

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.Ф. УТКИНА**

А.П. Капранов, Г.А. Борисов, Р.А. Чесноков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к самостоятельной работе

Рязань 2026

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.Ф. УТКИНА»

Факультет вычислительной техники

[Кафедра космических технологий](#)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к самостоятельной работе

Направление подготовки: 02.03.01 «Математика и компьютерные
науки»

24.05.06 «Системы управления летательными аппаратами»

Форма обучения: очная

Рязань 2022 г.

УДК: 531

А.П. Капранов, Г.А. Борисов, Р.А. Чесноков «Теоретическая механика»: Методические указания к самостоятельной работе разработаны в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 24.05.06 «Системы управления летательными аппаратами» Положения об ООП, реализуемой по ФГОС ВО – Рязань РГРТУ, 2021. – 203 с.

Табл. 1. Ил. 116. Библиогр 4 назв.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению: 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 24.05.06 «Системы управления летательными аппаратами»

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Теоретическая механика» рассмотрены и одобрены на заседании кафедры «Космические технологии», протокол № _____ от _____ 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Раздел Статика	5
2. Раздел Кинематика	46
3. Раздел Динамика	99
4. Литература	203

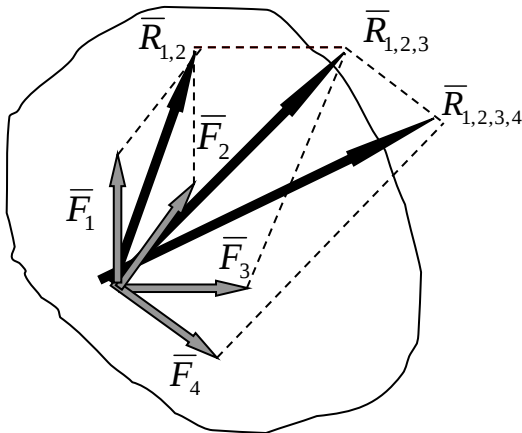
РАЗДЕЛ СТАТИКА.

1. Условия и уравнения равновесия твердого тела под действием плоской системы сходящихся сил.

1. Система сходящихся сил.

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Перенесем все силы по линии их действия в точку пересечения. Сложим первые две силы F_1 и F_2 по аксиоме параллелограмма. Сложим полученную равнодействующую R_{12} со следующей силой F_3 . Повторяем данную операцию до тех пор, пока останется только одна сила, эквивалентная исходной системе сил:



$$\bar{R}_{1,2} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2;$$

$$\bar{R}_{1,2,3} = \bar{R}_{1,2} + \bar{F}_3;$$

$$\bar{R}_{1,2,3,4} = \bar{R}_{1,2,3} + \bar{F}_4.$$

Простейший вид системы – это сила, приложенная в точке пересечения исходных сил. Таким образом, сходящаяся система сил приводится к одной силе – *равнодействующей* (силе, эквивалентной исходной системе сил), равной геометрической сумме сил системы:

$$\boxed{\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \dots = \sum \bar{F}_i.}$$

Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением силового многоугольника – выбирается одна из сил и изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы.

Если равнодействующая системы оказывается не равной нулю, тело под действием такой силы будет двигаться в направлении равнодействующей. Для того чтобы уравновесить систему достаточно приложить силу, равную полученной равнодействующей и направленной в противоположную сторону (аксиома о двух силах). *Условием равновесия системы сходящихся сил является обращение равнодействующей в ноль:*

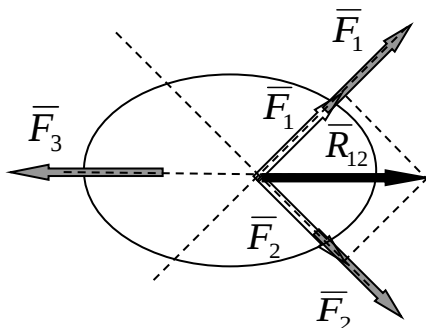
$$\boxed{\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0.}$$

Это условие эквивалентно замкнутости силового многоугольника определенным образом, а именно, направление всех сил при обходе по контуру не изменяется по направлению.

II. Теорема о трех силах. Если тело, под действием трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Перенесем две силы по линии их действия в точку их пересечения. Сложим эти силы по аксиоме параллелограмма:

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$



Теперь система состоит всего из двух сил. А такая система находится в равновесии, если эти силы равны между собой и направлены по одной линии в противоположные стороны:

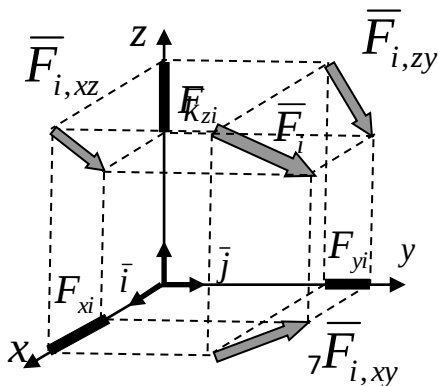
$$\bar{R}_{1,2} = -\bar{F}_3.$$

Таким образом, все три силы пересекаются в одной точке.

Теорема о трех силах может эффективно применяться для определения направления одной из двух реакций тел.

III. Аналитическое определение равнодействующей сходящихся сил.

Каждая из сил, геометрическая сумма которых дает равнодействующую, может быть представлена через ее проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):



$$\overline{F}_i = F_{xi} \bar{i} + F_{yi} \bar{j}$$

Тогда равнодействующая выражается через проекции сил в виде:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots = F_{x1} \bar{i} + F_{y1} \bar{j} + F_{x2} \bar{i} + F_{y2} \bar{j} +$$

Группировка по ортам дает выражения для проекций равнодействующей:

$$\overline{R} = (F_{x1} + F_{x2} + \dots) \bar{i} + (F_{y1} + F_{y2} + \dots) \bar{j} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j}$$

Отсюда проекции равнодействующей:

$$R_x = \sum F_{xi}; R_y = \sum F_{yi};$$

Направляющие косинусы равнодействующей:

$$\cos(\overline{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \cos(\overline{R}, y) = \frac{R_y}{R};$$

Модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Условием равновесия является обращение в ноль равнодействующей:

$$\bar{R} = 0.$$

Отсюда **уравнения равновесия**:

$$R_x = \sum F_{xi} = 0; R_y = \sum F_{yi} = 0;$$

2. Условия и уравнения равновесия твердого тела под действием пространственной системы сходящихся сил.

$$\bar{F}_i = F_{xi} \bar{i} + F_{yi} \bar{j} + F_{zi} \bar{k}.$$

Тогда равнодействующая выражается через проекции сил в виде:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots = F_{x1} \bar{i} + F_{y1} \bar{j} + F_{z1} \bar{k} + F_{x2} \bar{i} +$$

Группировка по ортам дает выражения для проекций равнодействующей:

$$\vec{R} = (F_{x1} + F_{x2} + \dots)\vec{i} + (F_{y1} + F_{y2} + \dots)\vec{j} + (F_{z1} + F_{z2} + \dots)\vec{k} =$$

Отсюда проекции равнодействующей:

$$R_x = \sum F_{xi}; R_y = \sum F_{yi}; R_z = \sum F_{zi}.$$

Направляющие косинусы равнодействующей:

$$\cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}; \cos(\vec{R}, z) = \frac{R_z}{R}$$

Модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Условием равновесия является обращение в ноль равнодействующей:

$$\vec{R} = 0.$$

Отсюда уравнения равновесия:

$$R_x = \sum F_{xi} = 0; R_y = \sum F_{yi} = 0; R_z = \sum F_{zi} = 0.$$

3. Условия и уравнения равновесия твердого тела под действием плоской произвольной системы сил. Составная конструкция.

1. Плоская произвольная система сил. Если силы лежат в одной плоскости и их линии действия не пересекаются в одной точке, то такая система сил называется **плоской произвольной**.

Для рассмотрения данной системы сил введем понятия **момента силы относительно точки на плоскости** и **пары сил**.

Момент силы относительно точки на плоскости – алгебраическая величина, равная

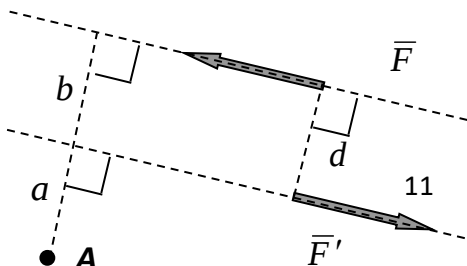
произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком плюс, если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком минус в противном случае.

Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.

$$M_A(\vec{F}) = \pm F \cdot h.$$

Пара сил – это совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны.

Теорема о моменте пары сил. Момент пары сил на



плоскости не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком плюс, если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком минус в противном случае.

Плечо пары сил – это длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.

$$M_A(\bar{F}, \bar{F}') = \pm F \cdot d.$$

Теоремы о парах:

1. Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия, при этом кинематическое состояние тела не изменится.

2. Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны, при этом кинематическое состояние тела не изменится.

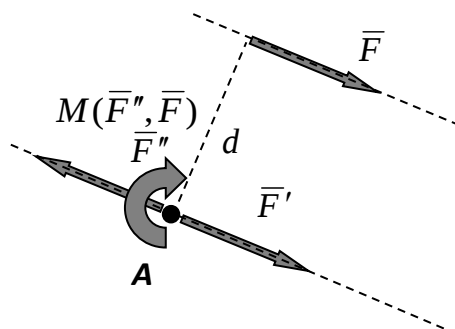
3. Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар, при этом кинематическое состояние тела не изменится.

Условием равновесия системы пар сил является обращение в ноль алгебраической суммы моментов исходных пар сил:

$$M = \sum M_i = 0.$$

II. Приведение силы к заданному центру осуществляется по методу Пуансо: силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку плоскости, если добавить соответствующую пару сил, момент которой равен моменту этой силы относительно рассматриваемой точки.

Добавим к системе в точке A две силы, равные по величине между собой и величине заданной силы F , направленные по одной прямой в противоположные стороны и параллельные заданной силе F .

