,395	5,62968

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
7	1,3617	1,3921	1,3359	1,400
17	1,3463	1,3868	1,335	1,3990
27	1,3432	1,3936	1,3365	1,3975

Таблица 8

x	y
0,01	0,991824

Окончание табл. 8

x	y
0,06	0,951935
0,11	0,913650
0,16	0,876905
0,21	0,841638
0,26	0,807789
0,31	0,775301
0,36	0,744120
0,41	0,714193
0,46	0,685470
0,51	0,657902
0,56	0,631442

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
8	0,027	0,525	0,008	0,61
18	0,1243	0,492	0,0094	0,66
28	0,083	0,5454	0,0075	0,573

Таблица 9

x	y
0,15	4,4817
0,16	4,9530
0,17	5,4739
0,18	6,0496
0,19	6,6859
0,20	7,3891
0,21	8,1662
0,22	9,0250
0,23	9,9742
0,24	11,0232
0,25	12,1825
0,26	13,4637

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
9	0,1539	0,2569	0,14	0,2665
19	0,1732	0,2444	0,1415	0,27
29	0,1648	0,2550	0,1387	0,28

Таблица 10

x	y
0,45	20,1946
0,46	19,6133
0,47	18,9425
0,48	18,1746
0,49	17,3010
0,50	16,3123
0,51	15,1984
0,52	13,9484
0,53	12,5508
0,54	10,9937
0,55	9,2647
0,56	7,3510

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
10	0,455	0,5575	0,44	0,5674
20	0,4732	0,5568	0,445	0,57
30	0,4675	0,5511	0,4423	0,58

Пример выполнения задания 4.2

Определить значения функции $y(x)$ при следующих значениях аргумента:

- 1) $x_1 = 1,2273$; 3) $x_2 = 1,253$;
 2) $x_3 = 1,210$; 4) $x_4 = 1,2638$.

Составим таблицу конечных разностей. Для контроля вычислений добавим к ней две строки: в строке Σ запишем суммы элементов столбцов конечных разностей, а в строке P — разности крайних значений столбцов.

x	y
1,215	0,106044
1,220	0,113276
1,225	0,119671
1,230	0,125324
1,235	0,130328
1,240	0,134776
1,245	0,138759

Окончание табл.

x	y
1,250	0,142367
1,255	0,145688
1,260	0,148809

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,215	0,106044	0,007232	-0,000837	0,000095
1,220	0,113276	0,006395	-0,000742	0,000093
1,225	0,119671	0,005653	-0,000649	0,000093
1,230	0,125324	0,005004	-0,000556	0,000091
1,235	0,130328	0,004448	-0,000465	0,000090
1,240	0,134776	0,003983	-0,000375	0,000088
1,245	0,138759	0,003608	-0,000287	0,000087
1,250	0,142367	0,003321	-0,000200	—
1,255	0,145688	0,003121	—	—
1,260	0,148809	—	—	—
—	—	0,042765	-0,004111	0,000637
P	0,042765	-0,004111	0,000637	—

При составлении таблицы разностей ограничиваемся разностями третьего порядка, так как они практически постоянны. Для вычисления значений функции при $x = 1,2273$ и $x = 1,210$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед:

$$y(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0,$$

где $q = (x - x_0) / h$.

1. Если $x = 1,2273$, то примем $x_0 = 1,225$; тогда

$$q = \frac{1,2273 - 1,225}{0,005} = 0,46.$$

$$\begin{aligned} y(1,2273) &\approx 0,119671 + 0,46 \cdot 0,005653 + \frac{0,46(-0,54)}{2} (-0,000649) + \\ &+ \frac{0,46(-0,54)(-1,54)}{6} 0,000093 = 0,119671 + 0,0026004 + \\ &+ 0,0000806 + 0,0000059 = 0,1223579 \approx 0,122358. \end{aligned}$$

2. Если $x = 1,210$, то примем $x_0 = 1,215$; тогда

$$q = \frac{1,210 - 1,215}{0,005} = -1.$$

$$y(1,210) \approx 0,106044 + (-1)0,007232 + \frac{(-1)(-2)}{2}(-0,000837) + \\ + \frac{(-1)(-2)(-3)}{6} \cdot 0,000095 = 0,097880.$$

Для вычисления значений функции при $x = 1,253$ и $x = 1,2638$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад:

$$y(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3},$$

где $q = (x - x_n) / h$.

3. Если $x = 1,2638$, то примем $x_n = 1,255$; тогда

$$q = \frac{1,253 - 1,255}{0,005} = -0,4.$$

$$y(1,253) \approx 0,145688 + (-0,4)0,003321 + \frac{(-0,4)0,6}{2}(-0,000287) + \\ + \frac{(-0,4)0,6 \cdot 1,6}{6} \cdot 0,000088 = 0,145688 - 0,0013284 + 0,0000344 - \\ - 0,0000056 = 0,1443884 \approx 0,144388.$$

4. Если $x = 1,2638$, то примем $x_n = 1,260$; тогда

$$q = \frac{1,2638 - 1,260}{0,005} = 0,76.$$

$$y(1,2638) \approx 0,148809 + 0,76 \cdot 0,003121 + \frac{0,76 \cdot 1,76}{2}(-0,000200) + \\ + \frac{0,76 \cdot 1,76 \cdot 2,76}{6} \cdot 0,000087 = 0,148809 + 0,0023720 - \\ - 0,0001338 + 0,0000535 = -0,1511007 \approx 0,151101.$$

Практическое задание 4.3

**Вычисление значений функции с использованием
интерполяционной формулы Ньютона
для неравноотстоящих узлов**

Вычислить значения функции при заданных значениях аргумента, используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов. При вычислениях учитывать только разделенные разности первого и второго порядков. Вычисления провести дважды, используя, если это возможно, различные узлы.

Таблица 1

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,298	3,25578	1	0,308	0,335
0,303	3,17639	7	0,314	0,337
0,310	3,12180	13	0,325	0,303
0,317	3,04819	19	0,312	0,304
0,323	2,98755	25	0,321	0,336
0,330	2,91950			
0,339	2,83598			

Таблица 2

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,593	0,532050	2	0,608	0,630
0,598	0,535625	8	0,615	0,594
0,605	0,540598	14	0,622	0,596
0,613	0,546235	20	0,603	0,631
0,619	0,550431	26	0,610	0,628
0,627	0,555983			
0,632	0,559428			

Таблица 3

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,698	2,22336	3	0,720	0,775
0,706	2,24382	9	0,740	0,705
0,714	2,26446	15	0,750	0,777
0,727	2,29841	21	0,765	0,700
0,736	2,32221	27	0,755	0,704
0,747	2,35164			
0,760	2,38690			

Окончание табл. 3

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,769	2,41162			
0,782	2,44777			

Таблица 4

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,100	1,12128	4	0,115	0,160
0,108	1,13160	10	0,124	0,162
0,119	1,14594	16	0,130	0,164
0,127	1,15648	22	0,140	0,104
0,135	1,16712	28	0,150	0,102
0,146	1,18191			
0,157	1,19689			
0,169	1,21344			

Таблица 5

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,235	1,20800	5	0,238	0,257
0,240	1,21256	11	0,261	0,298
0,250	1,22169	17	0,244	0,272
0,255	1,22628	23	0,275	0,303
0,265	1,23547	29	0,268	0,292
0,280	1,24933			
0,295	1,26328			
0,300	1,26795			
0,305	1,27263			

Таблица 6

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,095	1,09131	6	0,105	0,114
0,102	1,23490	12	0,103	0,117
0,104	1,27994	18	0,109	0,115
0,107	1,35142	26	0,108	0,100
0,110	1,42815	30	0,111	0,118
0,112	1,48256			
0,116	1,60033			
0,120	1,73205			

Пример выполнения задания 4.3

Определить значения функции $y(x)$ при следующих значениях аргумента: 1) $x_1 = 0,112$; 2) $x_2 = 0,133$.

Вычисления производим по формуле

$$y(x) \approx y_0 + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1),$$

$$\text{где } f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}; \quad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

x	y
0,103	2,01284
0,108	2,03342
0,115	2,06070
0,120	2,07918
0,128	2,10721
0,136	2,13354
0,141	2,14922
0,150	2,17609

Предварительно вычислим необходимые значения разделенных разностей.

x_1		$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0,103	2,01284	4,116	-18,238166
0,108	2,03342	3,896142	-16,761833
0,115	2,06070	3,696	-14,788461
0,120	2,07918	3,503750	-13,281250
0,128	2,10721	3,291250	-11,942307
0,136	2,13354	3,136	-
0,141	2,14922	-	-

1. Найдем значение $f(0,112)$ двумя способами, взяв за x_0 сначала 0,103, а затем 0,108:

$$\begin{aligned} f(0,112) &\approx 2,01284 + 4,116 \cdot (0,112 - 0,103) + \\ &+ (-18,238166) \cdot (0,112 - 0,103) \cdot (0,112 - 0,106) = \\ &= 2,01284 + 0,037044 - 0,000657 = 2,04923; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(0,112) &\approx 2,03342 + 3,896142 \cdot (0,112 - 0,108) + \\
 &+ (-16,761833) \cdot (0,112 - 0,108) \cdot (0,112 - 0,115) = \\
 &= 2,03342 + 0,015589 + 0,000201 = 2,04921.
 \end{aligned}$$

Принимаем $f(0,112) \approx 2,04922$.

2. Значение $f(0,133)$ также определим двумя способами, взяв за x_0 сначала 0,120, а затем 0,128:

$$\begin{aligned}
 f(0,133) &\approx 2,07918 + 3,50375 \cdot (0,133 - 0,120) + \\
 &+ (-13,281250) \cdot (0,133 - 0,120) \cdot (0,133 - 0,128) = \\
 &= 2,07918 + 0,045549 - 0,000863 = 2,12387;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(0,133) &\approx 2,10721 + 3,291250 \cdot (0,133 - 0,120) + \\
 &+ (-11,942307) \cdot (0,133 - 0,128) \cdot (0,133 - 0,136) = \\
 &= 2,10721 + 0,016456 + 0,000179 = 2,12385.
 \end{aligned}$$

Принимаем $f(0,112) \approx 2,12386$.

ГЛАВА 5

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общие замечания. Задача Коши

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \quad (5.1)$$

Основная задача, относящаяся к этому уравнению, есть задача Коши: найти решение уравнения (3.1) $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, т.е. надо найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в области R , определяемой неравенствами

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b,$$

то существует по меньшей мере одно решение $y = y(x)$, определенное в некоторой окрестности $|x - x_0| < h$, где h — положительное число. Это решение единственно, если в R выполнено *условие Липшица*

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq N |\tilde{y} - y|, \quad (5.2)$$

где N — постоянная (константа Липшица), зависящая в общем случае от a и b . Если $f(x, y)$ имеет ограниченную производную $f'_y(x, y)$ в R , то можно положить

$$N = \max |f'_y(x, y)| \quad \text{при } (x, y) \in R.$$

Задача Коши для дифференциального уравнения n -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (5.3)$$

заключается в отыскании функции $y = y(x)$, удовлетворяющей этому уравнению и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (5.4)$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

В приложениях часто встречаются задачи, для решения которых обращаются к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим нормальную систему n -го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\}, \quad (5.5)$$

где x — независимая переменная; y_1, y_2, \dots, y_n — искомые функции.

Систему, содержащую производные высших порядков и разрешенную относительно старших производных искомым функций, путем введения новых неизвестных функций можно привести к виду (5.5). В частности, для дифференциального уравнения n -го порядка (5.3), полагая $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, ..., $y_{n-1} = y^{(n-1)}$, будем иметь эквивалентную нормальную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} &= y_{n-1} \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{aligned} \right\}. \quad (5.6)$$

Воспользовавшись векторными обозначениями

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix},$$

систему уравнений (5.5) можно записать более просто:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad (5.7)$$

где $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ — заданная вектор-функция.

Под решением системы (5.5) понимается любая совокупность функций

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

где $y_1 = \varphi_1(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$, которая при подстановке в уравнения (5.5) обращает их в тождества. Геометрически каждое решение (5.8) представляет собой некоторую линию L (интегральная кривая в пространстве $E^{n+1} = \{x, y_1, \dots, y_n\}$), а совокупность всех решений образует поле интегральных кривых.

Так как система дифференциальных уравнений имеет бесчисленное множество решений, то для выделения одного конкретного решения кроме уравнения нужны дополнительные условия. Это приводит к задаче Коши, которая заключается в отыскании функций y_1, y_2, \dots, y_n , удовлетворяющих системе (5.5) и начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (5.9)$$

Если удастся найти общее решение уравнения (5.3) или системы (5.5), то задача Коши сводится к отысканию значений произвольных постоянных. Но найти общее решение задачи Коши удастся в редких случаях. Нахождение решения, отвечающего заданным условиям, даже для простейшего дифференциального уравнения первого порядка с по-

мощью конечного числа математических операций практически невыполнимо. Еще более сложной задачей является нахождение решения системы дифференциальных уравнений за конечное число операций. Данное обстоятельство обусловило создание большого числа методов приближенного решения дифференциальных уравнений.

Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае делятся на четыре группы.

1. *Аналитические методы* позволяют найти точное решение дифференциального уравнения. Классы уравнений, для которых разработаны методы получения точных решений, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач.

2. *Графические методы* используют геометрические построения. В частности, одним из них является метод изоклин для решения дифференциального уравнения первого порядка. Он основан на геометрическом определении интегральных кривых по заранее построенному полю направлений.

3. *Приближенные методы* дают возможность получить решение как предел некоторой последовательности функций, которые могут быть выражены через элементарные функции или при помощи квадратур. Ограничиваясь конечным числом членов последовательности, получают приближенное выражение для решения.

4. *Численные методы* — это алгоритмы вычисления приближенных значений решения на некоторой выбранной сетке значений аргумента. Решение при этом получается в виде таблицы. Численные методы не позволяют найти общего решения системы. Они могут дать какое-то частное решение. С появлением ЭВМ численные методы решения стали одним из основных способов решения практических задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данная классификация методов является условной. Следует отметить, что численные методы можно применять только к корректно поставленным задачам. Однако формального выполнения условия корректности может оказаться недостаточно. Надо, чтобы задача была *хорошо обусловленной*, т.е. малым изменениям начальных условий соответствовало малое изменение решения. В противном случае небольшое изменение начальных условий или эквивалентные этим изменениям небольшие погрешности численного метода могут существенно изменить решение. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что для рассматриваемых дифференциальных уравнений выполнены обычные условия существования и единственности решений. При необходимости более жестких условий они будут указаны для соответствующих методов.

Метод Эйлера

Метод Эйлера относится к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (5.10)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Выбрав достаточно малый шаг h , построим систему равноотстоящих точек:

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2 \dots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$); каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой *ломаной Эйлера*, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (5.10), которая проходит через точку M_i .

Если правая часть уравнения (5.10) в некотором прямоугольнике $R\{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ удовлетворяет условиям

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2| \quad (N = \text{const}),$$

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M \quad (M = \text{const}), \quad (5.11)$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} [(1 + hN)^n - 1],$$

где $y(x_n)$ — значение точного решения уравнения при $x = x_n$, а y_n — приближенное значение, полученное на n -м шаге.

Формула (5.11) имеет лишь теоретическое применение. На практике иногда оказывается более удобным *двойной просчет*: расчет повторяют с шагом $h/2$ и погрешность более точного значения y_n^* (при шаге $h/2$) оценивают приближенно так:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n|.$$

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений и на дифференциальные уравнения высших порядков. Последние должны быть предварительно приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \right\},$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$.

Приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ и $z(x_i) \approx z_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} &= z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\}.$$

Замечание. Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения. Недостатки:

- малая точность;
- систематическое накопление ошибок.

Этот метод дает сравнительно удовлетворительные результаты (в смысле погрешности) лишь при малых значениях h . Это обусловлено тем, что суть метода Эйлера заключается в том, что интеграл дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представляется двумя членами ряда Тейлора:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

т.е. для этого отрезка имеется погрешность порядка h^2 .

Кроме того, при вычислении значений на следующем отрезке исходные данные не являются точными и содержат погрешности, зависящие от неточности предшествующих вычислений.

Модификации метода Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Выбрав шаг h , положим

$$x_i = x_0 + ih \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Согласно методу Эйлера последовательные значения искомого решения вычисляются по приближенной формуле $y_{i+1} = y_i + hf_i$, $f_i = f(x_i, y_i)$.