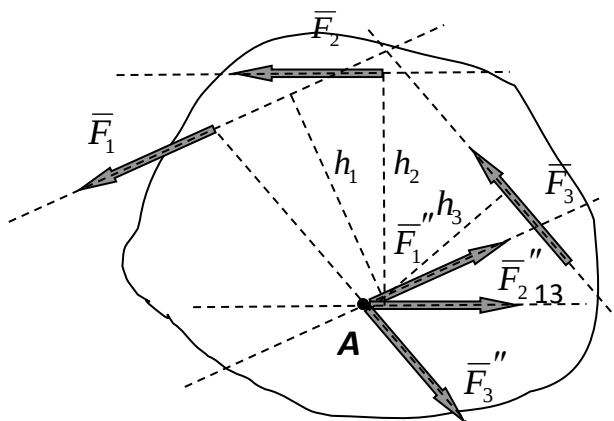


Кинематическое состояние системы при этом не изменится (аксиома о присоединении).

Исходная сила и одна из добавленных сил противоположно направленная образуют пару сил. Момент этой пары численно равен моменту исходной силы относительно центра приведения:

$$M(\bar{F}'', \bar{F}) - F \cdot d = M_A(\bar{F}).$$

Приведение произвольной системы сил к заданному центру.



Выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку (см. выше).

Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар.

В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой **главным вектором** к паре с моментом, равным **главному моменту** всех сил системы относительно центра приведения:

$$\boxed{\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i; \quad M = M_A = \sum M_{iA}.$$

Условием равновесия плоской произвольной системы сил является одновременное обращение главного вектора и главного момента системы в ноль:

$$\boxed{\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = 0; \quad M = M_A = \sum M_{iA} = 0.$$

Три формы уравнений равновесия:

$$1. \quad \begin{cases} \sum M_{iC} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases}$$

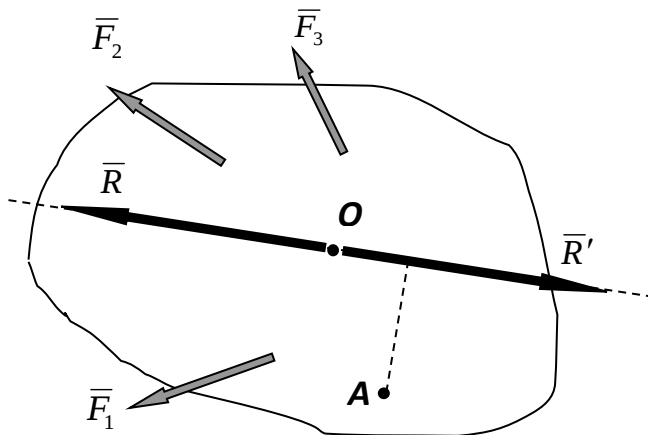
$$2. \quad \begin{cases} \sum F_{xi} = 0; \\ \sum F_{yi} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \sum F_{xi} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0. \end{cases}$$

Вторая и третья формы уравнений равновесия имеют ограничения, связанные с выбором одной из осей, например, x , и точки C относительно положения точек A и B : ось x не перпендикулярна AB , точка C не лежит на AB .

III. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра.

Пусть система сил F_1 , F_2 , F_3 приводится к равнодействующей, приложенной в точке O . Такая система не находится в



равновесии ($R \neq 0$). Уравновесим эту систему силой R' , равной равнодействующей R , направленной по линии ее действия в противоположную сторону. Система исходных сил F_1 , F_2 , F_3 и уравновешивающей силы R' находится в равновесии и должна удовлетворять условию:

$$\sum M_{iA} + M_A(R') = 0.$$

Сила R' , равна равнодействующей R и направлена по линии ее действия в противоположную сторону:

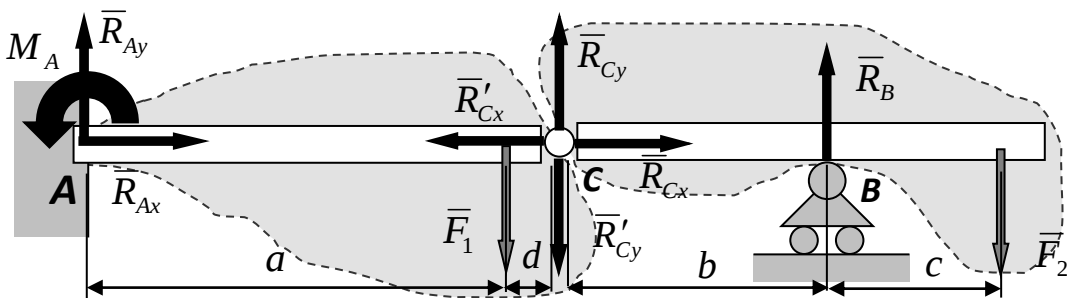
$$M_A(R') = -M_A(R).$$

Подстановка этого равенства в уравнение равновесия даст:

$$M_A(R) = \sum M_{iA}.$$

IV. Равновесие составной конструкции. Конструкции могут состоять из сочлененных между собой тел (балок, ферм).

Рассмотрим пример. Консольная балка соединена посредством шарнира в точке C с брусом, опирающимся на подвижный цилиндрический шарнир. К конструкции приложены внешние силы F_1 и F_2 , известны размеры конструкции.



- 1 Выберем в качестве объекта всю конструкцию.
2. Отбросим связи и заменим их действие реакциями.
3. Число неизвестных реакций – 4, а количество независимых уравнений – 3.

Количество наложенных связей превышает число независимых уравнений равновесия. Такая задача является **статически неопределимой**. В теоретической механике возможно решение только **статически определимых** задач, в которых количество связей равно числу независимых уравнений равновесия.

Это означает, что необходимо расчленить конструкцию, т.е. отбросить шарнир С и заменить его действие на каждую из частей реакциями.

С использованием аксиомы действия и противодействия для каждой пары реакций шарнира С общее число неизвестных реакций уменьшается до 6 и равно общему числу уравнений равновесия:

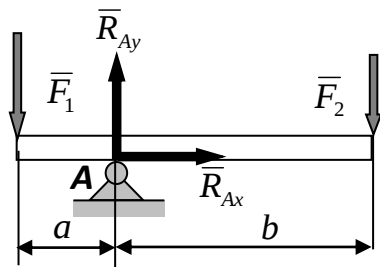
$$\begin{aligned}(CB): \quad \sum F_{xi} &= 0; \quad R_{Cx} = 0; \\ \sum M_{Ci} &= 0; \quad R_B b - F_2(b + c) = 0; \\ \sum M_{Bi} &= 0; \quad -R_{Cy} b - F_2 b = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(AC): \quad \sum F_{xi} &= 0; \quad R_{Ax} - R'_{Cx} = 0; \\ \sum F_{yi} &= 0; \quad R_{Ay} - R'_{Cy} - F_1 = 0; \\ \sum M_{Ai} &= 0; \quad M_A - R'_{Cy}(a + d) - F_1 a = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}'_{Cx} &= -\bar{R}_{Cx}, \text{ но } R'_{Cx} = R_{Cx}; \\ \bar{R}'_{Cy} &= -\bar{R}_{Cy}, \text{ но } R'_{Cy} = R_{Cy}.\end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений не представляет затруднений в указанном порядке: от балки *CB* к балке *AC*.

Рычаг – твердое тело, имеющее одну неподвижную точку. Рычаг может быть в равновесии лишь при определенном соотношении активных сил, действующих на него.

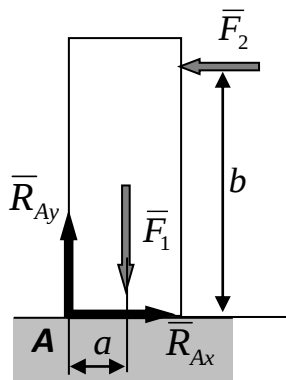


Применяя общий подход составления уравнений равновесия к рычагу, получаем:

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= 0; & R_{Ax} &= 0; \\ \sum F_{yi} &= 0; & R_{Ay} - F_1 - F_2 &= 0; \\ \sum M_{Ai} &= 0; & F_1 a - F_2 b &= 0.\end{aligned}$$

Во многих случаях значением опорных реакций не интересуются и искомое соотношение сил определяют из последнего моментного уравнения, которое и принимается за *уравнение равновесия рычага*.

Уравнение равновесия рычага используется при расчете подпорной стенки или груза на опрокидывание. Удерживающий момент относительно



неподвижной точки (от F_1) должен быть больше опрокидывающего момента (от F_2) относительно этой же точки.

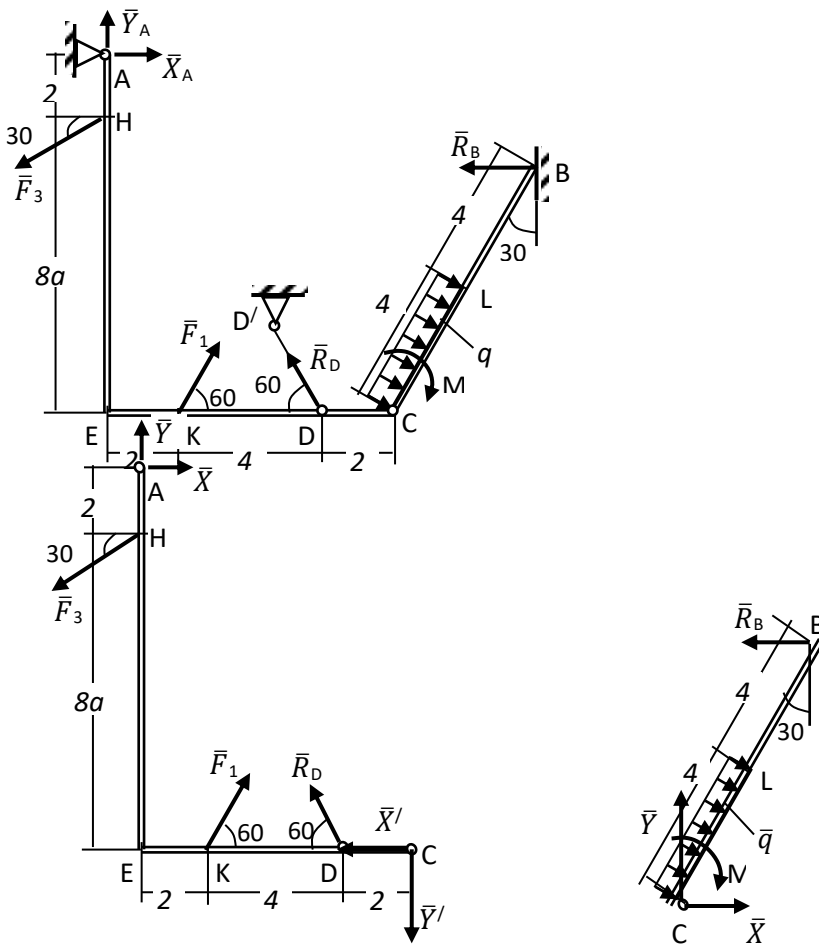
Условие устойчивости на опрокидывание:

$$M_A^{\text{удерж}} > M_A^{\text{опрок}}.$$

Пример решения задач на составную конструкцию.

Дано: $M = 60 \text{ кНм}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $a = 0,2 \text{ м}$, $F_1 = 10 \text{ кН}$, $F_3 = 30 \text{ кН}$.

Найти: Найти реакции связей в т. А, В, С.



РЕШЕНИЕ:

1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим вначале равновесие стержня ВС.

На стержень действуют равномерно распределенной в середине участка LC ($Q = q \cdot 4a = 16$ Кн), пара сил с моментом M , реакция опорной поверхности R_B и составляющие X_C , Y_C реакции шарнира С.

Для полученной плоской системы сил составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma m_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -M - Q \cdot 2a + R_B \cdot 8a \cos 30^\circ = 0,$$

$$R_B = \frac{M + 2aQ}{8a \cos 30^\circ} = \frac{60 + 2 \cdot 0,2 \cdot 16}{8 \cdot 0,2 \cdot 0,866} = 47,9 \text{ (Кн)};$$

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad X_C + Q \cos 30^\circ - R_B = 0,$$

$$X_C = -Q \cos 30^\circ + R_B = -16 \cdot 0,866 + 47,9 = 29,4 \text{ (Кн)};$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; \quad Y_C - Q \sin 30^\circ = 0, \quad Y_C = Q \sin 30^\circ = 16 \cdot 0,5 = 8 \text{ (Кн)}.$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника АЕС.

На него действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$, составляющие реакции шарнира С $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ (направлены противоположно $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и численно $X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$) и реакция шарнира А ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$).

Для этой плоской системы сил тоже составим уравнения равновесия:

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0;$$

$$-F_3 \cos 30^\circ \cdot 2a + F_1 \cos 60^\circ \cdot 10a + F_1 \sin 60^\circ \cdot 2a - Y'_C \cdot 8a - X'_C \cdot 10a$$

$$- R_D \cos 60^\circ \cdot 10a + R_D \sin 60^\circ \cdot 6a = 0$$

$$R_D = \frac{-2F_3 \cos 30^\circ \cdot 0,2 \cdot 0,2 + F_1(10 \cos 60^\circ + 2 \sin 60^\circ) - Y'_C \cdot 8 - X'_C \cdot 10}{10 \cos 60^\circ - 6 \sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 30 \cdot 0,866 + 10(10 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,866) - 8 \cdot 8 - 29,4 \cdot 10}{10 \cdot 0,5 - 6 \cdot 0,866} = 467,4 \text{ (кН)}$$

$$R_D = 467,4 \text{ (кН)}.$$

$$\Sigma F_{kx} = 0; X_A - F_3 \cdot \cos 30^\circ + F_1 \cos 60^\circ - R_D \cos 60^\circ - X'_C = 0;$$

$$X_A = F_3 \cdot \cos 30^\circ - F_1 \cos 60^\circ + R_D \cos 60^\circ + X'_C = 285,1 \text{ (кН)}; \quad X_A = 285,1 \text{ (кН)};$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; Y_A - F_3 \cdot \cos 60^\circ + F_1 \cos 30^\circ + R_D \cos 30^\circ - Y'_C = 0;$$

4. Условия и уравнения равновесия твердого тела под действием пространственной произвольной системы сил.

5. Пространственная произвольная система сил. Если силы не лежат в одной плоскости и их линии действия не

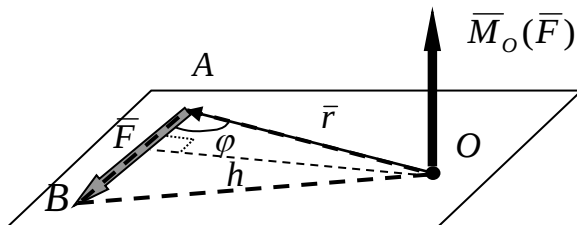
пересекаются в одной точке, то такая система сил называется **пространственной произвольной**.

Для рассмотрения такой системы сил введем понятия *момента силы относительно центра в пространстве, момента силы относительно оси, момента пары сил в пространстве*.

Момент силы относительно центра в пространстве – это векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из центра к точке приложения силы, и вектора силы:

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}.$$

По определению векторного произведения вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через центр и силу, в ту сторону, откуда поворот радиуса-вектора к вектору силы на наименьший угол представляется происходящим по часовой стрелке.



Модуль вектора момента силы относительно центра численно равен удвоенной площади $\triangle OAB$:

$$M_O(\vec{F}) = rF \sin(\vec{r}, \vec{F}) = Fh.$$

Момент

силы

относительно оси

–

это алгебраическая

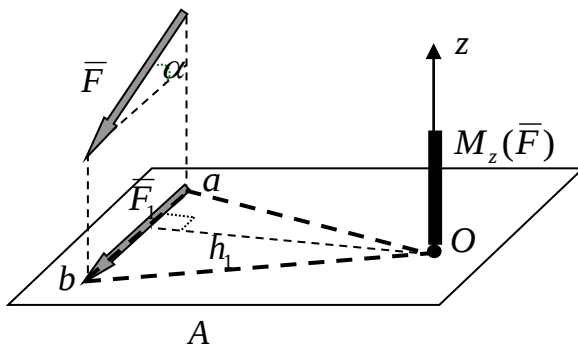
величина,

равная произведению

ю проекции вектора

силы на плоскость,

перпендикулярную оси, на плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью, взятая со знаком плюс, если вращение плоскости под действием силы представляется при взгляде навстречу оси происходящим против часовой стрелки, и со знаком минус в противном случае:

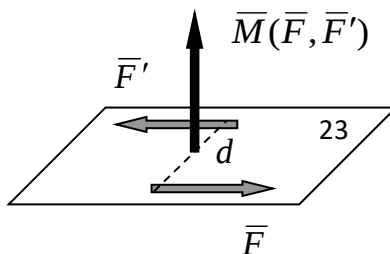


$$M_z(\vec{F}) = \pm F_1 h_1.$$

Момент силы относительно оси численно равен удвоенной площади $\triangle Oab$.

Момент силы относительно оси есть проекция вектора момента силы относительно центра на эту ось:

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \gamma.$$



II. Момент пары сил в пространстве – это вектор, перпендикулярный плоскости действия пары, направленный в ту сторону, откуда вращение плоскости под действием пары представляется происходящим против часовой стрелки.

Модуль вектора момента пары равен произведению одной из сил пары на плечо пары: $M = Fd = F'd.$

Теоремы о парах:

1. Пару сил можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия, кинематическое состояние тела не изменится.

2. Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты геометрически (векторно) равны, при этом кинематическое состояние тела не изменится.

3. Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической (векторной) сумме моментов исходных пар, при этом кинематическое состояние тела не изменится.

Условием равновесия системы пар сил является равенство нулю геометрической (векторной) суммы моментов исходных пар:

$$\overline{M} = \sum \overline{M}_i = 0.$$

III. Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру. Выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо

исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар. Присоединенные пары сил характеризуются векторами.

Сходящаяся система сил приводится к одной силе, приложенной в центре приведения. Система пар приводится к одной паре (теорема о сложении пар), момент которой равен векторной сумме моментов исходных сил относительно центра приведения.

В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой *главным вектором* и к паре с моментом, равным *главному моменту* всех сил системы относительно центра приведения:

$$\boxed{\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i; \quad \bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA}.}$$

Аналитическое определение главного вектора и главного момента системы. Вычисляются через проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots = F_{x1}\bar{i} + F_{y1}\bar{j} + F_{z1}\bar{k} + F_{x2}\bar{i} +$$

$$\bar{M}_A = \sum \bar{M}_i = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots = M_{1x}\bar{i} + M_{1y}\bar{j} + M_{1z}\bar{k} + M_{2x}\bar{i} +$$

Проекции главного вектора:

$$\boxed{R_x^* = \sum F_{xi}; \quad R_y^* = \sum F_{yi}; \quad R_z^* = \sum F_{zi}.}$$

Проекции главного момента:

$$M_x = \sum M_{ix}; M_y = \sum M_{iy}; M_z = \sum M_{iz}.$$

Направляющие косинусы главного вектора:

$$\cos(\bar{R}^*, x) = \frac{R_x^*}{R^*}; \cos(\bar{R}^*, y) = \frac{R_y^*}{R^*}; \cos(\bar{R}^*, z) = \frac{R_z^*}{R^*}.$$

Направляющие косинусы главного момента:

$$\cos(\bar{M}_A, x) = \frac{M_x}{M_A}; \cos(\bar{M}_A, y) = \frac{M_y}{M_A}; \cos(\bar{M}_A, z) = \frac{M_z}{M_A}.$$

Модуль главного вектора:

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}}.$$

Модуль главного момента:

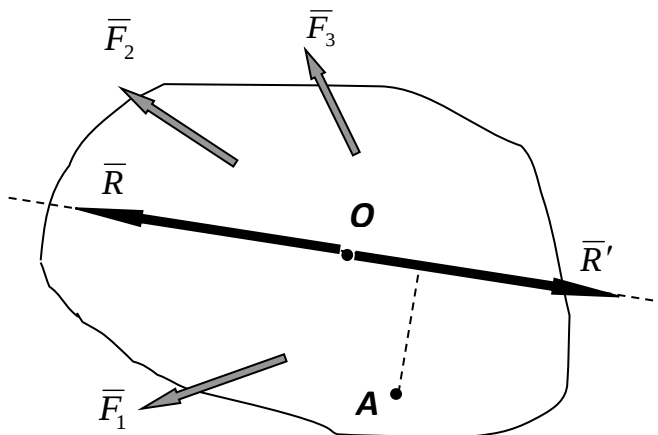
$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

IV. Условием равновесия пространственной произвольной системы сил является одновременное обращение главного вектора и главного момента системы в ноль. **Уравнения равновесия:**

$$\begin{array}{ll} \sum F_{xi} = 0; & \sum M_{xi} = 0; \\ \sum F_{yi} = 0; & \sum M_{oi} = 0; \\ \sum F_{zi} = 0; & \sum M_{zi} = 0. \end{array}$$

Теорема Вариньона о моментах равнодействующей для пространственной системы сил. Если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра равен геометрической сумме моментов сил системы относительно того же центра, а момент равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно той же оси.