Более точным является усовершенствованный метод ломаных, при котором сначала вычисляют промежуточные значения

$$\left. \begin{aligned} x_{i+\frac{1}{2}} &= x_i + \frac{h}{2} \\ y_{i+\frac{1}{2}} &= y_i + \frac{h}{2} f_i \end{aligned} \right\}$$

и находят значения направления поля интегральных кривых в средней точке $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$, т.е. $f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$.

Затем полагают

$$y_{i+1} = y_i + hf_i.$$

Другой модификацией метода Эйлера является усовершенствованный метод Эйлера—Коши, при котором сначала определяется «грубое приближение» решения

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf_i,$$

исходя из которого находится направление поля интегральных кривых $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, и приближенно полагают

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2}.$$

Остаточные члены первого и второго улучшенных методов Эйлера на каждом шаге имеют порядок $O(h^3)$.

Оценка погрешности в точке x_n может быть получена с помощью двойного просчета: расчет повторяют с шагом $h/2$ и погрешность более точного значения y_n^* (при шаге $h/2$) оценивают приближенно так:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{1}{3} \cdot |y_n^* - y_n|,$$

где $y(x)$ — точное решение дифференциального уравнения.

Метод Эйлера с последующей итерационной обработкой

Метод Эйлера–Коши можно еще более уточнить, применяя итерационную обработку каждого значения y_i , а именно исходя из грубого приближения

$$y_{i+1}^0 = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Построим итерационный процесс

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{k-1})].$$

Итерации продолжаем до тех пор, пока в двух последовательных приближениях $y_{i+1}^{(k)}, y_{i+1}^{(k+1)}$ не совпадут соответствующие десятичные знаки. После этого полагаем

$$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}.$$

Как правило, при достаточно малом h итерации быстро сходятся. Если после трех-четырех итераций не произошло совпадения нужного числа десятичных знаков, то следует уменьшить шаг расчета h .

Метод Эйлера с последующей итерационной обработкой ординат дает на каждом шаге погрешность порядка $O(h^3)$ и нередко применяется в вычислительной практике.

Замечание. Метод Эйлера и его модификации являются простейшими представителями *конечно-разностных методов (шаговых методов)* для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.12)$$

при заданных начальных условиях

$$y_k(x_0) = y_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

При применении конечно-разностного метода искомое решение последовательно строится на системе точек (узлов), где h — выбран-

ный шаг. Процесс вычислений расчленяется на однообразно повторяющиеся циклы, каждый из которых обеспечивает переход от значения к значению, начиная с начального. Поэтому схема вычислений легко программируется и удобна для реализации на ЭВМ. Если правые части f_k системы (5.12) сложны, то требуются специальные подпрограммы для подсчета $y'_k(x_i)$.

Метод Рунге–Кутта

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (5.13)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Выберем шаг h и для краткости введем обозначения $x_i = x_0 + ih$ и $y_i = y(x_i)$ ($i=0,1,2,\dots$). Обозначим через y_i приближенное значение искомого решения в точке x_i . По методу Рунге–Кутта вычисление приближенного значения y_{i+1} в следующей точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по формулам

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \\ \Delta y_i &= \frac{1}{6} \left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)} \right) \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i) \\ K_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right) \\ K_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right) \\ K_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}) \end{aligned} \right\} \text{ где}$$

Все вычисления удобно располагать по схеме, указанной в табл. 5.1.

Порядок заполнения табл. 5.1

1. Записываем в первой строке таблицы данные значения x_0, y_0 .

Схема метода Рунге–Кутты

i	x	y	$K = hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	K_1^0	K_1^0
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

2. Вычисляем $f(x_0, y_0)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_1^{(0)}$.

3. Записываем во второй строке таблицы $x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$.

4. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_2^{(0)}$.

5. Записываем в третьей строке таблицы $x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$.

6. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h , заносим в таблицу в качестве $K_3^{(0)}$.

7. Записываем в четвертой строке таблицы $x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}$.

8. Вычисляем $f(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)})$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_4^{(0)}$.

9. В столбец Δy записываем числа $K_1^{(0)}, 2K_2^{(0)}, 2K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$.

10. Суммируем числа, стоящие в столбце Δy , делим на 6 и заносим в таблицу в качестве Δy_0 .

11. Вычисляем $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

Затем все вычисления продолжают в том же порядке, принимая за начальную точку (x_1, y_1) .

Вычисление правой части $f(x, y)$ можно включить в табл. 5.1. Если же эти вычисления слишком громоздки, рекомендуется записывать их в отдельную таблицу.

Заметим, что шаг расчета можно менять при переходе от одной точки к другой. Для контроля правильности выбора шага h рекомендуется вычислять дробь

$$\Theta = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right|.$$

Величина Θ не должна превышать нескольких сотых. В противном случае шаг h следует уменьшить. Метод Рунге–Кутта имеет порядок точности h^4 на всем отрезке $[x_0, X]$. Оценка погрешности метода очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного просчета по формуле

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{15},$$

где $y(x_n)$ — значение точного решения уравнения (5.13) в точке x_n , а y_n^*, y_n — приближенные значения, полученные с шагом $h/2$ и h .

При реализации метода Рунге–Кутта на ЭВМ с автоматическим выбором шага обычно каждой точке x_i делают двойной просчет — сначала с шагом h , затем с шагом $h/2$. Если полученные при этом значения y_i различаются в пределах допустимой точности, то шаг h для следующей точки (x_{i+1}) удваивают, в противном случае берут половинный шаг.

Замечание. Аналогично метод Рунге–Кутта применяется для решения систем дифференциальных уравнений и уравнений высших порядков, которые предварительно следует свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Метод Адамса

Этот метод численного интегрирования разработан Адамсом в 1855 г. по просьбе известного английского артиллериста Башфорта, занимавшегося внешней баллистикой. Впоследствии этот метод был забыт и вновь открыт в начале века норвежским математиком Штер-

мером. Популяризация метода Адамса и дальнейшее его усовершенствование связаны с именем А.Н. Крылова.

Пусть для уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ найдены каким-либо способом (Эйлера, последовательных приближений, Рунге–Кутта и др.) три последовательных значения искомой функции («начальный отрезок»):

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h); \quad y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h);$$

$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h).$$

С помощью этих значений вычисляем величины

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0), \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1),$$

$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2), \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3).$$

Записываем числа x_k, y_k, y'_k, q_k ($k = 0, 1, 2, 3$) в табл. 5.2 и вычисляем конечные разности величины q (числа над ломаной линией в табл. 5.2).

Метод Адамса состоит в продолжении этой таблицы разностей с помощью формулы

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} \quad (k = 3, 4, \dots), \quad (5.14)$$

которая называется *экстраполяционной формулой Адамса*. Она применяется для «предсказания» значения $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$. Посчитанное по этой формуле «предсказанное» значение мы будем обозначать через $y_{k+1}^{\text{пред}}$. Полученное по формуле (5.14) значение Δy_k надо еще уточнить. Для этого нужно записать в таблицу значения $x_{k+1}, y_{k+1}, y'_{k+1}, q_{k+1}$, дополнить таблицу разностей, а затем сделать пересчет по формуле «коррекции»

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2} \Delta q_k - \frac{1}{12} \Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 q_{k-2}, \quad (5.15)$$

которая называется *интерполяционной формулой Адамса*. Уточненное с помощью формулы (5.15) значение мы будем обозначать через $y_{k+1}^{\text{кор}}$.

Формулы (5.14) и (5.15) имеют достаточно большую точность. Они дают погрешность порядка $O(h^4)$, но сами формулы оценки погрешности довольно сложны.

Таблица 5.2

Схема метода Адамса

k	x_k	y_k	$\Delta y_k =$ $= y_{k+1} - y_k$	$y'_k =$ $= f(x_k, y_k)$	$q_k = hy'_k$	$\Delta q_k =$ $= q_{k+1} - q_k$	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
0	x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
4	x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4	Δq_4		
5	x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
6	x_6	y_6						

На практике обычно пользуются следующими соображениями. Ошибка более точной формулы коррекции (5.15) составляет примерно $1/14$ разности между значениями Δy_k , подсчитанными по формулам (5.14) и (5.15). Поэтому если указанная разность ненамного превышает допустимую ошибку расчета, то шаг h считается выбранным верно и расчет продолжают с выбранным шагом. Если же на некотором этапе расчета указанная разность становится большой (и при этом нет ошибки в самих вычислениях!), то шаг расчета h следует уменьшить. Рекомендуется уменьшать шаг в два раза, используя уже имеющиеся точки и формулы интерполяции на середине.

Порядок заполнения табл. 5.2

1. Записываем в таблицу числа x_k, y_k, y'_k, q_k ($k = 0, 1, 2, 3$) и вычисляем разности Δq_k ($k = 0, 1, 2$), $\Delta^2 q_k$ ($k = 0, 1$), $\Delta^3 q_0$.

2. Используя числа $q_3, \Delta q_2, \Delta^2 q_1, \Delta^3 q_0$, помещенные в таблице разностей по диагонали, определяем по формуле (5.14) при $k = 3$

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0.$$

3. Вычисляем $x_4 = x_3 + h$, $y_4 = y_3 + \Delta y_3$.

4. Записываем значения x_4, y_4 в таблицу, находим $y'_4 = f(x_4, y_4)$, $q_4 = h y'_4$ и пополняем таблицу разностей значениями $\Delta q_3, \Delta^2 q_2, \Delta^3 q_1$.

5. Используя полученные значения разностей q , уточняем величину Δy_3 по формуле (5.15) при $k = 3$:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2} \Delta q_3 - \frac{1}{12} \Delta^2 q_2 - \frac{1}{24} \Delta^3 q_1.$$

6. Если скорректированное значение Δy_3 отличается от предсказанного значения Δy_3 на несколько единиц младшего сохраняемого разряда, то вносим соответствующие поправки в значения Δy_3 и y_4 , проверяем, что эти поправки не скажутся существенно на значении q_4 , и продолжаем расчет с выбранным шагом. В противном случае выбираем меньший шаг.

Вычисления для $k = 4, 5, \dots$ проводятся аналогично.

Для работы на ЭВМ формулы Адамса удобнее применять в другой форме, выражая y_{k+1} не через разности Δq , а непосредственно через величины q . Так получают экстраполяционную формулу Адамса в виде

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3})$$

и интерполяционную формулу Адамса в виде

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (9y'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}).$$

Метод Адамса легко распространяется на системы дифференциальных уравнений, а также на дифференциальные уравнения n -го порядка.

Пусть имеем систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \right\}.$$

Экстраполяционные формулы Адамса для этой системы записываются так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_k &= p_k + \frac{1}{2} \Delta p_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 p_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 p_{k-3} \\ \Delta z_k &= q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} \end{aligned} \right\},$$

где $p_k = h y'_k = h f_1(x_k, y_k, z_k)$; $q_k = h z'_k = h f_2(x_k, y_k, z_k)$.

Аналогичным образом записываются интерполяционные формулы Адамса для системы.

Метод Милна

Пусть для уравнения $y' = f(x, y)$ кроме начального условия $y(x_0) = y_0$ известен «начальный отрезок», т.е. значения искомой функции $y(x_i) = y_i$ в точках $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, 3$ (их можно найти одним из методов, изложенных ранее). Последующие значения y_i при $i = 4, 5, \dots$ определяются следующим образом.

Для предсказания используется *первая формула Милна*:

$$y_i^{\text{пред}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2h'_{i-3} - y'_{i-2} + 2y'_{i-1}).$$

Используя $y_i^{\text{пред}}$, находим $y'_i = f(x_i, y_i^{\text{пред}})$ и производим уточнение (коррекцию) по *второй формуле Милна*:

$$y_i^{\text{кор}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(y'_{i-2} + 4y'_{i-1} + y'_i).$$

Абсолютная погрешность ε_i более точного значения $y_i^{\text{кор}}$ приближенно определяется по формуле

$$\varepsilon_i \approx \frac{1}{29} |y_i^{\text{кор}} - y_i^{\text{пред}}|.$$

Эта формула позволяет на каждом шаге контролировать точность полученного результата. Если искомое решение требуется найти с точностью до ε и окажется, что $\varepsilon_i \leq \varepsilon$, то можем положить

$$y_i \approx y_i^{\text{кор}}$$

и перейти к вычислению y_{i+1} . В противном случае следует уменьшить шаг h .

Остаточные члены первой и второй формул Милна имеют порядок $O(h^5)$ на каждом шаге и порядок $O(h^4)$ на всем отрезке $[x_0, x_n]$.

Метод Милна можно использовать для приближенного решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, а также уравнений высших порядков, которые предварительно следует преобразовать в такие системы.

Замечание. Метод Милна не обладает устойчивостью, поэтому его рекомендуют применять только тогда, когда предполагаемое число шагов невелико.

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (5.16)$$

Двухточечная краевая задача для уравнения (5.16) ставится следующим образом: найти функцию $y = y(x)$, которая внутри отрезка $[a, b]$ удовлетворяет уравнению (5.16), а на концах отрезка — краевым условиям

$$\begin{cases} \varphi_1[y(a), y'(a)] = 0, \\ \varphi_2[y(b), y'(b)] = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (5.16) и граничные условия (5.17) линейны. Такая краевая задача называется *линейной краевой задачей*. В этом случае дифференциальное уравнение и краевые условия записываются так:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (5.18)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \quad (5.19)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — известные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции; α_0 , α_1 , β_0 , β_1 , A , B — заданные постоянные, причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ и $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Если $A = B = 0$, то краевые условия (5.19) называются *однородными*. Методы приближенного решения поставленных краевых задач

можно разбить на две группы: *разностные* методы и *аналитические* методы.

Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Пусть $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) — система равноотстоящих узлов с некоторым шагом $h = \frac{b-a}{n}$ и

$$p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i).$$

Обозначим получаемые в результате расчета приближенные значения искомой функции $y = y(x)$ и ее производных $y'(x)$, $y''(x)$ в узлах x_i через y_i , y'_i , y''_i соответственно. Заменяем приближенно в каждом внутреннем узле производные $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ конечно-разностными отношениями

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2},$$

а на концах положим

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Используя эти формулы, приближенно заменим уравнение (5.18) и краевые условия (5.19) системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + g_i y_i = f_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-2), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (5.20)$$

Получим линейную алгебраическую систему $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными. Решив ее, если это возможно, получим таблицу приближенных значений искомой функции.

Более точные формулы получаются, если заменить $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ центрально-разностными отношениями

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Тогда получаем систему

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + g_i y_i = f_i & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (5.21)$$

При большом n непосредственное решение систем (5.20), (5.21) становится громоздким. Оценка погрешности метода конечных разностей для задачи (5.18), (5.19) имеет вид

$$|y_i - y(x_i)| \leq \frac{h^2 M_4}{96} (b-a)^2,$$

где $y(x_i)$ — значение точного решения при $x = x_i$, $M_4 = \max_{[a,b]} |y^{(4)}(x)|$.

Точность разностного метода можно значительно повысить, если при замене производных использовать многоточечные разностные схемы.

В практических задачах часто встречаются уравнения, в которых функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ заданы таблично с некоторым шагом h . Совершенно естественно такие уравнения решать разностным методом с данным шагом h .

Метод прогонки

Рассмотрим систему, полученную при замене уравнения (5.18) и краевых условий (5.19) конечно-разностными отношениями:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + g_i y_i = f_i & (i = 1, 2, \dots, n-2), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (5.22)$$

Метод прогонки решения таких систем заключается в следующем. Запишем сначала первые $n - 1$ уравнений системы (5.22) в виде

$$y_{i+2} + m_i y_{i+1} + k_i y_i = h^2 f_i,$$

где

$$m_i = -2 + hp_i; \quad k_i = 1 - hp_i + h^2 q_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-2). \quad (5.23)$$

Затем написанная выше система приводится к виду

$$y_{i+1} = c_i (d_i - y_{i+2}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2). \quad (5.24)$$

Числа c_i, d_i последовательно вычисляются по формулам:
при $i = 0$

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_0 (\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_0 \alpha_1},$$

$$d_0 = \frac{k_0 A h}{\alpha_1 - \alpha_0 h} + f_0 h^2;$$

при $i = 1, 2, \dots, n-2$

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, \quad d_i = f_i h^2 - k_i c_{i-1} d_{i-1}. \quad (5.25)$$

Вычисления производятся в следующем порядке.

Прямой ход. По формулам (5.23) вычисляем значения m_i, k_i .