Пусть система сил F_1, F_2, F_3 приводится к равнодействующей, приложенной в точке O . Такая система не находится в равновесии ($R \neq 0$).



Уравновесим эту систему силой R' , равной равнодействующей R , направленной по линии ее действия в противоположную сторону. Система исходных сил F_1, F_2, F_3 и уравновешивающей силы

R' находится в равновесии и должна удовлетворять условиям равновесия:

$$\sum \overline{M}_{iA} + \overline{M}_A(\overline{R}') = 0.$$

Сила R' , равна равнодействующей R и направлена по линии ее действия в противоположную сторону:

$$\overline{M}_A(\overline{R}') = -\overline{M}_A(\overline{R}).$$

Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\boxed{\overline{M}_A(\overline{R}) = \sum \overline{M}_{iA}.$$

Спроектируем это векторное равенство на любую ось, например, x , получим:

$$\boxed{M_x(\overline{R}) = \sum M_{ix}.$$

5. Равновесие тел с учетом сил трения.

Трение скольжения. При действии сдвигающей силы, приложенной к телу, покоящемуся на шероховатой поверхности, возникает сила, противодействующая возможному смещению тела (**сила трения сцепления**) из равновесного положения или его действительному перемещению (**сила трения скольжения**) при его движении.

Основные законы трения:

При стремлении к скольжению одного тела по поверхности другого возникает сила сцепления, направленная в сторону, противоположную направлению возможного скольжения тела. При отсутствии скольжения сила сцепления принимает множество значений в диапазоне:

$$0 \leq F_{\text{сц}} \leq F_{\text{сц}}^{\text{max}}.$$

Максимальная сила сцепления пропорциональна коэффициенту трения и силе нормального давления и не зависит от площади поверхности соприкосновения трущихся тел:

$$F_{\text{сц}}^{\text{max}} = f_{\text{сц}} N.$$

Коэффициент сцепления есть величина постоянная для данного вида и состояния соприкасающихся поверхностей ($f = \text{const}$).

При скольжении одного тела по поверхности другого возникает сила трения скольжения, которая связана с нормальным давлением следующим соотношением (закон Кулона):

$$F_{\text{тр}} = fN.$$

Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей, а также от удельного давления и относительной скорости движения тел.

Коэффициент трения скольжения несколько меньше коэффициента сцепления.

Способы определения коэффициента трения:

Сдвигающая сила изменяется от нуля до своего максимального значения $0 \leq T \leq T_{\max}$, ($0 \leq P \leq P_{\max}$).

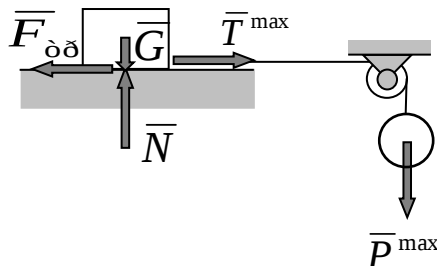
$$\sum F_{xi} = 0; \quad T^{\max} - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{yi} = 0; \quad N - G = 0.$$

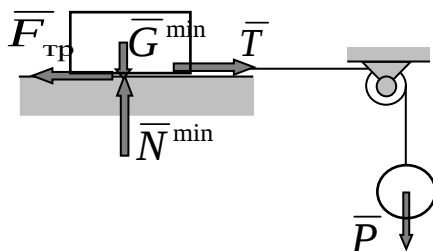
=>

$$T^{\max} = fN; N = G;$$

$$f = \frac{T^{\max}}{N} = \frac{P^{\max}}{G}.$$



Сила нормального давления изменяется от некоторого начального значения до минимального значения $N_0 \geq N \geq N_{\min}$ ($G_0 \geq G \geq G_{\min}$).

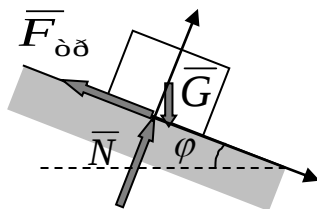


$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= 0; & T - F_{\text{тр}} &= 0; \\ \sum F_{yi} &= 0; & N^{\min} - G^{\min} &= 0.\end{aligned}$$

$$T = fN^{\min}; \quad N^{\min} = G^{\min};$$

$$f = \frac{T}{N^{\min}} = \frac{P}{G^{\min}}.$$

Сдвигающая сила и сила нормального давления изменяются при изменении угла наклона плоскости скольжения от нуля до максимального значения $0 \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$.



$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= 0; & Q \sin \varphi^{\max} - F_{\text{тр}} &= 0; \\ \sum F_{yi} &= 0; & N - G \cos \varphi^{\max} &= 0.\end{aligned}$$

$$G \sin \varphi^{\max} = fN;$$

$$N = G \cos \varphi^{\max};$$

$$f = \frac{G \sin \varphi^{\max}}{N} = \frac{G \sin \varphi^{\max}}{G \cos \varphi^{\max}} = \operatorname{tg} \varphi^{\max}.$$

II. Угол трения. С учетом силы трения, возникающей при контакте с шероховатой поверхностью, полная реакция такой

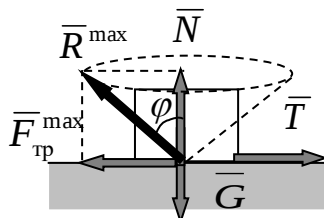
поверхности может рассматриваться как геометрическая сумма нормальной реакции абсолютно гладкой поверхности и силы трения.

Получаем:

$$\bar{R}^{\max} = \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}^{\max}.$$

Угол отклонения полной реакции шероховатой поверхности – *угол трения*.

Угол трения равен:



$$\varphi = \arctg\left(\frac{F_{\text{тр}}^{\max}}{N}\right) = \arctg(f).$$

При изменении направления сдвигающей силы T на опорной поверхности ее поворотом относительно нормали к плоскости полная максимальная реакция шероховатой поверхности описывает **конус трения**.

Активные силы (G , T и др.) можно заменить равнодействующей силой P , имеющей угол отклонения от вертикали α . *Равновесие возможно лишь в том случае, когда эта сила остается внутри пространства конуса трения.*

Из уравнений равновесия по осям x и y следует:

$$P \sin \alpha \leq F_{mp}; \quad N = P \cos \alpha.$$

Сила трения:

$$F_{mp} = F_n = \operatorname{tg} \varphi N = \operatorname{tg} \varphi P \cos \alpha.$$

Тогда:

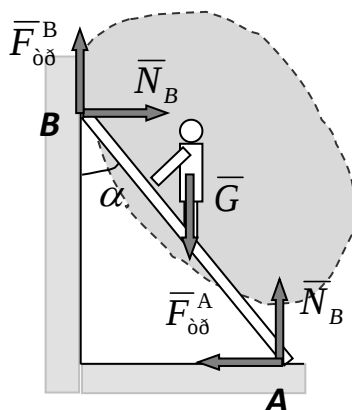
$$P \sin \alpha \leq \mu P \cos \alpha, \text{ откуда } \tan \alpha \leq \mu \text{ и } \alpha \leq \varphi.$$

Учет сил трения при решении задач на равновесие.

1. К действующим на объект активным силам и реакциям абсолютно гладких поверхностей *добавляются соответствующие силы трения*, направленные по общей касательной к контактным поверхностям в сторону, противоположную возможному смещению точки касания объекта относительно опорной шероховатой плоскости.

2. К уравнениям равновесия, составленным для объекта, *добавляются выражения для максимальных сил трения* в количестве, равном числу сил трения.

Пример. Человек весом G собирается установить легкую лестницу под углом α к вертикали (стене) и взобраться на половину длины лестницы для выполнения работы. Коэффициенты трения в точках контакта лестницы с полом (A) и со стеной (B) равны f_A и f_B соответственно. Определить предельное значение угла наклона, при котором лестница с человеком может сохранять равновесие. Весом лестницы пренебречь.



1. Выбираем на объект (человек и лестница), отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями гладкой поверхности.

2. Добавляем активные силы (силу тяжести G).

3. Добавляем силы трения, направленные в сторону, противоположную возможному перемещению контактных точек A и B лентницы под действием приложенной активной силы.

4. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{xi} = 0; \quad N_B - F_{\text{тр}}^A = 0;$$

$$\sum F_{yi} = 0; \quad F_{\text{тр}}^B - G + N_A = 0;$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad G \frac{AB}{2} \sin \alpha - F_{\text{тр}}^B AB \sin \alpha - N_B AB \cos \alpha$$

5. Добавляем выражения для сил трения:

$$F_{\text{тр}}^A = f_A N_A; \quad F_{\text{тр}}^B = f_B N_B.$$

6. Подстановка последних выражений в уравнения равновесия с простыми преобразованиями третьего уравнения дает:

$$N_B - f_A N_A = 0;$$

$$f_B N_B - G + N_A = 0;$$

$$G \frac{1}{2} \tan \alpha - f_B N_B \tan \alpha - N_B = 0.$$

7. Решение первых двух уравнений дает выражения для нормальных реакций:

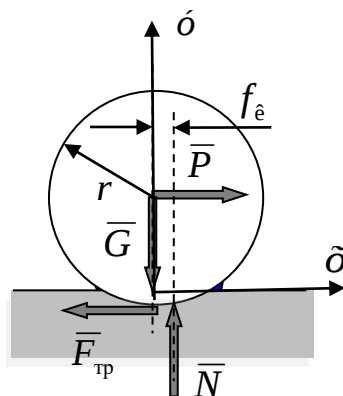
$$N_A = \frac{G}{1 + f_A f_B}; \quad N_B = \frac{f_A G}{1 + f_A f_B}.$$

8. Подстановка выражений для нормальных реакций в третье уравнение равновесия приводит к возможности определения предельного угла наклона α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 f_A}{1 - f_A f_B}.$$

III. Сопротивление при

качении. При действии сдвигающей силы, приложенной к катку, покоящемуся на шероховатой поверхности, возникает сила, противодействующая возможному смещению тела (сила трения сцепления) из равновесного положения или его действительному перемещению (сила трения скольжения) при его движении и



пара сил, момент которой препятствует повороту катка (**момент сопротивления качению**). Возникновение пары сил, препятствующей качению, связана с деформацией опорной плоскости, в результате которой равнодействующая нормальных реактивных сил по площадке контакта смещена от линии действия силы тяжести в сторону возможного или действительного движения.

Уравнения равновесия катка:

$$(x): P - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$(y): N - G = 0;$$

$$(\sum M_i): P \cdot r - N \cdot f_{\kappa} = 0.$$

Откуда имеем:

$$P = F_{\text{тр}}; \quad N = G.$$

Момент сопротивления качению катка:

$$M_{\text{ск}} = N \cdot f_{\kappa}.$$

Коэффициент трения качения измеряется единицами длины и равен по величине указанному смещению равнодействующей нормального давления. В силу малости деформаций коэффициент трения качения имеет очень малую величину.

Основные законы трения качения:

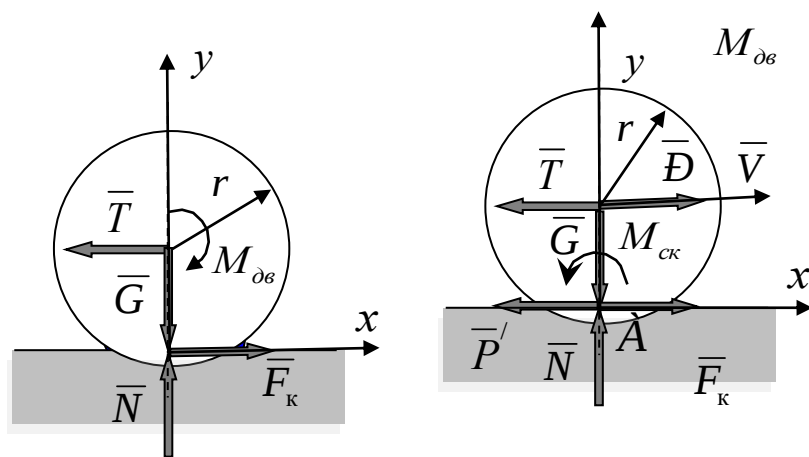
1. Момент сопротивления качению всегда направлен в сторону противоположную, тому направлению, в котором приложенные к телу силы стремятся его повернуть, или действительному повороту под действием этих сил (реактивный характер).

2. Момент сопротивления качению изменяется от нуля до своего максимального значения. Максимальный момент сопротивления качению пропорционален коэффициенту трения качения и силе нормального давления.

3. Коэффициент трения качения есть величина постоянная для данного вида и состояния соприкасающихся поверхностей ($f_k = const$).

4. Момент сопротивления качению в широких пределах не зависит от радиуса катка.

Рассмотрим статику ведущего колеса, когда его центр неподвижен и когда он перемещается с постоянной скоростью V . Отличия в схеме сил ведущего колеса от ведомого: к колесу приложен движущий (крутящий) момент $M_{\text{дв}}$, поступающий от двигателя через трансмиссию транспортного средства. Точка A колеса стремится смещаться или смещается в сторону, противоположную движению колеса.



В результате сила сцепления или сила трения скольжения, действующая на колесо со стороны поверхности качения, направлена по ходу его движения. К центру колеса приложена сила сопротивления тяге T , перемещение колеса возможно лишь при преодолении некоторого ее максимального значения.

Режимы движения колеса:

1. Колесо неподвижно: $f_{cy} > P/G < T_{max}/G$;

2. Колесо вращается, но центр его неподвижен (режим 100%-го буксования): $T_{max} > P = F_{mr}$. Из правого равенства следует важный вывод: движущая сила P лимитируется силой трения скольжения.

3. Качение колеса без скольжения: $P > T_{max} + G(f_k/r)$. Отсюда следует, что при больших значениях радиуса требуется меньшая сила тяги, либо необходимая сила тяги обеспечивается при меньших значениях F_{cy} . Поэтому у ряда машин делают ведущие колеса большого радиуса (трактора). Для того чтобы реализовался подведенный к колесу движущий момент при малой силе трения скольжения, необходимо, чтобы колесо было большого радиуса.

4. Качение колеса с буксованием: $T_{max} = P = F_{mr}$. Движущий момент равен сумме момента сопротивления качению и момента силы трения. Получаем: $P/G = f_{cy} + f_k/r$. Отсюда следует, что сила тяги колеса равна силе трения скольжения и зависит от коэффициента трения скольжения. Для увеличения этого коэффициента колеса снабжают протекторами.

6. Центр тяжести твердого тела и его координаты.

Сложение

параллельных сил.

Основным

результатом

сложения двух

параллельных и

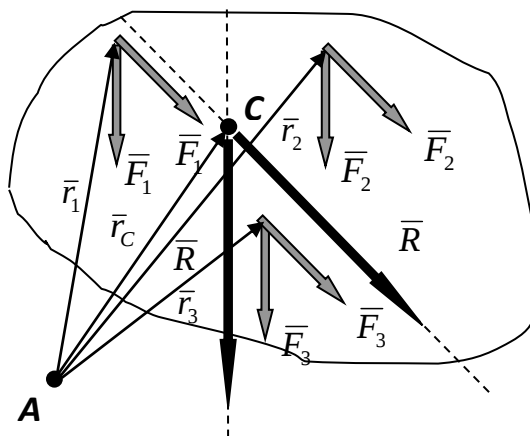
направленных в

одну сторону сил,

является приведение

их к одной силе –

равнодействующей,



приложенной в точке, делящей прямую, соединяющую линии действия этих сил и перпендикулярную им, на расстояния, обратно пропорциональные величинам сил. Последовательно складывая попарно параллельные силы приходим также к одной силе – равнодействующей R . Поскольку силу можно переносить по линии ее действия, то точка приложения силы (равнодействующей) по существу не определена. Если все силы повернуть на один и тот же угол и вновь провести сложение сил, то получаем другое направление линии действия равнодействующей. Точка пересечения этих двух линий действия равнодействующих может рассматриваться, как точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол. Такая точка называется **центром параллельных сил**.

Центр параллельных сил – точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол.

Для аналитического определения положения центра параллельных сил применим теорему Вариньона:

$$\bar{M}_A(\bar{R}) = \sum \bar{M}_{iA}; \quad \bar{r}_C \times \bar{R} = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i.$$

Каждую из сил представим с помощью единичного вектора $\bar{e}$, параллельного линиям действия сил:

$$\bar{F}_i = F_i \bar{e} \quad \text{и} \quad \bar{R} = \sum \bar{F}_i = \sum F_i \bar{e}.$$

Тогда предыдущее равенство после перестановки скалярных множителей в векторных произведениях примет вид:

$$\bar{r}_C \sum F_i = \sum F_i \bar{r}_i.$$

Откуда получаем:
$$\bar{r}_C = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i}.$$

Проекции полученного соотношения для радиуса-вектора центра параллельных сил на координатные оси дают аналитические формулы для определения координат центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}.$$

II. Центр тяжести – центр приложения равнодействующей сил тяготения (веса) материального тела.

При определении положения центра тяжести тела используются гипотезы:

1. Линии действия сил тяготения, приложенные к отдельным частицам тела, параллельны (рассматриваемые тела имеют размеры много меньше радиуса Земли и углом между линиями действия сил тяготения частиц тел можно пренебречь).

2. Ускорение свободного падения $g = \text{const}$ (высота рассматриваемых тел много меньше радиуса Земли и изменением величины ускорения свободного падения по высоте тела можно пренебречь).

3. Рассматриваемые тела – однородные (нет включений материалов с другой плотностью) и сплошные (нет пустот).

С учетом принятых гипотез, при определении положения центра тяжести можно использовать формулы для определения положения центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum \Delta G_i x_i}{\sum \Delta G_i}; \quad y_C = \frac{\sum \Delta G_i y_i}{\sum \Delta G_i}; \quad z_C = \frac{\sum \Delta G_i z_i}{\sum \Delta G_i}.$$

Здесь ΔG – силы тяжести элементарных объемов.

Определение положения центра тяжести однородных тел. Выделим элементарный объем $Dv = dx dy dz$. Сила тяжести такого объема равна $Dg = \gamma Dv$, где $\gamma = \text{const}$ – объемный вес. Замена суммирования дискретных сил тяжести ΔG_i непрерывным

распределением приводит к интегральным выражениям по объему тела для определения координат центров тяжести, например, координаты x_c :

$$x_c = \frac{\int_G x dG}{\int_G dG} = \frac{\iiint x \gamma dx dy dz}{\iiint \gamma dx dy dz} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}.$$

Для координат y и z получаются аналогичные выражения.