Находим c_0, d_0 и затем, применяя последовательно рекуррентные формулы (5.25), получаем значения c_i, d_i при $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Обратный ход. Из уравнения (5.24) при $i = n-2$ и последнего уравнения системы (5.22) получаем

$$y_{n-1} = c_{n-2} (d_{n-2} - y_n),$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B.$$

Решив эту систему относительно y_n , будем иметь

$$y_n = \frac{\beta_1 c_{n-2} d_{n-2} + B h}{\beta_1 (1 + c_{n-2}) + \beta_0 h}.$$

Используя уже известные числа c_{n-2} , d_{n-2} , находим y_n . Затем вычисляем значения y_i ($i = n-1, \dots, 1$), последовательно применяя рекуррентные формулы (5.24):

$$\begin{cases} y_{n-1} = c_{n-2}(d_{n-2} - y_n), \\ y_{n-2} = c_{n-3}(d_{n-3} - y_{n-1}), \\ \dots \\ y_1 = c_0(d_0 - y_2). \end{cases}$$

Значение y_0 находим из предпоследнего уравнения системы (5.22):

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}.$$

Таким образом, все вычисления как бы «прогоняются» два раза. Вычисления прямого хода заготавливают вспомогательные числа c_i , d_i в порядке возрастания индекса i . При этом для вычисления значений c_0 , d_0 используется краевое условие на левом конце отрезка интегрирования. Затем на первом шаге обратного хода происходит согласование полученных чисел c_{n-2} , d_{n-2} с краевым условием на правом конце отрезка интегрирования, после чего последовательно получают значения искомой функции y_i в порядке убывания индекса i .

Все вычисления метода прогонки рекомендуется располагать так, как показано в табл. 5.3.

Рассмотрим метод прогонки для решения системы, которая получается при замене уравнения (5.18) и второго краевого условия (5.19) *центральными конечно-разностными отношениями*:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + g_i y_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B. \end{cases} \quad (5.26)$$

Запишем первые $n - 1$ уравнений системы (5.26) в виде

$$y_{i+1} + m_i y_i + k_i y_{i-1} = \frac{2h^2 f_i}{2 + hp_i} = \Phi_i,$$

Таблица 5.3

Метод прогонки

Номер сближения	i	x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
I	-1	x_{-1}	$y_{-1}^{(1)}$	$\Delta y_{-1}^{(2)}$	$q_{-1}^{(1)}$	$\Delta y_{-1}^{(1)}$	$\Delta^2 q_{-1}^{(1)}$	
	0	x_0	y_0	$\Delta y_0^{(1)}$	q_0	$\Delta q_0^{(1)}$		
	1	x_1	$y_1^{(1)}$		$q_1^{(1)}$			
II	-1	x_{-1}	$y_{-1}^{(2)}$	$\Delta y_{-1}^{(2)}$	$q_{-1}^{(2)}$	$\Delta q_{-1}^{(2)}$	$\Delta^2 q_{-1}^{(2)}$	$\Delta^3 q_{-1}^{(2)}$
	0	x_0	y_0	$\Delta y_0^{(2)}$	q_0	$\Delta q_0^{(2)}$	$\Delta^2 q_0^{(2)}$	
	1	x_1	$y_1^{(2)}$	$\Delta y_1^{(2)}$	$q_1^{(2)}$	$\Delta q_1^{(2)}$		
	2	x_2	$y_2^{(2)}$		$q_2^{(2)}$			
III	0	x_0	y_0	$\Delta y_0^{(3)}$	q_0	$\Delta q_0^{(3)}$	$\Delta^2 q_0^{(3)}$	$\Delta^3 q_0^{(3)}$
	1	x_1	$y_1^{(2)}$	$\Delta y_1^{(3)}$	$q_1^{(2)}$	$\Delta q_1^{(3)}$	$\Delta^2 q_1^{(3)}$	
	2	x_2	$y_2^{(2)}$	$\Delta y_2^{(3)}$	$q_2^{(2)}$	$\Delta q_2^{(3)}$		
	3	x_3	$y_3^{(2)}$		$q_3^{(2)}$			

где

$$m_i = \frac{2q_i h^2 - 4}{2 + hp_i}; \quad k_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}. \quad (5.27)$$

Затем приводим эти уравнения к виду

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (5.28)$$

где коэффициенты c_i , d_i вычисляются по формулам:

при $i = 1$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_1 (\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_1 \alpha_1}, \\ d_1 = \frac{2f_1 h^2}{2 + p_1 h} + k_1 \frac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} = \varphi_1 - k_1 \frac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}; \end{cases}$$

при $i = 2, 3, \dots, n$

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, \quad d_i = \frac{2f_i h^2}{2 + p_i h} - k_i c_{i-1} d_{i-1} = \varphi_i - k_i c_{i-1} d_{i-1}. \quad (5.29)$$

Вычисления производятся в следующем порядке.

Прямой ход. По формулам (5.27) находим m_i, k_i . Вычисляем c_1, d_1 , а затем по рекуррентным формулам (5.29) находим последовательно c_i, d_i ($i = 2, \dots, n$).

Обратный ход. Запишем уравнение (5.28) при $i = n, i = n-1$ и последнее уравнение системы (5.26):

$$\begin{cases} y_n = c_n (d_n - y_{n+1}), \\ y_{n-1} = c_{n-1} (d_{n-1} - y_n), \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно y_n , будем иметь

$$y_n = \frac{2Bh - \beta_1 (d_n - c_{n-1} d_{n-1})}{2\beta_0 h + \beta_1 \left(c_{n-1} - \frac{1}{c_n} \right)}.$$

Используя уже известные числа $c_n, d_n, c_{n-1}, d_{n-1}$, находим y_n . Значения y_i ($i = n-1, \dots, 1$) получаем из рекуррентных формул (5.27). Для вычисления y_0 используем предпоследнее уравнение (5.26):

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}.$$

Практическое задание 5.1

Приближенное решение дифференциального уравнения методом Эйлера–Коши

Составить решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера–Коши. Вычисления выполнять с четырьмя десятичными знаками.

№ 1. $y' = 0,133(x^2 + \sin(2x)) + 0,872y$.

№ 2. $y' = 0,215(x^2 + \cos(1,5x)) + 1,283y$.

№ 3. $y' = 0,158(x^2 + \sin(0,8x)) + 1,164y$.

№ 4. $y' = 0,173(x^2 + \cos(0,7x)) + 0,754y$.

№ 5. $y' = 0,221(x^2 + \sin(1,2x)) + 0,452y$.

№ 6. $y' = 0,163(x^2 + \cos(0,4x)) + 0,635y$.

№ 7. $y' = 0,218(x^2 + \sin(1,6x)) + 0,718y$.

№ 8. $y' = 0,145(x^2 + \cos(0,5x)) + 0,842y$.

№ 9. $y' = 0,213(x^2 + \sin(1,8x)) + 0,368y$.

№ 10. $y' = 0,127(x^2 + \cos(0,6x)) + 0,573y$.

№ 11. $y' = 0,232(x^2 + \sin(1,4x)) + 1,453y$.

№ 12. $y' = 0,417(x^2 + \cos(0,8x)) + 0,972y$.

№ 13. $y' = 0,324(x^2 + \sin(1,5x)) + 1,612y$.

№ 14. $y' = 0,263(x^2 + \cos(1,2x)) + 0,453y$.

№ 15. $y' = 0,372(x^2 + \sin(0,7x)) + 0,758y$.

№ 16. $y' = 0,343(x^2 + \cos(0,4x)) + 1,315y$.

№ 17. $y' = 0,276(x^2 + \sin(1,6x)) + 0,988y$.

№ 18. $y' = 0,173(x^2 + \cos(0,4x)) + 1,534y$.

$$\text{№ 19. } y' = 0,258(x^2 + \sin(1,4x)) + 0,724y.$$

$$\text{№ 20. } y' = 0,317(x^2 + \cos(1,1x)) + 1,344y.$$

$$\text{№ 21. } y' = 0,166(x^2 + \sin(0,6x)) + 0,883y.$$

$$\text{№ 22. } y' = 0,215(x^2 + \cos(0,9x)) + 1,213y.$$

$$\text{№ 23. } y' = 0,188(x^2 + \sin(1,5x)) + 0,885y.$$

$$\text{№ 24. } y' = 0,314(x^2 + \cos(0,6x)) + 0,772y.$$

$$\text{№ 25. } y' = 0,418(x^2 + \cos(1,2x)) + 1,344y.$$

$$\text{№ 26. } y' = 0,273(x^2 + \cos(1,3x)) + 0,687y.$$

$$\text{№ 27. } y' = 0,176(x^2 + \cos(0,8x)) + 1,247y.$$

$$\text{№ 28. } y' = 0,245(x^2 + \cos(0,4x)) + 1,452y.$$

$$\text{№ 29. } y' = 0,184(x^2 + \cos(0,6x)) + 0,747y.$$

$$\text{№ 30. } y' = 0,212(x^2 + \cos(1,2x)) + 1,544y.$$

Пример выполнения задания 5.1

$$y' = 0,185(x^2 + \cos(0,7x)) + 0,834y.$$

Используем формулу

$$y'_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + \bar{y}'_{i+1}),$$

где $y_{i+1} = y'(x_i + 1, \bar{y}_i + 1)$; $\bar{y}_i + 1 = y_i + hy_i$. Все перечисления представим в таблице.

i	x_i	y_i	y'_i	hy'_i	\bar{y}_{i+1}	\bar{y}'_{i+1}	$y'_i + \bar{y}'_{i+1}$	$\frac{h}{2}(y'_i y + \bar{y}'_{i-1})$
0	0,2	0,25	0,6513	0,0651	0,3151	0,7784	1,4297	0,0715
1	0,3	0,3215	0,7901	0,0790	0,4005	0,9455	1,7356	0,0868
2	0,4	0,4083	0,9599	0,0960	0,5043	1,1495	2,1094	0,1055
3	0,5	0,5138	1,1670	0,1167	0,6305	1,3975	2,5645	0,1282

Окончание табл.

i	x_i	y_i	y'_i	hy'_i	\bar{y}_{i+1}	\bar{y}'_{i+1}	$y'_i + \bar{y}'_{i+1}$	$\frac{h}{2}(y'_i y + \bar{y}'_{i-1})$
4	0,6	0,6420	1,4187	1,1419	0,7839	1,6986	2,1173	0,1559
5	0,7	0,7979	1,7244	0,1724	0,9703	2,0635	3,7879	0,1894
6	0,8	0,9873	2,0947	0,2095	1,1968	2,5050	4,5997	0,2300
7	0,9	1,2173	2,5428	0,2543	1,4716	3,0386	5,5814	0,2791
8	1,0	1,4964	3,0844	0,3084	1,8048	3,6830	6,7674	0,3384
9	1,1	1,8348	3,7382	0,3738	2,2086	4,4604	8,1986	0,4099
10	1,2	2,2447						

Решение дают значения x_i, y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 10$) (первые два столбца таблицы).

В ответ включим значения, округленные до тысячных.

Ответ:

x_i	y_i	x_i	y_i
0,2	0,25	0,8	0,987
0,3	0,322	0,9	1,217
0,4	0,408	1,0	1,496
0,5	0,514	1,1	1,835
0,6	0,642	1,2	2,245
0,7	0,797		

Практическое задание 5.2

Приближенное решение дифференциального уравнения методами Рунге–Кутты и Адамса

Используя метод Адамса со вторыми разностями, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[0, 1]$; шаг $h = 0,1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками. Начальный отрезок определить методом Рунге–Кутты.

№ 1. $y' = 1 + 0,2y \sin(x) - y^2, y(0) = 0$

№ 2. $y' = \cos(x + y) + 0,5(x - y), y(0) = 0.$

№ 3. $y' = \frac{\cos(x)}{x+1} - 0,5y^2.$

- № 4. $y' = \cos(1 - y^2)\cos(x) + 0,6y, y(0) = 0.$
- № 5. $y' = 1 + 0,4y\sin(x) - 1,5y^2, y(0) = 0.$
- № 6. $y' = \frac{\cos(y)}{x + 2} + 0,3y^2, y(0) = 0.$
- № 7. $y' = \cos(1,5x + y) + (x - y), y(0) = 0.$
- № 8. $y' = 1 - \sin(x + y) + \frac{0,5y}{x + 2}, y(0) = 0.$
- № 9. $y' = \frac{\cos(y)}{1,5 + x} + 0,1y^2, y(0) = 0.$
- № 10. $y' = 0,6\sin(x) - 1,25y^2 + 1, y(0) = 0.$
- № 11. $y' = \cos(2x + y) + 1,5(x - y), y(0) = 0.$
- № 12. $y' = 1 - \frac{0,1y}{x + 2} - \sin(2x + y), y(0) = 0.$
- № 13. $y' = \frac{\cos(y)}{1,25 + x} - 0,1y^2, y(0) = 0.$
- № 14. $y' = 1 + 0,8y\sin(x) - 2y^2 + 1, y(0) = 0.$
- № 15. $y' = \cos(1,5x + y) + 1,5(x - y), y(0) = 0.$
- № 16. $y' = 1 - \sin(2x + y) + \frac{0,3y}{x + 2}, y(0) = 0.$
- № 17. $y' = \frac{\cos(y)}{1,75 + x} + 0,5y^2, y(0) = 0.$
- № 18. $y' = 1 + (1 - x)\sin(y) - (2 + x)y, y(0) = 0.$
- № 19. $y' = (0,8 - y^2)\cos(x) + 0,3y, y(0) = 0.$
- № 20. $y' = 1 + 2,2\sin(x) + 1,5y^2, y(0) = 0.$
- № 21. $y' = \cos(x + y) + 0,75(x - y), y(0) = 0.$

$$\text{№ 22. } y' = 1 - \sin(1,25x + y) + \frac{0,5y}{x+2}, \quad y(0) = 0.$$

$$\text{№ 23. } y' = \frac{\cos(y)}{x+2} + 0,3y^2, \quad y(0) = 0.$$

$$\text{№ 24. } y' = 1 - \sin(1,75x + y) + \frac{0,1y}{x+2}, \quad y(0) = 0.$$

$$\text{№ 25. } y' = \frac{\cos(y)}{1,25+x} - 0,5y^2, \quad y(0) = 0.$$

$$\text{№ 26. } y' = \cos(1,5x + y) + 2,25(x + y), \quad y(0) = 0.$$

$$\text{№ 27. } y' = \frac{\cos(y)}{1,5+x} + 1,25y^2, \quad y(0) = 0.$$

$$\text{№ 28. } y' = 1 - (x-1)\sin(y) + 2(x+y), \quad y(0) = 0.$$

$$\text{№ 29. } y' = 1 - \sin(0,75 - y) + \frac{1,75y}{x+1}, \quad y(0) = 0.$$

$$\text{№ 30. } y' = \cos(x - y) + \frac{1,25y}{1,5+x}, \quad y(0) = 0.$$

Пример выполнения задания 5.2

$$y' = 1 + 0,2y\sin(x) - 1,5y^2 = f(x, y);$$

$$y(0) = 0, \quad x \in [0; 1], \quad h = 0,1.$$

1. Определим значения $y_1 = y(0,1), y_2 = y(0,2)$ (начальный отрезок) методом Рунге–Кутты. При этом значения $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ находятся по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right),$$

где $k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$;

$$k_2^{(i)} = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2} \right);$$

$$k_3^i = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2} \right);$$

$$k_4^{(i)} = hf \left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)} \right).$$

Все вычисления будем располагать в табл. 1.

Таблица 1

x	$y(x)$	$\sin x$	$0,2y \cdot \sin(x)$	$-1,5y^2$	$f(x, y)$	$hf(x, y)$	Δy
0	0	0	0	0	1	0,1	0,1000
0,05	0,05	0,0500	0,0005	-0,0038	0,9967	0,0997	0,1994
0,05	0,0498	0,0500	0,0005	-0,0037	0,9968	0,0997	0,1994
0,10	0,0997	0,0998	0,0020	-0,0149	0,9871	0,0987	0,0987
							0,5979 = = (1/6) = = -0,0996
0,10	0,0996	0,0998	0,0020	-0,0149	0,9871	0,0987	0,0987
0,15	0,1490	0,1494	0,0045	0,0333	0,9712	0,0971	0,11942
0,15	0,1482	0,1494	0,0044	-0,0329	0,9715	0,0972	0,11941
0,20	0,1968	0,1987	0,0078	-0,0581	0,9497	0,0950	0,00950
							0,5813 = = (1/6) = = -0,09970
0,2	0,19966	0,1987	0,0078	-0,0580	0,9498		

2. Вычисление следующих значений $y_i = y(x_i)$, где $x_i = x_0 + \Delta ih (i = 3, 4, \dots)$, производим по формуле Адамса со вторыми разностями:

$$y_{i+1} = y_i + q_i + \frac{1}{2} \Delta q_{i-2} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i-2},$$

где $q_i = hf(x_i, y_i)$.