В частном случае плоского тела (постоянной толщины $H = \text{const}$), $Dv = H dx dy = H dS$:

$$x_c = \frac{\int_S x dS}{\int_S dS}; \quad y_c = \frac{\int_S y dS}{\int_S dS}.$$

Для линейного тела (постоянного поперечного сечения $S = \text{const}$, ось – плоская кривая), $Dv = S dL$:

$$x_c = \frac{\int_L x dL}{\int_L dL}; \quad y_c = \frac{\int_L y dL}{\int_L dL}.$$

III. Определение положения центра тяжести простейших плоских тел:

5. Прямоугольник: $Ds = bdy$:

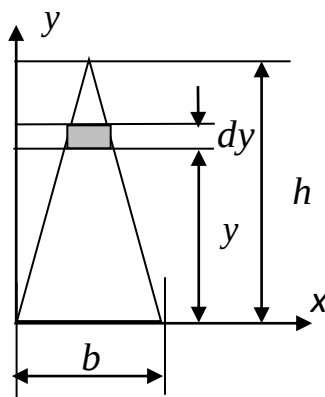
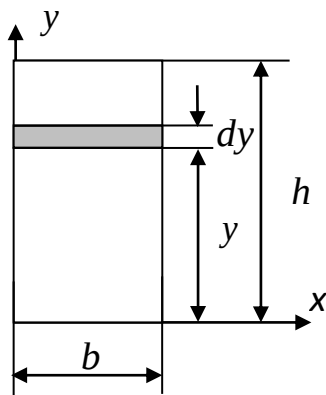
$$y_c = \frac{\int_S y dS}{\int_S dS} = \frac{\int_0^h y b dy}{\int_0^h b dy} = \frac{b \int_0^h y dy}{b \int_0^h dy} = \frac{b \frac{y^2}{2} \Big|_0^h}{bh} = \frac{h}{2}$$

5. Треугольник:

$$\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h};$$

$$b_y = \frac{h-y}{h} b;$$

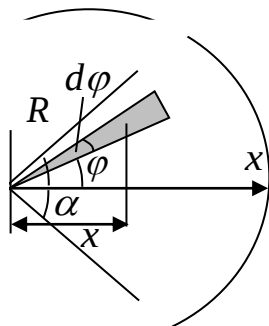
$$dS = b_y dy = \frac{h-y}{h} b dy.$$



$$y_c = \frac{\int_S y dS}{\int_S dS} = \frac{\int_0^h y \frac{h-y}{h} b dy}{\int_0^h \frac{h-y}{h} b dy} = \frac{\frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy}{\frac{b}{h} \int_0^h (h-y) dy} = \frac{\frac{b}{h} \left(h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h}{\frac{b}{h} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h} =$$

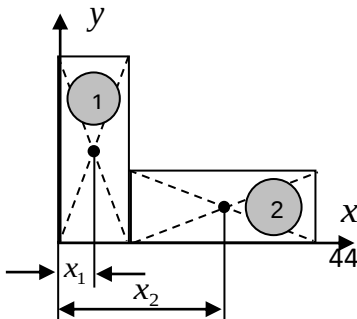
3. Круговой сектор:

$$dS = \frac{1}{2} R(R d\varphi) = \frac{1}{2} R^2 d\varphi.$$



$$x_c = \frac{\int_S x dS}{\int_S dS} = \frac{2 \int_0^\alpha \frac{2}{3} R \cos \varphi \frac{R^2}{2} d\varphi}{2 \int_0^\alpha \frac{R^2}{2} d\varphi} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \varphi \Big|_0^\alpha}{R^2 \varphi \Big|_0^\alpha} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

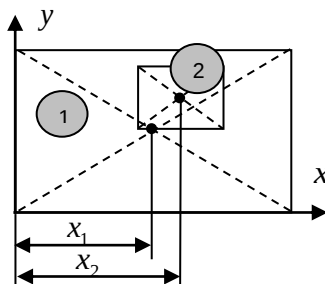
**Методы определения
положения центра тяжести
сложных фигур:**



1.Метод разбиения – сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются.

$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}.$$

2.Метод отрицательных площадей – сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются, но при наличии отверстий или пустот удобно их представление в виде “отрицательных” областей.



$$x_C = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2}.$$

3. Метод симметрии – при наличии у фигуры оси или плоскости симметрии центр тяжести лежит на этой оси или в этой плоскости. С учетом этого свойства уменьшается количество координат центра тяжести, подлежащих определению (см., например, определение положения центра тяжести кругового сектора).

4. Метод интегрирования – при наличии у фигуры достаточно простого контура, описываемым известным уравнением (окружность, парабола и т.п.), выбирается элементарная площадка или

полоска и выполняется аналитическое интегрирование. См. например, определение положения центра тяжести треугольника или кругового сектора. При более сложном контуре, который может быть разбит на более простые граничные отрезки используется предварительно метод разбиения. При сложностях с аналитическим интегрированием используются численные методы интегрирования.

5. Метод подвешивания – экспериментальный метод, основанный на том, что при подвешивании тела или фигуры за какую-либо произвольную точку центр тяжести находится на одной вертикали с точкой подвеса. Для определения положения центра тяжести плоской фигуры достаточно ее подвесить поочередно за две любые точки и прочертить соответствующие вертикали, например, с помощью отвеса, и точка пересечений этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.

РАЗДЕЛ КИНЕМАТИКА.

Тема 1. Векторный, координатный, естественный способы задания движения точки. Скорость и ускорение точки в декартовой системе координат.

1. Кинематика – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение без учета сил, вызывающих это движение.

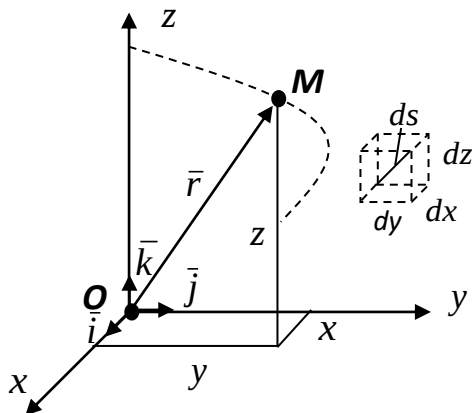
Данный раздел состоит из двух подразделов: кинематика точки и кинематика твердого тела.

Кинематика точки – изучает движение материальной точки, является базой для изучения движения точек твердого тела.

Кинематика твердого тела – изучает движение твердого тела.

Существует три способа задания движения точки:

1. *Векторный способ.* Задаются величина и направление радиуса-вектора:



$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

2. *Координатный способ.* Задаются координаты положения точки:

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned}$$

3. *Естественный способ.* Задаются закон движения точки и траектория:

$$\begin{aligned} s &= s(t); \\ f(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Траектория точки – кривая в осях координат, ее уравнение представляет собой зависимость между координатами точки.

Способы задания движения эквивалентны и связаны между собой.

Векторный и координатный:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Координатный и естественный:

$$s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Для получения уравнения траектории движения необходимо из уравнений движения координатного способа исключить время, т.к. траектория не зависит от времени:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \Rightarrow t = t(x); \\ y &= y(t) \Rightarrow y[t(x)] = y(x); \\ z &= z(t) \Rightarrow z[t(x)] = z(x). \end{aligned}$$

Последние два уравнения представляют собой уравнения линейчатых поверхностей, линия пересечения которых и есть траектория движения точки.

II. Скорость точки – величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в пространстве.

1. *Векторный способ.* Рассмотрим положения точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:

$$t \Rightarrow \bar{r};$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar{r}_1 = \bar{r} + \Delta \bar{r}.$$

Вектор средней скорости в интервале времени Δt , направлен по направлению вектора перемещения (хорде MM_1) и равен:

$$\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \bar{v}_{\text{cp}}.$$

Устремим Δt к нулю и перейдем к пределу. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента есть производная функции:

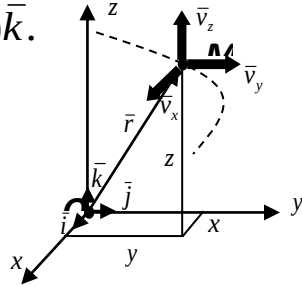
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}.$$

Вектор истинной скорости точки в момент времени t , направлен по касательной к траектории (при приближении M_1 к M хорда занимает положение касательной).

2. *Координатный способ.* Связь радиуса-вектора с координатами определяется выражением:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}.$$

Используем векторную форму
определения скорости:



$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}] = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}.$$

Составляющие вектора скорости:

$$\bar{v}_x = \dot{x}(t)\bar{i}; \quad \bar{v}_y = \dot{y}(t)\bar{j}; \quad \bar{v}_z = \dot{z}(t)\bar{k}.$$

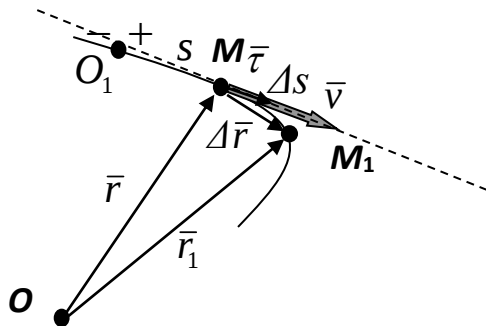
Проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}.$$

Модуль скорости:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Направляющие косинусы:



$$\cos(\bar{v}, x) = \frac{\dot{x}}{v}; \quad \cos(\bar{v}, y) = \frac{\dot{y}}{v}; \quad \cos(\bar{v}, z) = \frac{\dot{z}}{v}.$$

Ускорение точки при векторном и координатном способах.

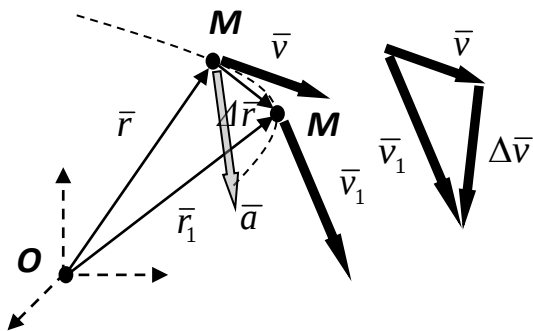
1. *Векторный способ.* Сравним скорости точки в двух положениях – в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:

$$t \Rightarrow \bar{v};$$

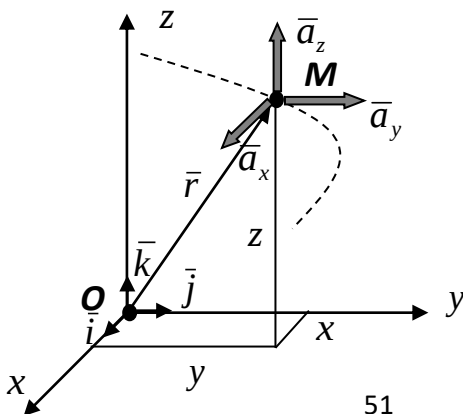
$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v} + \Delta \bar{v}.$$

Вектор среднего ускорения в интервале времени Δt , направлен в сторону вогнутости траектории и равен:

$$\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{a}_{\text{cp}}$$



Переходя к пределу, получаем мгновенное ускорение точки:



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{a}.$$

Вектор истинного ускорения точки в момент времени t , лежит в соприкасающейся плоскости (предельное положение плоскости, проведенной через касательную в точке M и прямую, параллельную касательной в точке M_1 , при стремлении M_1 к M) и направлен в сторону вогнутости траектории.

2. *Координатный способ.* Используем полученное векторное выражение и связь радиуса-вектора с координатами:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}.$$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d^2 \bar{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}] = \\ &= \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \end{aligned}$$

Составляющие вектора ускорения:

$$\bar{a}_x = \ddot{x}\bar{i}; \quad \bar{a}_y = \ddot{y}\bar{j}; \quad \bar{a}_z = \ddot{z}\bar{k}.$$

Проекции ускорения на оси координат:

$$a_x = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z}.$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Задача 1.1. По данному уравнению движения точки найти уравнения ее траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения.

$$x = 5 \sin 10t, y = 3 \cos 10t.$$

Ответ: Эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ с начальной точкой $x = 0, y = 3$.

Задача 1.2. По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

$$1) \quad x = 3t^2, y = 4t^2.$$

Ответ: Полупрямая $4x - 3y = 0; s = 5t^2$.

Задача 1.3.

Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением

$$\omega_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t \text{ м/с.}$$

Найти уравнение движения ползуна, если его

начальная скорость $v_{0x} = 2\pi$ м/с, а начальное положение совпадает со средним положением ползуна, принятым за начало координат. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

$$\text{Ответ: } x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t \text{ м.}$$

Тема 2. Скорость и ускорение точки в естественной системе координат.

Представим радиус-вектор как сложную функцию:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}[s(t)].$$

Используем векторную форму определения скорости:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \dot{s}.$$

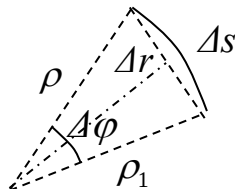
Представим производную радиус-вектора как предел:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}.$$

Величина производной радиуса-вектора по дуговой координате равна 1:

$$\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{2\rho \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\rho \Delta \varphi} = 1.$$

При $\Delta s \rightarrow 0$ радиус кривизны $\rho_1 \rightarrow \rho$, угол между радиусами кривизны $\varphi \Delta \rightarrow 0$, числитель – основание равнобедренного треугольника, знаменатель – длина круговой дуги радиуса ρ .



Таким образом, производная радиуса-вектора по дуговой координате есть единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Вектор скорости равен:

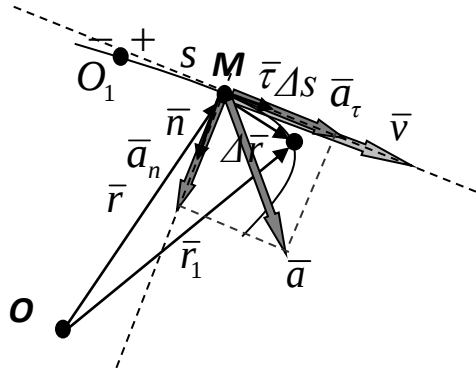
$$\boxed{\bar{v} = \dot{s} \bar{\tau}.}$$

Проекция скорости на касательную:

$$v_\tau = \dot{s}.$$

При $\dot{s} > 0$ вектор скорости направлен в сторону увеличения дуговой координаты, в противном случае – в обратную сторону.

III. Ускорение точки – это величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки.



Естественный

способ: Используем векторное выражение для ускорения и выражение для скорости при естественном способе задания:

$$\bar{v} = \dot{s} \bar{\tau};$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s} \bar{\tau}) = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{dt}.$$

Представим единичный касательный вектор как сложную функцию:

$$\bar{\tau}(t) = \bar{\tau}[s(t)].$$

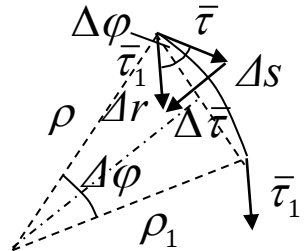
Производная единичного касательного вектора:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{ds}.$$

Величина производной единичного касательного вектора по дуговой координате:

$$\left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\rho \Delta \varphi} = \frac{1}{\rho}.$$

При $\Delta s \rightarrow 0$ радиус кривизны $\rho_1 \rightarrow \rho$, угол между радиусами кривизны $\varphi \Delta \rightarrow 0$, числитель – основание равнобедренного треугольника, образованного единичными векторами τ_1 и τ , знаменатель – длина круговой дуги радиуса ρ . Угол между приращением единичного вектора $\Delta \tau$ и самим вектором τ при $\varphi \Delta \rightarrow 0$, стремится к 90° . Таким образом, производная единичного касательного вектора по дуговой координате есть вектор, направленный перпендикулярно касательной к траектории.



Введем единичный вектор n , нормальный (перпендикулярный) к касательной, направленный к центру кривизны.

С использованием вектора n и ранее определенных величин ускорение представляется как сумма векторов:

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}.$$

Составляющие вектора ускорения:

$$\bar{a}_\tau = \ddot{s}\bar{\tau}; \quad \bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}.$$

Проекции ускорения на оси τ и n :

$$a_\tau = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

Таким образом, полное ускорение точки есть векторная сумма двух ускорений: касательного, направленного по касательной к траектории в сторону увеличения дуговой координаты, если $\ddot{s} > 0$ (в противном случае – в противоположную) и нормального ускорения, направленного по нормали к касательной в сторону центра кривизны (вогнутости траектории):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

Классификация движений точки по ее ускорениям

$\overline{a}_\tau$	$\overline{a}_n$	Вид движения	
		Закон движения	Траектория
$= 0 [t, t_1]$	$= 0 [t, t_1]$	равномерное ($v = \text{const}$)	прямолинейное ($\rho = \infty$)
$= 0 [t, t_1]$	$\neq 0 [t, t_1]$	равномерное ($v = \text{const}$)	криволинейное ($\rho \neq \infty$)
$= 0$ в момент времени t	$= 0 [t, t_1]$	неравномерное ($v \neq \text{const}$), в момент времени t $v = \text{max}$	прямолинейное ($\rho = \infty$)
	$\neq 0 [t, t_1]$		криволинейное ($\rho \neq \infty$)
$\neq 0 [t, t_1]$	$= 0 [t, t_1]$	неравномерное ($v \neq \text{const}$)	прямолинейное ($\rho = \infty$)
	$= 0$ в момент времени t	перемена направления движения ($v = 0$ при $t=t$)	любая траектория
		неравномерное ($v \neq \text{const}$)	перегиб траектории ($\rho = \infty$)
$\neq 0 [t, t_1]$	$\neq 0 [t, t_1]$	неравномерное ($v \neq \text{const}$)	криволинейное ($\rho \neq \infty$)
$= \text{const}[t, t_1]$	любое	равнопеременное	любая траектория

Задача 2.1. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 20$ см. Закон ее движения по траектории: $s = 20 \sin \pi t$ (t - в секундах, s - в сантиметрах). Найти величину и направление скорости, касательное, нормальное и полное ускорения точки в момент $t = 5$ с. Построить также графики скорости, касательного и нормального ускорений.

Ответ: Скорость равна по величине 20π см/с и направлена в сто-

рону, противоположную положительному направлению отсчета дуги s ;
 $\omega_t = 0$; $v_0 = \omega_n = 20\pi^2 \text{ см/с}^2$.

2.6. Точка движется по винтовой линии согласно уравнениям $x = 2\cos 4t$, $y = 2\sin 4t$, $z = 2t$, причем за единицу длины взят метр. Определить радиус кривизны ρ траектории.

Ответ: $\rho = 2 \frac{1}{8} \text{ м}$.

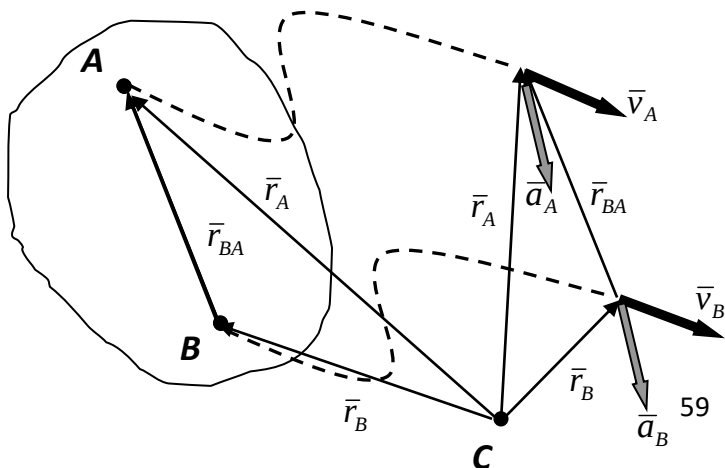
Задача 2.2. Точка движется по винтовой линии согласно уравнениям $x = 2\cos 4t$, $y = 2\sin 4t$, $z = 2t$, причем за единицу длины взят метр. Определить радиус кривизны ρ траектории.

Ответ: $\rho = 2 \frac{1}{8} \text{ м}$.

Тема 3. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

Поступательное движение твердого тела – такой вид движения, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе.

При поступательном движении точки и само тело (центр масс тела) могут двигаться по криволинейным траекториям (например, движение кабины колеса обозрения).



Теорема о поступательном движении твердого тела.

При поступательном движении твердого тела все его точки описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени геометрически равные скорости и ускорения.

Проведем радиус-векторы к двум точкам A и B , а также соединим эти точки вектором r_{BA} .

В любой момент времени выполняется векторное равенство:

$$\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \bar{r}_{BA}.$$

В любой момент времени вектор r_{BA} остается постоянным по направлению (по определению поступательного движения) и по величине (расстояние между точками не изменяется). Отсюда:

$$\boxed{\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \overline{const.}}$$

Это означает, что в каждый момент времени положение точки A отличается от положения точки B на одну и ту же величину $r_{BA} = const$, т.е. траектории этих двух точек тождественны.