Вычисления производим в следующих таблицах (табл. 2, 3 и 4). Таблица 2 содержит окончательные значения $y(x_i)$ и значения конечных разностей, имеющихся в вычислительной формуле.

Таблица 2

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$q_i = hf_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$
0	0	0	0,1000	0,10000	-0,00129	-0,00244
1	0,1	0,0996	0,9871	0,09871	-0,00373	-0,00204
2	0,2	0,1966	0,9498	0,09498	-0,00577	-0,00154
3	0,3	0,2887	0,8921	0,08921	-0,00731	-0,00088
4	0,4	0,3742	0,8190	0,08190	-0,00819	-0,00035
5	0,5	0,4518	0,7371	0,07371	-0,00854	-0,00008
6	0,6	0,5210	0,6517	0,06517	-0,00846	-0,00049
7	0,7	0,5818	0,5671	0,05671	-0,00797	-0,00067
8	0,8	0,6343	0,4874	0,04874	-0,00730	-
9	0,9	0,6792	0,4144	0,04144	-	-
10	1,0	0,7173	-	-	-	-

В табл. 3 выполняются расчеты, соответствующие формуле Адамса со вторыми разностями.

Таблица 3

i	2	3	4	5
y_i	0,1966	0,28870	0,37418	0,45178
q_i	0,09498	-0,08921	-0,08190	-0,07371
$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	-0,00186	0,00288	0,00366	-0,00410
$\frac{5}{12}\Delta q_{i-2}$	-0,0102	0,00085	0,00064	-0,00037
y_{i+1}	0,28870	0,37418	0,45178	0,52102
i	6	7	8	9
y_i	0,52102	0,58177	0,63428	0,67924
q_i	0,6517	0,05671	0,04874	0,04144
$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	-0,00427	-0,00423	-0,00398	-0,00365
$\frac{5}{12}\Delta q_{i-2}$	-0,00015	0,00003	0,00020	0,00028
y_{i+1}	0,58177	0,63428	0,67924	0,71731

В табл. 4 производится вычисления значений функции

$$y' = f(x_i, y_i) = 1 + 0,2y_i \sin(x_i) - 1,5y_i^2.$$

Таблица 4

x_i	y_i	$0,2\sin(x_i)$	$0,2y_i\sin(x_i)$	$-1,5y^2$	$f(x_i, y_i)$
0,3	0,2887	0,0591	0,0171	-0,1250	0,8921
0,4	0,3742	0,0779	0,0292	-0,2102	0,8190
0,5	0,4518	0,0959	0,0433	-0,3062	0,7371
0,6	0,5210	0,1129	0,0588	-0,4071	0,6517
0,7	0,5818	0,1288	0,0749	-0,5078	0,5671
0,8	0,6343	0,1435	0,0910	-0,6036	0,4874
0,9	0,6792	0,1567	0,1064	-0,6920	0,4144

Ответом являются значения функции $y(x_i)$, полученные в табл. 2.

Практическое задание 5.3

Приближенное решение дифференциального уравнения методом Милна

Используя метод Милна, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[0, 1]$; шаг $h = 0,1$; все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками. Начальный отрезок определить методом Рунге–Кутты.

- № 1. $y' = x + y^2, y(0) = 0,5$.
- № 2. $y' = 2x + 0,1y^2, y(0) = 0,2$.
- № 3. $y' = 2x + y^2, y(0) = 0,3$.
- № 4. $y' = x^2 + xy, y(0) = 0,2$.
- № 5. $y' = 0,2x + y^2, y(0) = 0,1$.
- № 6. $y' = x^2 + y, y(0) = 0,4$.
- № 7. $y' = x^2 + 2y, y(0) = 0,1$.
- № 8. $y' = xy + 0,1y^2, y(0) = 0,6$.
- № 9. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0,7$.
- № 10. $y' = x^2 + 0,2y^2, y(0) = 0,2$.
- № 11. $y' = 0,3x + y^2, y(0) = 0,4$.

- № 12. $y' = 0,1x + 0,2y^2$, $y(0) = 0,3$.
- № 13. $y' = x + 0,3y^2$, $y(0) = 0,3$.
- № 14. $y' = 2x^2 + xy$, $y(0) = 0,5$.
- № 15. $y' = 0,1x^2 + 2xy$, $y(0) = 0,8$.
- № 16. $y' = x^2 + 0,2xy$, $y(0) = 0,6$.
- № 17. $y' = 3x^2 + 0,1xy$, $y(0) = 0,2$.
- № 18. $y' = x^2 + 3xy$, $y(0) = 0,3$.
- № 19. $y' = x^2 + 0,1y^2$, $y(0) = 0,7$.
- № 20. $y' = 2x^2 + 3y^2$, $y(0) = 0,2$.
- № 21. $y' = 0,2x^2 + y^2$, $y(0) = 0,8$.
- № 22. $y' = 0,3x^2 + 0,1y^2$, $y(0) = 0,3$.
- № 23. $y' = xy + 0,1y^2$, $y(0) = 0,5$.
- № 24. $y' = 0,2xy + y^2$, $y(0) = 0,4$.
- № 25. $y' = 0,1xy + 0,3y^2$, $y(0) = 0,2$.
- № 26. $y' = 0,3xy + y^2$, $y(0) = 0,6$.
- № 27. $y' = xy + 0,2y^2$, $y(0) = 0,7$.
- № 28. $y' = 0,1x^2 + 2y^2$, $y(0) = 0,2$.
- № 29. $y' = 3x + 0,1y^2$, $y(0) = 0,4$.
- № 30. $y' = 0,2x + 3y^2$, $y(0) = 0,2$.

Пример выполнения задания 5.3

$$y' = 1,6x + 0,5y^2 = f(x, y), \quad y(0) = 0,3.$$

1. Определение начального отрезка y_0, y_1, y_2, y_3 произведем по формуле Рунге–Кутта:

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right) \quad (i = 0, 1, 2),$$

где $k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$;

$$k_2^i = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2} \right);$$

$$k_3^i = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2} \right);$$

$$k_4^{(i)} = \frac{1}{6} hf \left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)} \right).$$

Все необходимые расчеты осуществляем с помощью табл. 1, в которой $\Delta y_i = \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right)$.

Таблица 1

i	x	y	$1,6x$	$0,5y^2$	$f(x, y)$	k	Δy_i
0	0	0,3	0	0,045	0,0450	0,00450	0,00450
	0,05	0,3022	0,08	0,0457	0,1257	0,01257	0,02514
	0,05	0,3063	0,08	0,0469	0,1269	0,01269	0,025318
	0,1	0,3127	0,16	0,0489	0,2089	0,02089	0,02089
							0,07591 (1/6) = = 0,0127
1	0,1	0,3127	0,16	0,0489	0,2089	0,02089	0,02099
	0,15	0,3231	0,240	0,0522	0,02922	0,02922	0,05844
	0,15	0,3273	0,240	0,0536	0,01936	0,01936	0,05872
	0,20	0,3421	0,32	0,0585	0,3785	0,03785	0,03785
							0,17590 (1/6) = = 0,0293
2	0,2	0,3420	0,32	0,0585	0,3785	0,03785	0,03785
	0,25	0,3609	0,40	0,0651	0,4651	0,04651	0,09302
	0,25	0,3653	0,40	0,0667	0,4667	0,04667	0,09334
	0,30	0,3887	0,48	0,0755	0,5555	0,05555	0,05555
							0,27976 (1/6) = = 0,0466
3	0,30	0,3886	0,48	0,0755	0,5555		

2. Последующие значения функции $y_i = y(x_{i+1}) (i = 3, 4, \dots, 9)$ будем определять методом Милна. Согласно этому методу по ходу вычислений следует составить таблицу, содержащую значения y_i и $f(x_i, y_i)$ (табл. 2).

Таблица 2

i	x	y	$1,6x_i$	$0,5y_i^2$	$f(x_i, y_i)$
0	0	0,3	0	0,0450	0,0450
1	0,1	0,3127	0,16	0,0489	0,2089
2	0,2	0,3420	0,32	0,0585	0,3785
3	0,3	0,3886	0,48	0,0755	0,5555
4	0,4	0,4534	0,64	0,1028	0,7428
5	0,5	0,5376	0,80	0,1445	0,9445
6	0,6	0,6430	0,96	0,2067	0,1667
7	0,7	0,7719	1,12	0,2979	0,4179
8	0,8	0,9280	1,28	0,4306	1,7105
9	0,9	1,1160	1,44	0,6227	2,0627
10	1,0	1,3434	—	—	—

На каждом шаге вычисление ведется в два этапа. Сначала по первой формуле Милна находим

$$y_i^{(1)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}),$$

а затем по второй формуле Милна находим окончательное значение

$$y_i = y_i^{(2)} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + f_i^{(1)}),$$

где $f_i^{(1)} = f(x_i, y_i^{(1)})$.

$$\begin{aligned} 1. \quad y_4^{(1)} &= y_0 + \frac{0,4}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3) = \\ &= 0,3 + \frac{0,4}{3}(2 \cdot 0,2089 - 0,3785 + 2 \cdot 0,5555) = 0,4534; \end{aligned}$$

$$f_4^{(1)} = 0,64 + 0,1028 = 0,7428;$$

$$\begin{aligned} y_4^{(2)} &= 2 + \frac{h}{3}(f_2 - 4f_3 + f_4^{(1)}) = \\ &= 0,3420 + \frac{0,1}{3}(0,3785 + 4 \cdot 0,5555 + 0,7428) = 0,4534. \end{aligned}$$

Из сравнения $y_4^{(1)}$ и $y_4^{(2)}$ имеем $y_4 = 0,4534$.

$$2. \quad y_5^{(1)} = y_1 + \frac{4h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3) =$$

$$= 0,3127 + \frac{0,4}{3}(2,03785 - 0,5555 + 2 \cdot 0,7428) = 0,5376;$$

$$f_5^{(1)} = 0,80 + 0,1445 = 0,9445 ;$$

$$y_5^{(2)} = y_3 + \frac{h}{3}(f_3 - 4f_4 + f_5^{(1)}) =$$

$$= 0,3886 + \frac{0,1}{3}(0,5555 + 4 \cdot 0,7428 + 0,9445) = 0,5376 .$$

Из сравнения $y_5^{(1)}$ и $y_5^{(2)}$ имеем $y_4 = 0,5376$.

$$3. \quad y_6^{(1)} = y_2 + \frac{4h}{3}(2f_3 - f_4 + 2f_5) =$$

$$= 0,3420 + \frac{0,4}{3}(2 \cdot 0,5555 - 0,7428 + 2 \cdot 0,9445) = 0,6430;$$

$$f_6^{(1)} = 0,96 + 0,2067 = 1,1667 ;$$

$$y_6^{(2)} = y_4 + \frac{h}{3}(f_4 - 4f_5 + f_6^{(1)}) =$$

$$= 0,4534 + \frac{0,1}{3}(0,7428 + 4 \cdot 0,9445 + 1,1667) = 0,6430 .$$

$$4. \quad y_7^{(1)} = y_3 + \frac{4h}{3}(2f_4 - f_5 + 2f_6) =$$

$$= 0,3886 + \frac{0,4}{3}(2 \cdot 0,7428 - 0,9445 + 2 \cdot 1,1667) = 0,7719;$$

$$f_7^{(1)} = 1,12 + 0,2979 = 1,4179 ;$$

$$y_7^{(2)} = y_5 + \frac{h}{3}(f_5 - 4f_6 + f_7^{(1)}) =$$

$$= 0,5376 + \frac{0,1}{3}(0,9445 + 4 \cdot 1,1667 + 1,4179) = 0,7719 .$$

$$5. \quad y_8^{(1)} = y_4 + \frac{4h}{3}(2f_5 - f_6 + 2f_7) =$$

$$= 0,5376 + \frac{0,4}{3}((2 \cdot 0,9445 - 1,1667) + 2 \cdot 1,4179) = 0,9278;$$

$$f_8^{(1)} = 1,28 + 0,4304 = 1,7104 ;$$

$$y_8^{(2)} = y_6 + \frac{h}{3}(f_6 - 4f_7 + f_8^{(1)}) =$$

$$= 0,6430 + \frac{0,1}{3}(1,1667 + 4 \cdot 1,4179 + 1,7104) = 0,9280.$$

$$6. \quad y_9^{(1)} = y_3 + \frac{4h}{3}(2f_6 - f_7 + 2f_8) =$$

$$= 0,5376 + \frac{0,4}{3}(2 \cdot 1,1667 - 1,4179 + 2 \cdot 1,7106) = 1,1158;$$

$$f_9^{(1)} = 1,44 + 0,6225 = 2,0625 ;$$

$$y_9^{(2)} = y_7 + \frac{h}{3}(f_7 - 4f_8 + f_9^{(1)}) =$$

$$= 0,7719 + \frac{0,1}{3}(1,4179 + 4 \cdot 1,7106 + 2,0625) = 1,1160.$$

$$7. \quad y_{10}^{(1)} = y_6 + \frac{4h}{3}(2f_7 - f_8 + 2f_9) =$$

$$= 0,6430 + \frac{0,4}{3}(2 \cdot 1,4179 - 1,7106 + 2 \cdot 2,0627) = 1,3431;$$

$$f_{10}^{(1)} = 1,6 + 0,9020 = 2,5020 ;$$

$$y_{10}^{(2)} = y_8 + \frac{h}{3}(f_8 - 4f_9 + f_{10}^{(1)}) =$$

$$= 0,9280 + \frac{0,1}{3}(1,7106 + 4 \cdot 2,0627 + 2,5020) = 1,3434.$$

Ответом являются значения функции, приведенные в табл. 2.

Практическое задание 5.4

Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения методом конечных разностей

Используя метод конечных разностей, составить решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$; шаг $h = 0,1$.

- № 1. $y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$; $\begin{cases} y(0,7) = 0,5; \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1,2. \end{cases}$
- № 2. $y'' - xy' + 2y = x + 1$; $\begin{cases} y(0,7) = 0,5; \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1,2. \end{cases}$
- № 3. $y'' + xy' + y = x + 1$; $\begin{cases} y(0,5) + 2y'(0,5) = 1; \\ y'(0,8) = 1,2. \end{cases}$
- № 4. $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3$; $\begin{cases} y(0,2) = 2; \\ 0,5y(0,5) - y(0,5) = 1. \end{cases}$
- № 5. $y'' + 2y' - xy = x^2$; $\begin{cases} y'(0,6) = 0,7; \\ y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 1. \end{cases}$
- № 6. $y'' - y' + \frac{2y}{x} = x + 0,4$; $\begin{cases} y(1,1) - 0,5y'(1,1) = 2; \\ y'(1,4) = 4. \end{cases}$
- № 7. $y'' + 3y' + \frac{y}{x} = 1$; $\begin{cases} y(0,4) = 2; \\ y(0,7) + 2y'(0,7) = 0,7. \end{cases}$
- № 8. $y'' + 3y' - \frac{y}{x} = x + 1$; $\begin{cases} y'(1,2) = 1; \\ 2y(1,5) - y'(1,5) = 0,5. \end{cases}$
- № 9. $y'' + \frac{y'}{2} + 3y = 2x^2$; $\begin{cases} y(1) + 2y'(1) = 0,6; \\ y(1,3) = 1. \end{cases}$
- № 10. $y'' + 1,4y' - xy = 0,5$; $\begin{cases} 2y(1,3) - y'(1,3) = 1; \\ y(1,6) = 3. \end{cases}$
- № 11. $y'' + 2xy' - y = 0,4$; $\begin{cases} 2y(0,3) + y'(0,3) = 1; \\ y'(0,6) = 2. \end{cases}$
- № 12. $y'' - 0,5xy' + y = 2$; $\begin{cases} y(0,4) = 1,2; \\ y(0,7) + 2y'(0,7) = 1,4. \end{cases}$
- № 13. $y'' + \frac{2y'}{x} - 3y = 2$; $\begin{cases} y'(0,8) = 1,5; \\ 2y(1,1) + y'(1,1) = 3. \end{cases}$

- № 14. $y'' + 2x^2y' + y = x$; $\begin{cases} 2y(0,5) - y'(0,5) = 1; \\ y(0,8) = 3. \end{cases}$
- № 15. $y'' + 3xy' + 2y = 1,5$; $\begin{cases} y'(0,7) = 1,3; \\ 0,5y(1) + y'(1) = 2. \end{cases}$
- № 16. $y'' + 2xy' - 2y = 0,6$; $\begin{cases} y'(2) = 1; \\ 0,4y(2,3) - y'(2,3) = 1. \end{cases}$
- № 17. $y'' + \frac{y'}{x} - 0,4y = 2x$; $\begin{cases} y(0,6) - 0,3y'(0,6) = 0,6; \\ y'(0,9) = 1,7. \end{cases}$
- № 18. $y'' + \frac{y'}{2x} + 0,8y = x$; $\begin{cases} y(1,7) + 1,2y'(1,7) = 2; \\ y'(2) = 1. \end{cases}$
- № 19. $y'' + \frac{y'}{3} + xy = 2$; $\begin{cases} y(0,8) = 1,6; \\ 3y(1,1) - 0,5y'(1,1) = 1. \end{cases}$
- № 20. $y'' + 0,8y' - xy = 1,4$; $\begin{cases} y(1,8) = 0,5; \\ 2y(2,1) - y'(2,1) = 1,7. \end{cases}$
- № 21. $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$; $\begin{cases} 0,5y(0,9) + y'(0,9) = 1; \\ y(1,2) = 0,8. \end{cases}$
- № 22. $y'' - \frac{y'}{4} + \frac{2y}{x} = \frac{x}{2}$; $\begin{cases} 1,5y(1,3) - y'(1,3) = 0,6; \\ 2y(1,6) = 0,3. \end{cases}$
- № 23. $y'' + 0,5y' + 0,5xy = 2x$; $\begin{cases} y'(1) = 0,5; \\ 2y(1,3) + y'(1,3) = 2. \end{cases}$
- № 24. $y'' + 2y' - 1,5xy = \frac{2}{x}$; $\begin{cases} y'(0,8) = 1; \\ y(1,1) - 2y'(1,1) = 1. \end{cases}$
- № 25. $y'' + 2xy' - 1,5 = x$; $\begin{cases} 1,4y(1,1) + 0,5y'(1,1) = 2; \\ y'(1,4) = 2,5. \end{cases}$
- № 26. $y'' - \frac{xy'}{2} + 0,5y = 2x$; $\begin{cases} 0,4y(0,2) - y'(0,2) = 1,5; \\ y'(0,5) = 0,4. \end{cases}$

$$\begin{array}{ll}
\text{№ 27.} & y'' + 0,6xy' - 2y = 1; \quad \begin{cases} y(1,5) = 0,6; \\ 2y(1,8) - 0,8y'(1,8) = 3. \end{cases} \\
\text{№ 28.} & y'' - \frac{y'}{2x} - y = \frac{2}{x}; \quad \begin{cases} y(0,6) = 1,3; \\ 0,5y(0,9) - 1,2y'(0,9) = 1. \end{cases} \\
\text{№ 29.} & y'' - 0,5x^2y' + 2y = x^2; \quad \begin{cases} y(1,6) + 0,7y'(1,6) = 2; \\ y(1,9) = 0,8. \end{cases} \\
\text{№ 30.} & y'' - xy' + 2xy = 0,8; \quad \begin{cases} y(1,2) - 0,5y'(1,2) = 1; \\ y'(1,5) = 2. \end{cases}
\end{array}$$

Пример выполнения задания 5.4

$$y'' + xy' - 0,5\frac{y}{x} = 1;$$

$$\begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1; \\ y(2,3) = 2,15. \end{cases}$$

Разбив отрезок $[2; 2,3]$ на части с шагом $h = 0,1$, получим четыре узловые точки с абсциссами $x_0 = 2; x_1 = 2,1; x_2 = 2,2; x_3 = 2,3$. Две другие точки $x_0 = 2$ и $x_3 = 2,3$ являются конечными, а другие — внутренними. Данное уравнение во внутренних точках заменим конечно-разностным уравнением

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0,5\frac{y_i}{x_i} = 1 \quad (i = 1, 2).$$

Из краевых точек условий составим конечно-разностные уравнения в конечных точках:

$$\begin{cases} y_0 + 2\frac{-y_0 + 4y_1 - 3y_0}{2p} = 1 (i = 0), \\ y_3 = 2,15 (i = 3). \end{cases}$$

Данная задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 + \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{0,1} = 1; \\ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0,01} + 2,1 \frac{y_2 - y_0}{0,2} - 0,5 \frac{y_1}{2,1} = 1; \\ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0,01} + 2,2 \frac{y_3 - y_1}{0,2} - 0,5 \frac{y_3}{2,2} = 1; \\ y_3 = 2,15. \end{cases}$$

Выполнив преобразования, имеем

$$\begin{cases} -2,9y_0 + 4y_1 - y_2 = 0,1; \\ 375,9y_0 - 841y_1 + 461,1y_2 = 4,2; \\ 391,6y_1 - 881y_2 = -1045,66. \end{cases}$$

Для решения полученной системы воспользуемся, например, схемой «главных элементов».

m_i	y_0	y_1	y_2	Свободные члены	Σ
-0,00113507 0,526788 -1	-2,9 375,9 0	4 -841 391,6	-1 464,1 -881	0,1 4,2 -1045,66	0,2 3,2 -1535,06
0,00560179 -1	-2,9 375,9	3,55551 -643,7098	—	1,28690 -546,6411	1,94240 -805,4511
-1	-0,79429	—	—	-1,77527	-2,56957
	2,2350 3,2351	2,1849 3,1849	2,1580 3,1580		

Ответ:

x	y	x	y
2,0	2,235	2,2	2,158
2,1	2,185	2,3	2,150

Практическое задание 5.5

Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения методом прогонки

Используя метод прогонки, составить решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$; шаг $h = 0,05$. Воспользоваться вариантами работы 5.4.

Пример выполнения задания 5.5

$$y'' + xy' - 0,5 \frac{y}{x} = 1;$$

$$\begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1; \\ y(2,3) = 2,15. \end{cases}$$

В данной краевой задаче $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $B = 2,15$; узловые точки имеют абсциссы $x_i = 2 + 0,005i$; коэффициенты $p_i = x_i, q_i = -\frac{0,5}{x_i}; f_i = 1 (i = 0, 1, 2, \dots, 6)$.

Метод прогонки состоит из «прямого хода», в котором определяют коэффициенты

$$m_i = \frac{2h^2 q_i - 4}{2 + hp_i}, \quad n_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}, \quad F_i = \frac{2f_i}{2 + hp_i},$$

где $(i = 1, 2, \dots, n-1)$,

а также

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}, \quad c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}},$$

$$d_i = F_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

После выполнения «прямого хода» переходят к выполнению «обратного хода», который состоит в определении значений искомой функции по формулам

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (c_{n-1} + 1)},$$

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}),$$

где $(i = n-1, n-2, \dots, 1, 0)$.

Здесь

$$m_i = -\frac{4 + \frac{0,0025}{x_i}}{2 + 0,05x_i}; \quad n_i = \frac{2 - 0,05x_i}{2 + 0,05x_i};$$

$$F_i = \frac{2}{2 + 0,05x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 5);$$

$$c_0 = \frac{2}{0,05 - 2} = -1,02564; d_0 = \frac{0,05}{2} = 0,025.$$

Все вычисления будут располагаться в таблице.

i	m_i	x_i	n_i	$h^2 F_i$	c_i	d_i	y_i
0	2,00	—	—	—	-1,02564	0,025000	2,2490
1	2,05	-1,903077	0,902497	0,002378	-1,02308	0,095519	2,2178
2	2,10	-1,900803	0,904238	0,002375	-1,02063	0,025878	2,1933
3	2,15	-1,898535	0,897983	0,002372	-1,01830	0,026090	2,1748
4	2,20	-1,896273	0,895734	0,002370	-1,01611	0,026167	2,1618
5	2,25	-1,894017	0,893491	0,002367	-1,01406	0,026123	2,1537
6	2,30	—	—	—	—	—	2,15

Ответ:

x	y	x	y
2,00	2,249	2,20	2,162
2,05	2,218	2,25	2,154
2,10	2,193	2,30	2,150
2,15	2,175		

ГЛАВА 6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Численное решение уравнений с частными производными

В общем случае уравнение с частными производными имеет вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \quad (6.1)$$

где x, y — независимые переменные; u — искомая функция; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} — ее первые и вторые частные производные по аргументам u (для удобства записи производных «штрихи» опускаются).

Решением уравнения (6.1) называется функция $u = u(x, y)$, обращающая это уравнение в тождество. График решения представляет собой поверхность в пространстве $Oxuy$.

Пример. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Интегрируя это уравнение по y два раза, будем иметь

$$u = u\varphi(x) + \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции.

Интегральные поверхности представляют собой линейчатые поверхности, образующие которых параллельны координатной плоскости Oxy .

Уравнение (6.1) называется *линейным* или *вполне линейным*, если оно первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведения, т.е. если это уравнение может быть записано в виде

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y), \quad (6.2)$$

причем коэффициенты A, B, C, a, b, c могут зависеть лишь от x и y . В частности, если эти коэффициенты не зависят от x и y , уравнение (6.2) представляет собой *линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами*. Остановимся подробнее на случае линейного уравнения (6.2).

Пусть $D = AC - B^2$ — *дискриминант уравнения*. В зависимости от знака функции D линейное дифференциальное уравнение (6.2) относится в данной области к одному из следующих типов:

$D > 0$ — *эллиптический тип*;

$D = 0$ — *параболический тип*;

$D < 0$ — *гиперболический тип*;

D не сохраняет постоянного знака — *смешанный тип*.

Тип линейного уравнения (6.2) является его важной особенностью и сохраняется при любом *невыврожденном преобразовании*

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

т.е. таком, что якобиан

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

С линейным дифференциальным уравнением

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y)$$

связано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A(dy)^2 - 2B dx dy + C(dx)^2 = 0,$$

называемое *характеристическим*; решения характеристического уравнения называются *характеристиками линейного дифференциального уравнения*.

Для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами гиперболического типа существует два семейства характеристик $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$.

Производя в линейном дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами преобразование

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

т.е. принимая параметры этих семейств за новые криволинейные координаты, будем иметь канонический вид уравнения гиперболического типа:

$$u_{\xi\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами параболического типа имеет одно семейство характеристик

$$\varphi(x, y) = C.$$

В результате преобразования $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = y$ уравнение параболического типа приводится к каноническому виду:

$$u_{\eta\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Линейное дифференциальное уравнение эллиптического типа допускает два семейства комплексных характеристик:

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1; \quad \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2.$$

Производя преобразования $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, получим канонический вид уравнения эллиптического типа:

$$\Delta u + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta),$$

где $\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$ — оператор Лапласа.

Простейшее уравнение эллиптического типа $\Delta u = 0$ носит название *уравнения Лапласа*. Неоднородное уравнение Лапласа $\Delta u = f(\xi, \eta)$ называется *уравнением Пуассона*.

Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача. Корректность постановки смешанной задачи

Дифференциальное уравнение с частными производными имеет в общем случае бесчисленное множество решений. Поэтому если физический процесс описывается с помощью уравнения с частными производными, то для однозначной характеристики этого процесса нужно к уравнению присоединить какие-то дополнительные условия. Эти дополнительные данные в простейшем случае состоят из *начальных* и *краевых* (граничных) условий. В сущности, различить эти условия можно лишь в том случае, если одна из независимых переменных дифференциального уравнения играет роль времени,

а другая — пространственной координаты (для случая двух независимых переменных). При этом условия, относящиеся к начальному моменту времени, называются *начальными*, а условия, относящиеся к фиксированным значениям координат (обычно это координаты граничных точек рассматриваемого линейного континуума), — *краевыми*.

Рассмотрим общую постановку задачи с начальными условиями. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$L[u] = F(x, y), \quad (6.3)$$

где

$$L[u] = A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u. \quad (6.4)$$

Отыскание решения $u = u(x, y)$ уравнения (6.3), удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x, y_0) = \varphi(x), \quad u_y(x, y_0) = \varphi_1(x), \quad (6.5)$$

называется *задачей Коши*, а сами условия носят название *начальных данных Коши*.

Задача Коши допускает простую геометрическую интерпретацию: требуется найти интегральную поверхность $u = u(x, y)$ уравнения (6.3), проходящую через данную пространственную кривую $y = y_0$, $u = \varphi(x)$ и касающуюся в точках $M(x, y_0, u)$ этой кривой заданной системы векторов \mathbf{a} , расположенных в плоскостях $x = \text{const}$ и составляющих с осью Oy угол β , определяемый равенством

$$\text{tg } \beta = \varphi_1(x).$$

Если рассматривать y как время, то задача Коши имеет следующую механическую трактовку: в начальный момент времени $y = y_0$ заданы форма плоской линии $u = \varphi(x, y_0)$ и распределение скоростей ее точек $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_1(x, y_0)$. Предполагая, что каждая точка $M(x, u)$ линии движется параллельно оси Ou , причем дифференциальный закон движения дается уравнением (6.3), требуется определить форму линии для последующих моментов времени $y > y_0$.

Условия (6.5) задают начальные данные Коши для прямой $y = y_0$. Однако это не является обязательным: можно задавать начальные данные на любой гладкой кривой

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Таким образом, приходим к *общей задаче Коши* — найти решение $u = u(x, y)$ дифференциального уравнения (6.3), удовлетворяющее *начальным условиям* кривой

$$u|_{\gamma} = \varphi(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\gamma} = \varphi_1(x, y).$$

Вместо производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ можно задавать производную $\frac{\partial u}{\partial y}$, так как на кривой $\Phi(x, y) = 0$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = d\varphi(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0.$$

Можно также задавать нормальную производную

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y).$$

Задача Коши обычно ставится для линейного уравнения (6.3) гиперболического и параболического типов.

Если уравнение (6.3) гиперболического типа, то для единственности решения задачи Коши необходимо, чтобы начальная кривая $\Phi(x, y) = 0$ не являлась характеристикой. Если это последнее условие выполнено и начальные данные заданы на конечной дуге PQ кривой $\Phi(x, y) = 0$, то решение задачи Коши, вообще говоря, определено и однозначно в криволинейном треугольнике PQR (*область распространения*), образованном дугой PQ и дугами характеристик PR и QR различных семейств, проходящих через концы P и Q . Предполагается, что коэффициенты дифференциального уравнения определены и непрерывны в соответствующей области.

Пусть начальные данные Коши для уравнения (6.3) заданы на отрезке $a \leq x \leq b$, а решение $u = u(x, y)$ этого уравнения надо определить в полуполосе $K \{a \leq x \leq b; 0 \leq y < \infty\}$.

Тогда для однозначности этого решения дополнительно нужно задать условия на прямых $x = a$ и $x = b$, что приводит к *смешанной задаче*. Достаточно общей задачей этого типа является нахождение

в полуполосе K решения $u = u(x, y)$ дифференциального уравнения (6.3), удовлетворяющего начальным и граничным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \varphi_1(x) \quad (a \leq x \leq b, y = 0) \quad (6.6)$$

и

$$\begin{cases} \alpha_0 u(a, y) + \alpha_1 u_x(a, y) = \psi(y), \\ \beta_0 u(a, y) + \beta_1 u_x(a, y) = \psi_1(y), \end{cases} \quad (6.7)$$

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0, \quad 0 \leq y < \infty.$$

Особого внимания заслуживает предельный случай, когда $a = -\infty$ или $b = \infty$. Здесь краевые условия (6.7) или совсем отпадают, или заменяются некоторыми условиями «на бесконечности».

Смешанная задача для уравнения (6.3) в общем аспекте может быть сформулирована следующим образом: дана конечная или бесконечная область G в плоскости Oxy , имеющая кусочно-гладкую границу Γ .

Требуется найти в области G решение дифференциального уравнения

$$L[u] = F(x, y), \quad (6.8)$$

если на некоторых частях границы $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ выполнены соотношения

$$\begin{cases} L_{ij}[u] = \varphi_{ij}(x, y); \\ (x, y) \in \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, \rho_i), \end{cases} \quad (6.9)$$

где L_{ij} — или *дифференциальные операторы* по переменным и порядка не выше первого, или *конечные соотношения*, а $\varphi_{ij}(x, y)$ — заданные функции. Задачу Коши, очевидно, можно рассматривать как частный случай этой общей смешанной задачи.

При рассмотрении физических проблем функции $\varphi_{ij}(x, y)$ обычно определяются приближенно из опыта. Поэтому решение такой смешанной задачи имеет практическую ценность лишь в том случае, если небольшие ошибки в начальных и краевых условиях не могут привести к большим отклонениям соответствующего решения. В этом случае говорят, что смешанная задача поставлена *корректно*, или, иначе говоря, непрерывно зависит от начальных и краевых условий.

Определение. Смешанная задача (6.8)–(6.9) называется *корректно поставленной* в области G , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\eta = \eta(\xi) > 0$ такое, что при изменении функций $\varphi_{ij}(x, y)$ на величины, модуль которых меньше чем η , решение $u = u(x, y)$ изменяется во всей области G меньше чем на ε . В противном случае считается, что задача *поставлена некорректно*.

Для уравнений эллиптического типа задача Коши обычно не рассматривается. Это объясняется тем, что, как правило, задача Коши для уравнений эллиптического типа поставлена некорректно, т.е. ничтожно малые изменения начальных данных могут повлечь существенное изменение решения.

Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

Исследования стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность и др.) часто приводят к уравнениям эллиптического типа

$$L[u] \equiv \Delta u + au_x + bu_y + cu = F(x, y), \quad (6.10)$$

где $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$ и $F(x, y)$ — непрерывные функции. Для этих уравнений обычно ставятся лишь краевые задачи, так как задача Коши для уравнений эллиптического типа может быть некорректной.

Наиболее часто встречаются следующие краевые задачи.

Первая краевая задача. На контуре Γ , ограничивающем область G , задана непрерывная функция $\varphi(P) = \varphi(x, y)$. Требуется найти функцию $u(P) = u(x, y)$, удовлетворяющую внутри G уравнению (6.10) и принимающую на границе заданные значения $\varphi(P)$, т.е. должны быть выполнены условия

$$L[u(P)] = F(P) \text{ при } P \in G,$$

$$u(P) = \varphi(P) \text{ при } P \in \Gamma.$$

Вторая краевая задача. На контуре Γ , ограничивающем область G , задана непрерывная функция $\varphi_1(P)$. Требуется найти функцию $u(P) = u(x, y)$, удовлетворяющую внутри G уравнению (6.10), нормальная производная которой на Γ принимает заданные значения $\varphi_1(P)$, т.е. требуется, чтобы

$$L[u(P)] = F(P) \text{ при } P \in G, \quad \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \varphi_1(P) \text{ при } P \in \Gamma.$$

Третья краевая задача. На контуре Γ , ограничивающем область G , задана непрерывная функция $\psi(P) = \psi(x, y)$. Требуется найти функцию $u(P) = u(x, y)$ такую, чтобы

$$L[u(P)] = F(P) \text{ при } P \in G,$$

$$\alpha_0 u(P) + \alpha_1 \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \psi(P) \text{ при } P \in \Gamma,$$

где $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$.

Третью краевую задачу можно рассматривать как общую. Действительно, при $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$ получаем первую краевую задачу, а при $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$ — вторую краевую задачу. Заметим, что если область G ограниченная, то соответствующая краевая задача называется *внутренней*, в противном случае — *внешней*.

Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ первая краевая задача называется *задачей Дирихле*, вторая — *задачей Неймана* и третья — *смешанной краевой задачей*.

Метод сеток

Метод сеток, или метод конечных разностей, является одним из самых распространенных в настоящее время методов численного решения уравнений с частными производными. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. При рассмотрении этого метода ограничимся случаем двух независимых переменных.

Пусть в плоскости xOy имеется некоторая область G с границей Γ . Построим на плоскости два семейства параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$y = y_0 + kl \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Точки пересечения этих прямых назовем *узлами*. Два узла называются *соседними*, если они удалены друг от друга в направлении оси Ox или Oy на расстояние, равное шагу сетки h или l соответственно. Выделим узлы, принадлежащие области $G + \Gamma$, а также некоторые

узлы, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии, меньшем чем шаг, от границы Γ . Те узлы, у которых все четыре соседних узла принадлежат выделенному множеству узлов, называются *внутренними*. Оставшиеся из выделенных узлов называются *граничными*.

Значения искомой функции $u = u(x, y)$ в узлах сетки будем обозначать через $u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kl)$. В каждом внутреннем узле $x_0 + ih, y_0 + kl$ заменим частные производные разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}. \quad (6.11)$$

В граничных точках, как правило, пользуются менее точными формулами вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l}. \quad (6.12)$$

Аналогично заменяются частные производные второго порядка, например:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{l^2}. \end{cases} \quad (6.13)$$

Указанные замены производных в каждом узле сетки позволяют свести решение уравнений с частными производными к решению системы разностных уравнений.

Метод сеток для задачи Дирихле

Первая краевая задача, или задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (6.14)$$

ставится следующим образом: найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую внутри некоторой области G уравнению (6.14), а на границе Γ — условию

$$u|_r = \varphi(x, y), \quad (6.15)$$

где $\varphi(x, y)$ — заданная непрерывная функция.

Выбрав шаги h и l по x и y соответственно, строим сетку

$$x_i = x_0 + ik \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots),$$

$$y_i = y_0 + kl \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

и заменяем в каждом внутреннем узле (x_i, y_k) производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ конечно-разностными отношениями (6.13), а уравнение (6.14) — конечно-разностными уравнениями

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} - u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} - u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik}, \quad (6.16)$$

где $f_{ik} = f(x_i, y_k)$.

Уравнения (6.16) вместе со значениями u_{ik} в граничных узлах образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $u(x, y)$ в узлах (x_i, y_k) . Наиболее простой вид эта система имеет для прямоугольной области и для $l = h$. В этом случае уравнения (6.16) записываются следующим образом:

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik} = h^2 f_{ik}, \quad (6.17)$$

а значения в граничных узлах в точности равны значениям граничной функции. При $f(x, y) \equiv 0$ уравнение (6.14) называется *уравнением Лапласа* и соответствующие конечно-разностные уравнения имеют вид

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1}). \quad (6.18)$$

При составлении уравнений (6.17) и (6.18) была использована схема узлов, изображенная на рис. 6.1. Здесь и в дальнейшем на рисунках указаны только индексы узла, например узел, (x_i, y_k) обозначается через (i, k) .

Иногда бывает удобнее использовать схему узлов, показанную на рис. 6.2

В этом случае уравнению Лапласа соответствуют следующие конечно-разностные уравнения:

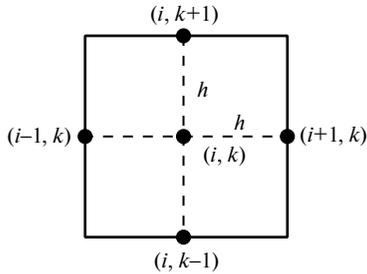


Рис. 6.1. Схема узлов, использованных при составлении уравнений

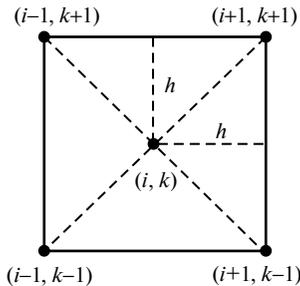


Рис. 6.2. Схема узлов, соответствующая конечно-разностным уравнениям

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}), \quad (6.19)$$

а для уравнения Пуассона будем иметь

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}) + \frac{h^2}{2} f_{ik}.$$

Погрешность замены дифференциального уравнения разностным, т.е. остаточный член R_{ik} для уравнения Лапласа, оценивается неравенством

$$|R_{ik}| \leq \frac{h^2}{6} M_4,$$

где $M_4 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}$.

Погрешность приближенного решения, полученного разностным методом, складывается из трех погрешностей:

- погрешности замены дифференциального уравнения разностным;
- погрешности аппроксимации краевых условий;
- погрешности, получаемой в результате того, что система разностных уравнений решается приближенным методом.

Итерационный метод решения системы конечно-разностных уравнений

Непосредственное решение системы конечно-разностных уравнений методами последовательного исключения при большом числе узлов оказывается слишком громоздким. Здесь более удобны итерационные методы решения, которые учитывают специальный вид таких систем и оказываются удобными для реализации на ЭВМ.

Рассмотрим один из наиболее простых методов — *процесс усреднения Либмана* для системы (6.18).

Согласно методу Либмана вычисления ведутся так: выбрав начальные приближения $u_{ij}^{(0)}$, последовательные приближения $u_{ij}^{(k+1)}$ для внутренних узлов сеточной области определяем по формуле

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.20)$$

Для получения начальных приближений можно указать два способа:

- значение $u_{ij}^{(0)}$ во внутренних узлах получают путем интерполяции, использующей известные граничные значения;
- составляют систему конечно-разностных уравнений для сетки с более крупным шагом и решают ее методом исключения, а затем полученные значения интерполируют на узлы данной сетки.

Доказано, что для любого шага h процесс Либмана сходится к точному решению независимо от выбора начальных значений, т.е. существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{ij}^{(k)} = u_{ij}.$$

Итерационный процесс будет сходиться значительно быстрее, если при вычислении последующих средних арифметических использовать не только значения предыдущего приближения, но и вновь найденные значения. Обычно итерации продолжают до тех пор, пока в двух последовательных приближениях не совпадет тре-

буемое количество десятичных знаков. Для оценки погрешности приближенного решения уравнения Лапласа можно использовать принцип Рунге, согласно которому погрешность ε_h приближенного решения u_h , полученного с шагом h , дается приближенной формулой

$$\varepsilon_h \approx \frac{u_h - u_{2h}}{3}, \tag{6.21}$$

где u_{2h} — приближенное решение, полученное с шагом $2h$. Отметим, что указанный метод итераций приводит к выполнению стандартной операции усреднения в каждом внутреннем узле, поэтому он оказывается очень удобным для программирования на ЭВМ.

Решение краевых задач для криволинейных областей

Если граница Γ области G криволинейна, то значения u_{ij} для граничных узлов получают путем переноса значений из точек границы Γ . Погрешность, получаемую в результате такого переноса, можно значительно уменьшить, если для каждого граничного узла составлять уравнение следующего вида:

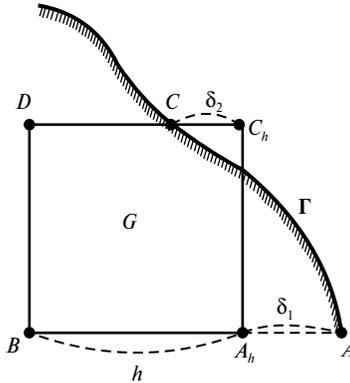


Рис. 6.3. Перенос значений из точек границы

- для узла A_h (рис. 6.3)

$$u_{A_h} = \frac{\delta_1 u_B + h u_A}{\delta_1 + h}; \tag{6.22}$$

- для узла C_h (см. рис. 6.3)

$$u_{C_h} = \frac{\delta_2 u_D + h u_C}{\delta_2 + h}. \tag{6.23}$$

Получив одно из таких уравнений для каждого граничного узла и присоединив их к системе (6.17) или (6.18), получим систему алгебраических уравнений относительно значений u_{ij} в узлах сетки. Если эту систему решать методом Либмана, то последовательные приближения граничных значений будут вычисляться по формулам

$$u_{A_h}^{(k+1)} = u_A + \frac{u_B^{(k)} - u_A}{h + \delta_1} \delta_1, \quad (6.24)$$

$$u_{C_h}^{(k+1)} = u_C + \frac{u_D^{(k)} - u_C}{\delta_2 - h} \delta_2. \quad (6.25)$$

Метод сеток для уравнения параболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а именно: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.26)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < s) \quad (6.27)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t). \quad (6.28)$$

К задаче (6.26)–(6.28) приводит, в частности, задача о распространении тепла в однородном стержне длины s . Путем введения новой переменной $\tau = a^2 t$ уравнение (6.26) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

поэтому в дальнейшем примем $a = 1$.

Построим в полуполосе $t \geq 0, 0 \leq x \leq s$ (рис. 6.4) два семейства параллельных прямых:

$$x = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad t = jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Обозначим $x_i = ih, t_j = jl, u(x_i, t_j) = u_{ij}$ и приближенно заменим в каждом внутреннем узле (x_i, t_j) производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением

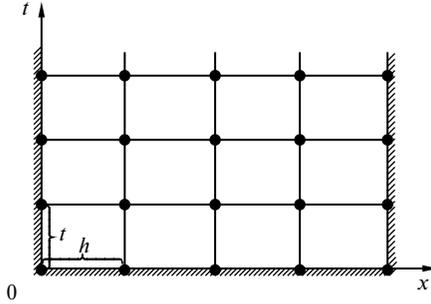


Рис. 6.4. Семейства параллельных прямых для полуполосы $t \geq 0, 0 \leq x \leq s$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (6.29)$$

а производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ одним из двух разностных отношений

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l}, \quad (6.30)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l}. \quad (6.31)$$

Тогда для уравнения (6.26) при $a = 1$ получаем два типа конечно-разностных уравнений:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (6.32)$$

$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (6.33)$$

Обозначив $\sigma = l / h^2$, приводим эти уравнения к виду

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad (6.34)$$

$$(1 + 2\sigma)u_{ij} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0. \quad (6.35)$$

Отметим, что для составления уравнения (6.34) была использована схема узлов, данная на рис. 6.5, — *явная схема*, для уравнения (6.35) — схема узлов, данная на рис. 6.6, — *неявная схема*.

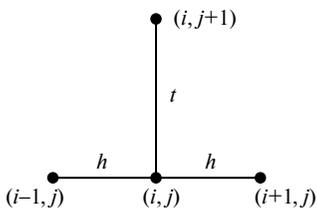


Рис. 6.5. Явная схема для уравнения

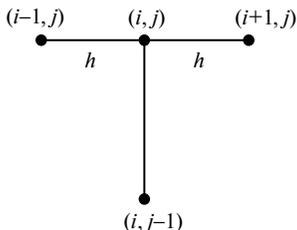


Рис. 6.6. Неявная схема для уравнения

При выборе числа σ в уравнениях (6.34), (6.35) следует учитывать два обстоятельства:

- погрешность замены дифференциального уравнения разностным должна быть наименьшей;
- разностное уравнение должно быть устойчивым.

Доказано, что уравнение (6.34) будет устойчивым при $0 < \sigma \leq 1/2$, а уравнение (6.35) — при любом σ . Наиболее удобный вид уравнение (6.34) имеет при $\sigma = 1/2$

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \quad (6.36)$$

и при $\sigma = 1/6$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}). \quad (6.37)$$

Оценки погрешностей приближенных решений, полученных из уравнений (6.36), (6.37), (6.35) в полосе $0 \leq x \leq s$, $0 \leq t \leq T$, соответственно имеют вид

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{3} M_1 h^2, \quad (6.38)$$

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{135} M_2 h^4, \quad (6.39)$$

$$|u - \tilde{u}| \leq T \left(\frac{l}{2} + \frac{h^2}{12} \right) M_1, \quad (6.40)$$

где \tilde{u} — точное решение задачи (6.26)–(6.28);

$$M_1 = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right|, \left| \varphi''(t) \right|, \left| \psi''(t) \right| \right\} \text{ при } 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq s;$$

$$M_2 = \max \left\{ \left| f^{(6)}(x) \right|, \left| \varphi^{(4)}(t) \right|, \left| \psi^{(4)}(t) \right| \right\} \text{ при } 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq s.$$

Из приведенных оценок погрешностей видно, что уравнение (6.37) дает более высокую точность решения по сравнению с уравнением (6.36). Но уравнение (6.36) имеет более простой вид, а кроме того, шаг l по аргументу t для уравнения (6.37) должен быть значительно меньше, что приводит к большему объему вычислений. Уравнение (6.35) дает меньшую точность, но при этом шаги l и h выбираются независимо друг от друга. Уравнения (6.36) и (6.37) позволяют вычислить значения функции $u(x, y)$ на каждом слое по явным формулам через значения на предыдущем слое; уравнение (6.35) (неявная схема) этим свойством не обладает.

Методом сеток можно решать смешанную краевую задачу для неоднородного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t).$$

Тогда соответствующее разностное уравнение, использующее явную схему узлов, имеет вид

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}. \quad (6.41)$$

Отсюда получаем при $\sigma = 1/2$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}, \quad (6.42)$$

при $\sigma = 1/6$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}) + lF_{ij}. \quad (6.43)$$

В этом случае имеют место следующие оценки погрешности:

для уравнения (6.42)

$$|\tilde{u} - u| \leq \frac{T}{4} \left(M_2 + \frac{1}{3} M_4 \right) h^2;$$

для уравнения (6.18)

$$|\tilde{u} - u| \leq \frac{T}{72} \left(\frac{1}{3} M_3 + \frac{1}{5} M_6 \right) h^4,$$

где $M_2 = \max \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|$, $M_3 = \max \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|$, $M_4 = \max \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|$, $M_6 = \max \left| \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right|$.

Метод прогонки для уравнения теплопроводности

Пусть требуется в полосе $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq T$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}, \quad (6.44)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = \varphi(t), \quad u(a, t) = \psi(t). \quad (6.45)$$

Выбираем шаги h , l по аргументам x и t соответственно, в каждом внутреннем узле заменяем производные конечно-разностными отношениями (6.29), (6.31), вычисляем значения функций $f(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ в граничных узлах и, обозначив $s = h^2 / l$, получаем систему

$$u_{i-1, j+1} - (2 + s)u_{i, j+1} + u_{i+1, j+1} + su_{ij} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.46)$$

$$u_{i0} = f(x_i), \quad (6.47)$$

$$u_{0j} = \varphi(t_j), \quad (6.48)$$

$$u_{nj} = \psi(t_j). \quad (6.49)$$

Метод прогонки решения системы (6.46)–(6.49) заключается в том, что уравнения (6.46) приводятся к виду

$$u_{i,j+1} = a_{i,j+1} (b_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}), \quad (6.50)$$

где числа $a_{i,j+1}, b_{i,j+1}$ определяются последовательно по формулам

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{2+s}, \quad b_{1,j+1} = \varphi(t_{j+1}) + su_{1j}, \quad (6.51)$$

$$\begin{cases} a_{i,j+1} = \frac{1}{2+s-a_{i-1,j+1}}, \\ b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + su_{ij} \quad (i=2,3,\dots,n). \end{cases} \quad (6.52)$$

Затем из краевого условия (6.49) находим

$$u_{n,j+1} = \Psi(t_{j+1})$$

и последовательно определяем значения $u_{i,j+1} (i=n-1, \dots, 1)$ по формуле (6.50).

Таким образом, метод прогонки позволяет определить значения функции $u(x, t)$ на слое $t = t_{j+1}$, если известны ее значения на слое $t = t_j$.

Порядок решения задачи.

Прямой ход. Используя краевые условия (6.48), по формулам (6.51), (6.52) находим числа $a_{1,j+1}, b_{1,j+1}, a_{i,j+1}, b_{i,j+1} (i=2,3,\dots,n)$.

Обратный ход. Из краевого условия (6.49) получаем $u_{n,j+1} = \Psi(t_{j+1})$. Затем по формуле (6.50) вычисляем

$$\begin{cases} u_{n-1,j+1} = (u_{n,j+1} + b_{n-1,j+1})a_{n-1,j+1}, \\ u_{n-2,j+1} = (u_{n-1,j+1} + b_{n-2,j+1})a_{n-2,j+1}, \\ \dots \\ u_{1,j+1} = (u_{2,j+1} + b_{1,j+1})a_{1,j+1}. \end{cases} \quad (6.53)$$

Метод сеток для уравнения гиперболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения колебания струны, заключающуюся в отыскании функции, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.56)$$

а также начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \Phi(x) \quad (0 \leq x \leq s) \quad (6.57)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t). \quad (6.58)$$

Так как введение переменной $\tau = at$ приводит уравнение (6.56) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.59)$$

то в дальнейшем можем принять $a = 1$.

Построив в полуполосе $t \geq 0, 0 \leq x \leq s$ (рис. 6.7) два семейства параллельных прямых

$$x = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$t = jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

заменяем производные в уравнении (6.59) разностными отношениями.

Пользуясь симметричными формулами для производных, будем иметь

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (6.60)$$

Обозначив $\alpha = l/h$, получим разностное уравнение

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}). \quad (6.61)$$

При $\alpha \leq 1$ это разностное уравнение устойчиво.

В частности, при $\alpha = 1$ уравнение (6.61) имеет наиболее простой вид:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (6.62)$$

Оценка погрешности приближенного решения, полученного из уравнения (6.61) в полосе $0 \leq x \leq s, 0 < t \leq T$, имеет вид

$$|\bar{u} - u| \leq \frac{h^2}{12} \left[(M_4 h + 2M_3)T + T^2 M_4 \right], \quad (6.63)$$

где \tilde{u} — точное решение; $M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right\}$ ($k = 3, 4$).

Заметим, что для получения уравнения (6.61) была использована схема узлов, отмеченных на рис. 6.7. Эта схема является явной, так как уравнение (6.61) позволяет найти значения функции $u(x, t)$ на слое t_{j+1} , если известны значения на двух предыдущих слоях. Для того чтобы найти приближенное решение задачи (6.56)–(6.58), необходимо знать значения решения на двух начальных слоях. Их можно найти из начальных условий одним из следующих способов.

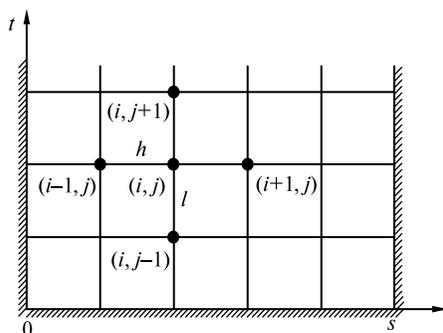


Рис. 6.7. Схема узлов для получения разностного уравнения

Первый способ. Заменяем в начальном условии (6.57) производную $u_t(x, 0)$ разностным отношением

$$\frac{u_{j1} - u_{i0}}{l} = \Phi(x_i) = \Phi_i.$$

Для определения значений $u(x, t)$ на слоях $j = 0, j = 1$ получаем

$$u_{i0} = f_i, u_{i1} = f_i + l\Phi_i. \quad (6.64)$$

Оценка погрешности значений u_{i1} в этом случае имеет вид

$$|\tilde{u}_{i1} - u_{i1}| \leq \frac{\alpha h}{2} M_2, \quad (6.65)$$

где $M_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \right\}$.

Второй способ. Заменяем производную $u_t(x, 0)$ разностным отношением

$$\frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2l},$$

где $u_{i,-1}$ — значения функции $u(x, t)$ на слое $j = -1$.

Тогда из начальных условий (6.57) будем иметь

$$u_{i0} = f_i, \frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2l} = \Phi_i. \quad (6.66)$$

Напишем разностное уравнение (6.62) для слоя $j = 0$:

$$u_{i1} = u_{i+1,0} + u_{i-1,0} - u_{i,-1}. \quad (6.67)$$

Исключив из уравнений (6.66), (6.67) значения $u_{i,-1}$, получим

$$u_{i0} = f_i, u_{i1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + l\Phi_i. \quad (6.68)$$

Оценка погрешности значений u_{i1} имеет вид

$$|\tilde{u}_{i1} - u_{i1}| \leq \frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3, \quad (6.69)$$

где $M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right\} (k = 3, 4)$.

Третий способ. Если функция $f(x)$ имеет конечную вторую производную, то значения u_{i1} можно определить с помощью формулы Тейлора:

$$u_{i1} \approx u_{i0} + l \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}. \quad (6.70)$$

Используя уравнение (6.59) и начальные условия (6.57), можем записать

$$u_{i0} = f_i, \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} = \Phi_i, \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2} = f_i''$$

Тогда по формуле (6.70) будем иметь

$$u_{i1} \approx f_i + l\Phi_i + \frac{l^2}{2} f_i'' . \quad (6.71)$$

Погрешность значений u_{i1} , полученных по этой формуле, имеет порядок $O(l^3)$.

Замечание. Аналогичным образом применяется метод сеток при решении смешанной краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t).$$

В этом случае разностное уравнение имеет вид

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \alpha^2 h^2 F_{ij}.$$

Практическое задание 6.1

Приближенное решение уравнения Лапласа для криволинейной границы

Используя метод сеток, составить решение дифференциального уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ с заданными начальными условиями; шаг $h = 1$. Уточнение решения производить до сотых долей с помощью процесса Либмана.

№ 1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma); \quad u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + |y|.$

№ 2. $(|x| + 2) \cdot (|y| + 2) = 12(\Gamma); \quad u(x, y)|_{\Gamma} = 2|x| + |y|.$

№ 3. $\begin{cases} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2, 2] \end{cases} (\Gamma); \quad u(x, y)|_{\Gamma} = |x| \cdot |y|.$

№ 4. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma); \quad u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + 2|y|.$

№ 5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma); \quad u(x, y)|_{\Gamma} = |x| \cdot |y|.$

№ 6. $\begin{cases} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4, 4] \end{cases} (\Gamma); \quad u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + |y|.$

- № 7. $(|x|+2) \cdot (|y|+2) = 12(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| \cdot |y|$.
- № 8. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = 2|x| + |y|$.
- № 9. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| \cdot |y|$.
- № 10. $\begin{cases} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2, 2] \end{cases} (\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + |y|$.
- № 11. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = 0,5|x| + |y|$.
- № 12. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + 0,5|y|$.
- № 13. $\begin{cases} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4, 4] \end{cases} (\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + \frac{y^2}{2}$.
- № 14. $(|x|+2)(|y|+2) = 12(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = 2|x| + 0,5|y|$.
- № 15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + |y|$.
- № 16. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = 2|x| + 0,5|y|$.
- № 17. $\begin{cases} |y| = 9 - x^2 \\ x \in [-9, 9] \end{cases} (\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + \frac{1}{2}|y|$.
- № 18. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = \frac{1}{2}|x| + 2|y|$.
- № 19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = 0,5|x| + |y|$.
- № 20. $\begin{cases} |x| = 9 - y^2 \\ x \in [-9, 9] \end{cases} (\Gamma)$; $u(x, y)|_{\Gamma} = 0,5|x| + |y|$.

- № 21. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = 0,5|x| + 2|y|.$
- № 22. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = 0,5|x| \cdot |y|.$
- № 23. $(|x| + 3) \cdot (|y| + 2) = 18(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + 0,5|y|.$
- № 24. $\begin{cases} |y| = 9 - y^2 \\ x \in [-3, 3] \end{cases}(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = 2|x| + 0,5|y|.$
- № 25. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = 0,5(|x| + |y|).$
- № 26. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = \frac{1}{2}|x| + |y|.$
- № 27. $\begin{cases} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4, 4] \end{cases}(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + 0,5|y|.$
- № 28. $(|x| + 2)(|y| + 3) = 18(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = 2|x| + 0,5|y|.$
- № 29. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + 0,5|y|.$
- № 30. $(|x| + 5)(|y| + 5) = 45(\Gamma);$ $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + 0,5|y|.$

Пример выполнения задания 6.1

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma); u(x, y)|_{\Gamma} = 0,5|x| + |y|.$$

1. Используя симметрию заданных начальных условий, построим решение только в I четверти (рис. 6.8). Возьмем шаг $h = 1$ и составим таблицу значений x и y .

x	0	1	2	3	4
y	3	2,90	2,60	1,98	0

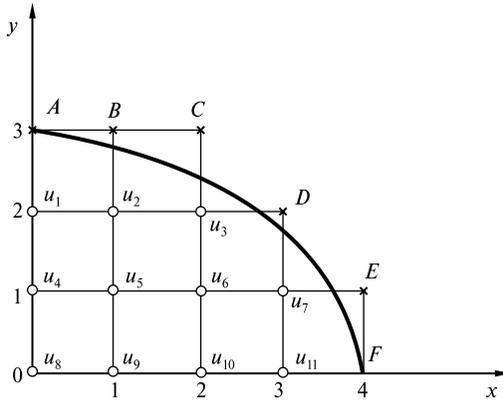


Рис. 6.8

На рисунке крестиками помечены граничные узлы, а кружочками — внутренние.

Вычислим значения функции $u(x, y)$ на границе:

$$A(0; 3); \quad u(A) = 0,5(0 + 3) = 1,5;$$

$$B(1; 2,90); \quad u(B) = 0,5(1 + 2,9) = 1,95;$$

$$C(2; 2,60); \quad u(C) = 0,5(2 + 2,6) = 2,3;$$

$$D(3; 1,98); \quad u(D) = 0,5(3 + 1,98) = 2,49;$$

$$E(3,77; 1); \quad u(E) = 0,5(3,77 + 1) = 2,39;$$

$$F(4; 0); \quad u(F) = 0,5(4 + 0) = 2.$$

Для определения начальных значений функции $u(x, y)$ во внутренних точках составим систему уравнений, содержащих эти значения. Каждое уравнение получается приравнением значения функции во внутренней точке среднему арифметическому четырех значений функции в соседних точках:

$$u_1 = \frac{1}{4}(1,5 + u_4 + 2u_2);$$

$$u_2 = \frac{1}{4}(1,95 + u_1 + u_3 + u_5);$$

$$u_3 = \frac{1}{4}(4,79 + u_2 + u_6);$$

$$u_4 = \frac{1}{4}(u_1 + u_8 + 2u_5);$$

$$u_5 = \frac{1}{4}(u_2 + u_4 + u_6 + u_9);$$

$$u_6 = \frac{1}{4}(u_3 + u_5 + u_7 + u_{10});$$

$$u_7 = \frac{1}{4}(4,88 + u_6 + u_{11});$$

$$u_8 = \frac{1}{4}(4u_5);$$

$$u_9 = \frac{1}{4}(u_8 + u_{10} + 2u_5);$$

$$u_{10} = \frac{1}{4}(u_9 + u_{11} + 2u_6);$$

$$u_{11} = \frac{1}{4}(4,78 + 2u_6).$$

Решая эту систему, получим:

$$u_1 = 1,91; u_2 = 2,05; u_3 = 2,10; u_4 = 20,05; u_5 = 2; u_6 = 2,18;$$

$$u_7 = 2,34; u_8 = 2,11; u_9 = 2,13; u_{10} = 2,19; u_{11} = 2,28.$$

Найденные значения функции $u(x, y)$ позволяют составить шаблон № 1, в котором внутренние значения соответствуют найденным, а граничные получаются в результате уточнения предыдущих граничных значений по формуле линейной интерполяции

$$u(A_h) = u(A) + \delta \cdot \frac{u(B_h) - u(A)}{1 + \delta},$$

где A_h — узлов граничная точка; A — ближайшая к A_h точка, лежащая на границе; B_h — ближайшая к A_h узловая точка, лежащая внутри области; δ — расстояние между точками A и A_h , взятое со знаком «плюс», если точка A_h лежит внутри области, и со знаком «минус», если она лежит вне области.

В данном примере имеем:

$$u(A_h) = u(A) = 1,5;$$

$$\delta_B = 2,90 - 3 = -0,1; u(B_h) = 1,95 - 0,1 \frac{2,05 - 1,95}{0,9} = 1,94;$$

$$\delta_C = 2,60 - 3 = -0,4; u(C_h) = 2,3 - 0,4 \frac{2,1 - 2,3}{0,6} = 2,43;$$

$$\delta_D = 1,98 - 2 = -0,02; u(D_h) = 2,49 - 0,02 \frac{2,34 - 2,3}{0,98} = 2,49;$$

$$\delta_E = 3,77 - 4 = -0,23; u(E_h) = 2,39 - 0,23 \frac{2,34 - 2,39}{0,77} = 2,40;$$

$$u(F_h) = u(F) = 2.$$

№ 1

1,5	1,94	2,43		
1,91	2,05	2,10	2,49	
2,05	2,11	2,18	2,34	2,40
2,11	2,13	2,19	2,28	2

2. Процесс Либмана заключается в уточнении значений, входящих в шаблон № 1. Каждый следующий шаблон получается из предыдущего так: значения функции во внутренних точках равны среднему арифметическому четырех соседних значений предыдущего шаблона, а значения функции в граничных точках находятся по формуле линейной интерполяции, уже использованной при получении шаблона № 1. Это уточнение производится до тех пор, пока два последовательных шаблона не совпадут с заданной степенью точности. В результате вычислений получим следующую последовательность шаблонов.

№ 2

1,5	1,94	2,31		
1,91	2,02	2,29	2,49	
2,06	2,10	2,18	2,34	2,40
2,09	2,13	2,19	2,22	2

№ 3

1,5	1,94	2,33		
1,90	2,06	2,25	2,49	
2,05	2,10	2,23	2,32	2,41
2,10	2,12	2,18	2,22	2

№ 4

1,5	1,94	2,31		
1,92	2,05	2,28	2,49	
2,05	2,12	2,21	2,34	2,40
2,09	2,12	2,20	2,20	2

№ 5

1,5	1,94	2,33		
1,91	2,06	2,26	2,49	
2,06	2,11	2,23	2,33	2,41
2,09	2,14	2,19	2,22	2

№ 6

1,5	1,94	2,31		
1,92	2,06	2,28	2,49	
2,062	2,12	2,22	2,34	2,40
2,10	2,13	2,20	2,21	2

№ 7

1,5	1,94	2,32		
1,92	2,06	2,27	2,49	
2,062	2,12	2,23	2,33	2,41
2,10	2,20	2,22	2,22	2

№ 8

1,5	1,94	2,32		
1,92	2,06	2,27	2,49	
2,062	2,12	2,23	2,33	2,41
2,10	2,13	2,20	2,22	2

Шаблон № 8 является ответом.

Практическое задание 6.2

Приближенное решение уравнения теплопроводности методом сеток

Используя метод сеток, составить решение смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (уравнение теплопроводности) при заданных начальных условиях

$$u(x,0) = f(x), u(0,t) = \varphi(t), u(0,6,t) = \psi(t),$$

где $x \in [0; 0,6]$.

Решение выполнить при $h = 0,1$ для $t \in [0; 0,01]$ с четырьмя десятичными знаками, считая $\sigma = 1/6$.

№ 1. $u(x,0) = \cos 2x;$
 $u(0,t) = 1 - 6t;$
 $u(0,6;t) = 0,3624.$

№ 2. $u(x,0) = x(x+1);$
 $u(0,t) = 0;$
 $u(0,6;t) = 2t + 0,96.$

№ 3. $u(x,0) = 1,2 + \lg(x+4);$
 $u(0,t) = 0,8 + t;$
 $u(0,6;t) = 1,2.$

№ 4. $u(x,0) = \sin 2x;$
 $u(0,t) = 2t;$
 $u(0,6;t) = 0,932.$

№ 5. $u(x,0) = 3x(2-x);$
 $u(0,t) = 0;$
 $u(0,6;t) = t + 2,52.$

№ 6. $u(x,0) = 1 - \lg(x+4);$
 $u(0,t) = 1,4;$
 $u(0,6;t) = t + 1.$

№ 7. $u(x,0) = \sin(0,55x + 0,03);$
 $u(0,t) = t + 0,03;$
 $u(0,6;t) = 0,354.$

№ 8. $u(x,0) = 2x(1-x) + 0,2;$
 $u(0,t) = 0,2;$
 $u(0,6;t) = t + 0,68.$

- № 9. $u(x, 0) = \sin x + 0,08$;
 $u(0, t) = 0,08 + 2t$;
 $u(0, 6; t) = 0,6446$.
- № 10. $u(x, 0) = \cos(2x + 0,19)$;
 $u(0, t) = 0,932$;
 $u(0, 6; t) = 0,1798$.
- № 11. $u(x, 0) = 2x(x + 0,2) + 0,4$;
 $u(0, t) = 2t + 0,4$;
 $u(0, 6; t) = 1,36$.
- № 12. $u(x, 0) = \lg(x + 0,26)$;
 $u(0, t) = 0,415 + t$;
 $u(0, 6; t) = 0,9345$;
- № 13. $u(x, 0) = \sin(x + 0,45)$;
 $u(0, t) = 0,435 - 2t$;
 $u(0, 6; t) = 0,3624$.
- № 14. $u(x, 0) = 0,3 + x(x + 0,4)$;
 $u(0, t) = 0,3$;
 $u(0, 6; t) = 6t + 0,9$.
- № 15. $u(x, 0) = (x - 0,2)(x + 1) + 0,2$;
 $u(0, t) = 6t$;
 $u(0, 6; t) = 0,84$.
- № 16. $u(x, 0) = x(0,3 + 2x)$;
 $u(0, t) = 0$;
 $u(0, 6; t) = 6t + 0,9$.
- № 17. $u(x, 0) = \sin(x + 0,48)$;
 $u(0, t) = 0,4618$;
 $u(0, 6; t) = 3t + 0,882$.

№ 18. $u(x, 0) = \sin(x + 0,02)$;
 $u(0, t) = 3t + 0,02$;
 $u(0, 6; t) = 0,581$.

№ 19. $u(x, 0) = \cos(x + 0,48)$;
 $u(0, t) = 0,4618$;
 $u(0, 6; t) = 3t + 0,882$.

№ 20. $u(x, 0) = \lg(2,63 - x)$;
 $u(0, t) = 3(0,14 - t)$;
 $u(0, 6; t) = 0,3075$.

№ 21. $u(x, 0) = 1,5 - x(1 - x)$;
 $u(0, t) = 3(0,5 - t)$;
 $u(0, 6; t) = 1,26$.

№ 22. $u(x, 0) = \cos(x + 0,845)$;
 $u(0, t) = 6(t + 0,11)$;
 $u(0, 6; t) = 0,1205$.

№ 23. $u(x, 0) = \lg(2,42 + x)$;
 $u(0, t) = 0,3838$;
 $u(0, 6; t) = 6(0,08 - t)$.

№ 24. $u(x, 0) = 0,6 + x(0,8 - x)$;
 $u(0, t) = 0,6$;
 $u(0, 6; t) = 3(0,24 + t)$.

№ 25. $u(x, 0) = \cos(x + 0,66)$;
 $u(0, t) = 3t + 0,79$;
 $u(0, 6; t) = 0,3058$.

№ 26. $u(x, 0) = \lg(1,43 + 2x)$;
 $u(0, t) = 0,1553$;
 $u(0, 6; t) = 3(t + 0,14)$.

№ 27. $u(x, 0) = 0,9 + 2x(1 - x)$;
 $u(0, t) = 3(0,3 - 2t)$;
 $u(0,6;t) = 1,38$.

№ 28. $u(x, 0) = \lg(1,95 + x)$;
 $u(0, t) = 0,29 - 6t$;
 $u(0,6;t) = 0,4065$.

№ 29. $u(x, 0) = 2\cos(x + 0,55)$;
 $u(0, t) = 1,705$;
 $u(0,6;t) = 0,817 + 3t$.

№ 30. $u(x, 0) = x(1 - x) + 0,2$;
 $u(0, t) = 0,2$;
 $u(0,6;t) = 2(t + 0,22)$.

Пример выполнения задания 6.2

$$u(x, 0) = 3x(1 - x) + 0,12 ;$$

$$u(0, t) = 2(t + 0,06) ;$$

$$u(0,6;t) = 0,84 .$$

Параболическое уравнение решается методом сеток постепенным переходом от значений функции $u(x_i, t_j)$ к значениям $u(x_i, t_{j+1})$; причем $t_{j+1} = t_j + k$, где $k = \frac{h^2}{6} = \frac{0,01}{6} = 0,0017$.

Вычисления производятся по формуле

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i+1,j} + 4u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Все расчеты приведены в таблице.

j	i	0	1	2	3	4	5	6
	x_i t_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0	0,12	0,39	0,60	0,75	0,84	0,87	0,84
1	0,0017	0,1233	0,3800	0,5900	0,7400	0,8300	0,8600	0,84
2	0,0033	0,1267	0,6372	0,5800	0,7300	0,8200	0,8517	0,84
3	0,0050	0,1300	0,3659	0,5704	0,7200	0,8103	0,8445	0,84
4	0,0067	0,1333	0,3607	0,5612	0,7101	0,8010	0,8380	0,84
5	0,0083	0,1367	0,3562	0,5526	0,7004	0,7920	0,8322	0,84
6	0,01	0,1400	0,3524	0,5445	0,6910	0,7834	0,8268	0,84

Библиографический список

1. *Амосов А.А.* Вычислительные методы для инженеров [Текст]: учеб. пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. — М.: Высш. шк., 1994. — 544 с.: ил.
2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
3. *Березин И.С.* Методы вычислений. Т. 1 [Текст] / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. — 464 с.
4. *Березин И.С.* Методы вычислений. Т. 2 [Текст] / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. — 620 с.
5. *Боглаев Ю.П.* Вычислительная математика и программирование [Текст]: учеб. пособие / Ю.П. Боглаев. — М.: Высш. шк., 1990. — 544 с.
6. *Воробьева Г.Н.* Практикум по вычислительной математике [Текст] / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. — М.: Высш. школа, 1990. — 208 с.
7. *Демидович Б.П.* Основы вычислительной математики [Текст] / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — М.: Наука, 1966. — 664 с.
8. *Демидович Б.П.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения [Текст] / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
9. *Исаков Б.В.* Элементы численных методов [Текст]: учеб. пособие / Б.В. Исаков. — М.: Академия, 2003. — 192 с.
10. *Калиткин Н.Н.* Численные методы [Текст] / Н.Н. Калиткин. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
11. *Кантор С.А.* Основы вычислительной математики [Текст] / С.А. Кантор. Барнаул: Алт. госуд. технич. ун-т им. И.И. Ползунова, 2010. — 357 с.
12. *Колдаев В.Д.* Численные методы и программирование [Текст]: учеб. пособие / В.Д. Колдаев; под ред. проф. Л.Г. Гагариной. — М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2009. — 336 с.
13. *Копченова Н.В.* Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / Н.В. Копченова, И.А. Марон. — СПб.: Лань, 2009. — 368 с.

14. *Огородникова О.М.* Вычислительные методы в компьютерном инжиниринге [Текст]: учеб. пособие / О.М. Огородникова. — Екатеринбург: УрФУ, 2013. — 130 с.
15. *Рыжиков Ю.И.* Вычислительные методы [Текст] / Ю.И. Рыжиков. — СПб.: БВХ-Петербург, 2007. — 400 с.
16. *Срочко В.А.* Численные методы [Текст]: Курс лекций / В.А. Срочко. — Иркутск: Иркут. ун-т, 2003. — 168 с.
17. *Турчак Л.И.* Основы численных методов [Текст] / Л.И. Турчак, П.В. Плотников — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 304 с.
18. *Хэмминг Р.* Численные методы для научных работников и инженеров [Текст] / Р.В. Хэмминг. — М.: Наука. — 1972.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
---------------	---

Глава 1

ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ЧИСЛЕННОГО

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ4

<i>Абсолютная и относительная погрешности</i>	5
<i>Округление чисел</i>	6
<i>Вычислительная погрешность</i>	7
<i>Погрешность степени приближенного числа</i>	9
<i>Погрешность корня из приближенного числа</i>	10
<i>Погрешность функции, зависящей от одной переменной</i>	11
<i>Тригонометрические функции</i>	12
<i>Погрешность функции, зависящей от нескольких переменных</i>	12
Практическое задание 1.1.....	12
<i>Определение абсолютной и относительной погрешности</i> <i>приближенного числа</i>	12
Пример выполнения задания 1.1.....	16
Практическое задание 1.2.....	17
<i>Действия над приближенными числами. Оценка погрешности результата</i>	17
Пример выполнения задания 1.2.....	23

Глава 2

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ..... 25

<i>Отделение корней</i>	26
<i>Метод половинного деления</i>	26
<i>Графическое решение уравнений</i>	26
<i>Метод итераций</i>	27
<i>Преобразование уравнения к итерационному виду</i>	28
Практическое задание 2.1.....	28
<i>Уточнение корней уравнения методом хорд</i>	28
Пример выполнения задания 2.1.....	30
Практическое задание 2.2.....	32
<i>Уточнение корней уравнения методом касательных</i>	32
Пример выполнения задания 2.2.....	32
Практическое задание 2.3.....	34
<i>Уточнение корней уравнения комбинированным методом хорд и касательных</i>	34
Пример выполнения задания 2.3.....	35
Практическое задание 2.4.....	38
<i>Уточнение корней уравнения методом итераций</i>	38
Пример выполнения задания 2.4.....	39

Глава 3	
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	42
Практическое задание 3.1.....	46
<i>Решение систем линейных уравнений по схеме Гаусса.....</i>	46
Пример выполнения задания 3.1	51
Практическое задание 3.2.....	51
<i>Решение системы линейных уравнений методом главных элементов.....</i>	51
Пример выполнения задания 3.2	55
Практическое задание 3.3.....	56
<i>Решение системы линейных уравнений методом итераций.....</i>	56
Пример выполнения задания 3.3	60
Практическое задание 3.4.....	61
<i>Решение системы линейных уравнений методом Зейделя.....</i>	61
Пример выполнения задания 3.4	65

Глава 4	
ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ	66
Первая интерполяционная формула Ньютона.....	66
Вторая интерполяционная формула Ньютона	67
Интерполяционные формулы Гаусса	67
Интерполяционная формула Стирлинга	69
Интерполяционная формула Бесселя.....	69
Общая характеристика интерполяционных формул с постоянным шагом	70
Интерполяционная формула Лагранжа. Схема Эйткена.....	71
Интерполяционная формула Ньютона для случая неравноотстоящих значений аргумента.....	73
Практическое задание 4.1.....	75
<i>Нахождение значений функции с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа.....</i>	75
Пример выполнения задания 4.1	78
Практическое задание 4.2.....	79
<i>Вычисление значений функции по первой и второй интерполяционным формулам Ньютона.....</i>	79
Пример выполнения задания 4.2	85
Практическое задание 4.3.....	88
<i>Вычисление значений функции с использованием интерполяционной формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов.....</i>	88
Пример выполнения задания 4.3	90

Глава 5	
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	92
Общие замечания. Задача Коши	92
Метод Эйлера	96
Модификации метода Эйлера	98
Метод Эйлера с последующей итерационной обработкой	99

Метод Рунге–Кутта	100
<i>Порядок заполнения табл. 5.1</i>	<i>100</i>
Метод Адамса	102
<i>Порядок заполнения табл. 5.2</i>	<i>104</i>
Метод Милна	106
Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.....	107
Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.....	108
Метод прогонки.....	109
Практическое задание 5.1.....	114
<i>Приближенное решение дифференциального уравнения методом Эйлера–Коши</i>	<i>114</i>
Пример выполнения задания 5.1	115
Практическое задание 5.2.....	116
<i>Приближенное решение дифференциального уравнения методами Рунге–Кутта и Адамса</i>	<i>116</i>
Пример выполнения задания 5.2	118
Практическое задание 5.3.....	121
<i>Приближенное решение дифференциального уравнения методом Милна</i>	<i>121</i>
Пример выполнения задания 5.3	122
Практическое задание 5.4.....	126
<i>Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения методом конечных разностей.....</i>	<i>126</i>
Пример выполнения задания 5.4	129
Практическое задание 5.5.....	130
<i>Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения методом прогонки.....</i>	<i>130</i>
Пример выполнения задания 5.5	131

Глава 6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ..... 133

Численное решение уравнений с частными производными	133
Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача. Корректность постановки смешанной задачи.....	135
Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	139
Метод сеток	140
Метод сеток для задачи Дирихле	141
Итерационный метод решения системы конечно-разностных уравнений.....	144
Решение краевых задач для криволинейных областей.....	145
Метод сеток для уравнения параболического типа	146
Метод прогонки для уравнения теплопроводности	150
Метод сеток для уравнения гиперболического типа.....	151
Практическое задание 6.1.....	155

<i>Приближенное решение уравнения Лапласа для криволинейной границы</i>	155
Пример выполнения задания 6.1	157
Практическое задание 6.2.....	161
<i>Приближенное решение уравнения теплопроводности методом сеток</i>	161
Пример выполнения задания 6.2	165
Библиографический список	167

Учебное издание

*Елена Николаевна Проказникова,
Кирилл Валентинович Бухенский*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

ЧАСТЬ 3

ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве «КУРС»

Подписано в печать 10.02.2020.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,0.
Тираж 500 экз. Заказ №

ТК 695735-990918-100220

ООО Издательство «КУРС»
127273, Москва, ул. Олонецкая, д. 17А, офис 104.
Тел.: (495) 203-57-83.
E-mail: kursizdat@gmail.com <http://www.kursizdat.ru>

Для заметок

Для заметок

Для заметок