Продифференцируем по времени левую и правую часть соотношения:

$$\frac{d\bar{r}_A(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_B(t)}{dt}.$$

Это означает, что в каждый момент времени скорость точки A равна геометрически скорости точки B :

$$\bar{v}_A(t) = \bar{v}_B(t).$$

Второе дифференцирование по времени приводит к соотношению:

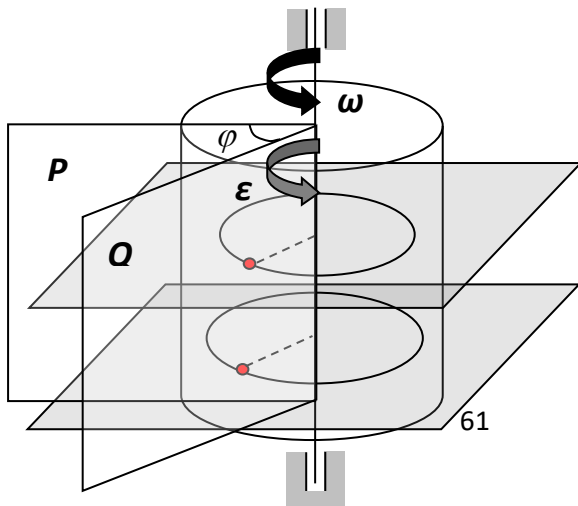
$$\frac{d\bar{r}_A^2(t)}{dt^2} = \frac{d\bar{r}_B^2(t)}{dt^2}.$$

Это означает, что в каждый момент времени ускорение точки А равно геометрически ускорению точки В:

$$\bar{a}_A(t) = \bar{a}_B(t).$$

Таким образом, поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной точки, принадлежащей этому телу и выбранной произвольным образом. Все параметры движения этой точки (траектория, скорость и ускорение) описываются уравнениями и соотношениями кинематики точки.

II. Вращательное движение твердого тела – движение, при котором все его точки движутся в плоскостях, перпендикулярных некоторой неподвижной прямой, и описывают окружности с центрами, лежащими на этой прямой,



называемой осью вращения.

Вращательное движение задается законом изменения двугранного угла φ (угла поворота), образованного неподвижной плоскостью P , проходящей через ось вращения, и плоскостью Q , жестко связанной с телом.

Уравнение вращательного движения имеет вид:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Угловая скорость – величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота.

Рассмотрим движение точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:

$$t \Rightarrow \varphi;$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \varphi_1 = \varphi + \Delta \varphi.$$

Средняя угловая скорость в интервале времени Δt равна:

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega_{\text{cp}}.$$

Устремим Δt к нулю и перейдем к пределу, получим истинную угловую скорость в момент времени t :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega = \dot{\varphi}.$$

Если $d\varphi/dt > 0$, то вращение происходит в сторону увеличения угла поворота, если $d\varphi/dt < 0$, то вращение происходит в сторону уменьшения угла поворота.

Угловое ускорение – величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости.

Рассмотрим движение точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:

$$t \Rightarrow \omega;$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \omega_1 = \omega + \Delta \omega.$$

Среднее угловое ускорение в интервале времени Δt :

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \varepsilon_{\text{cp}}.$$

Устремим Δt к нулю и перейдем к пределу, получим истинное угловое ускорение в момент времени t :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \varepsilon.$$

Угловое ускорение изображается дуговой стрелкой в сторону увеличения угла поворота при $\ddot{\varphi} > 0$.

Если угловые скорость и ускорение одного знака, то скорость увеличивается по модулю и вращение называется ускоренным (дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения направлены в одну сторону).

Если угловые скорость и ускорение разного знака, то скорость уменьшается по модулю и вращение называется замедленным (дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения направлены в противоположные стороны).

III. Равномерное вращение. Угловая скорость не изменяется по величине:

$$\omega = \text{const.}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt; \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t.}$$

Равнопеременное вращение. Угловое ускорение не изменяется по величине:

$$\varepsilon = \text{const.}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt; \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t.}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt; \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.}$$

Скорость точки при вращательном движении твердого тела.

В данном случае траектория точки представляет собой окружность радиуса R – расстояние точки до оси вращения.

Применяем формулу для определения скорости точки при естественном задании движения:

$$v_{\tau} = \dot{s}.$$

Дуговая координата связана с радиусом окружности соотношением:

$$\boxed{s = \varphi R.}$$

Тогда проекция скорости на касательную к окружности:

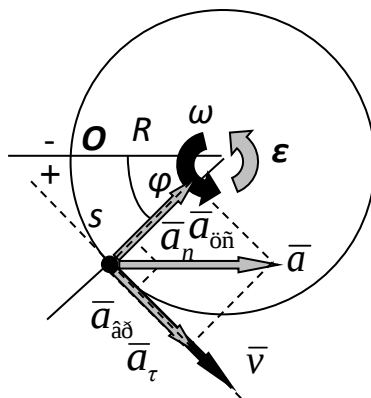
$$v_{\tau} = \frac{d}{dt}(\varphi R) = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R.$$

Таким образом, выражение для модуля скорости имеет вид:

$$v = \omega \cdot R.$$

Скорость точки пропорциональна расстоянию ее до оси вращения (радиусу вращения). Вектор скорости направляют перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

Ускорение точки при вращательном движении твердого тела. Траектория точки – окружность радиуса R , применяем формулы для определения ускорений точки при естественном задании движения:



$$a_{\tau} = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

Проекции ускорения на касательную к окружности и нормаль:

$$a_{\tau} = \frac{d^2}{dt^2}(\varphi R) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} R = \varepsilon R.$$

$$a_n = \frac{1}{\rho} \left[\frac{d}{dt} (\varphi R) \right]^2 = \frac{1}{R} \left[\frac{d\varphi}{dt} R \right]^2 = \omega^2 R.$$

Вектор касательного углового ускорения, называемого **вращательным ускорением**, направляют перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки углового ускорения.

Выражение для модуля вращательного ускорения имеет вид:

$$a_{\text{вр}} = \varepsilon \cdot R.$$

Нормальное ускорение, называемое **центростремительным ускорением**, направляют по радиусу к оси вращения независимо от направления дуговой стрелки угловой скорости:

$$a_{\text{цс}} = \omega^2 \cdot R.$$

Оба ускорения точки пропорциональны расстоянию ее до оси вращения (радиусу вращения).

Полное ускорение точки, как и ранее, есть векторная сумма этих ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{вр}} + \bar{a}_{\text{цс}}.$$

Угол между направлением полного ускорения и радиусом от величины радиуса не зависит и равен:

$$\beta = \arctg\left(\frac{a_{\text{вр}}}{a_{\text{ис}}}\right) = \arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).$$

IV. Скорость и ускорения точки при вращательном движении как векторные произведения.

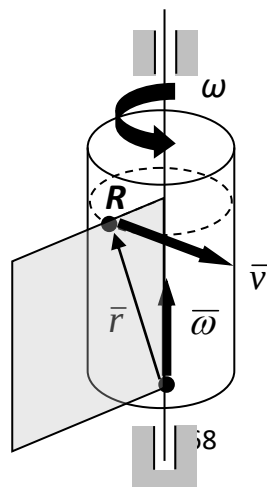
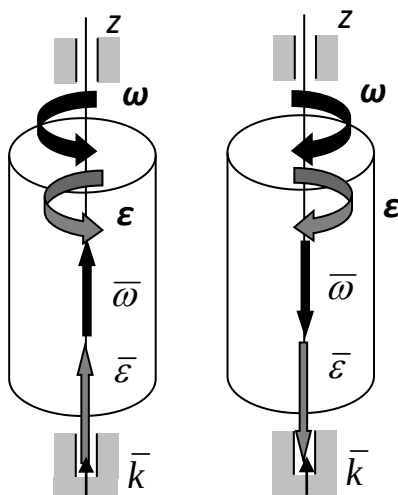
Представим угловую скорость и угловое ускорение как векторы, направленные по оси вращения в ту сторону, откуда дуговые стрелки этих величин указывают вращение против часовой стрелки.

Положительное направление оси z можно задать с помощью единичного вектора $\bar{k}$, тогда векторы угловой скорости и углового ускорения можно представить как:

$$\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k}.$$

Здесь ω_z, ε_z – проекции векторов на ось z .

Скорость точки при вращательном движении как векторное произведение.



Выражение, которое описывает величину, и направление скорости:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Модуль этого векторного произведения:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \sin(\vec{\omega}, \vec{r}). \Rightarrow v = \omega \cdot R.$$

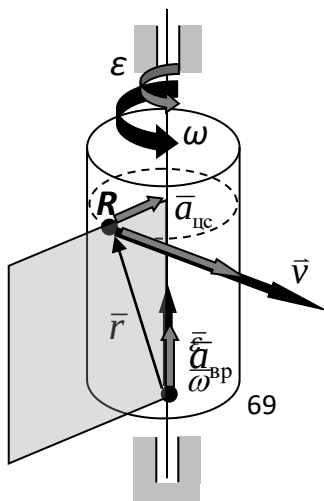
Направление вектора рассматриваемого векторного произведения определяется следующими способами:

1. по определению векторного произведения – перпендикулярно плоскости, проведенной через умножаемые вектора, направлен в ту сторону, откуда поворот первого вектора ко второму на наименьший угол кажется происходящим против часовой стрелки;

2. по правилу правой руки – при совмещении большого пальца с первым вектором, остальных – со вторым вектором, поворот большого пальца перпендикулярно ладони указывает на направление вектора векторного произведения.

Ускорение точки при вращательном движении как векторное произведение.

Вращательное ускорение определяется выражением, которое описывает его величину, и направление:



$$\bar{a}_{\text{вр}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$$

Величина этого векторного произведения:

$$|\bar{a}_{\text{вр}}| = |\bar{\varepsilon}| \cdot |\bar{r}| \sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r}). \Rightarrow a_{\text{вр}} = \varepsilon \cdot R.$$

Направление вектора рассматриваемого векторного произведения можно установить по определению векторного произведения или по правилу правой руки.

Центростремительное ускорение точки определяется выражением, которое описывает и величину, и направление центростремительного ускорения:

$$\bar{a}_{\text{цс}} = \bar{\omega} \times \bar{v} \quad \text{или} \quad \bar{a}_{\text{цс}} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Величина этого векторного произведения:

$$|\bar{a}_{\text{цс}}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{v}| \sin(\bar{\omega}, \bar{v}). \Rightarrow$$

$$a_{\text{цс}} = \omega \cdot v = \omega(\omega \cdot R) = \omega^2 R.$$

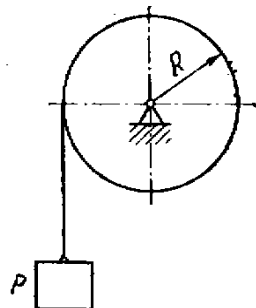
Направление вектора рассматриваемого векторного произведения можно установить по определению векторного произведения или по правилу правой руки.

Задача 3.1. Маховое колесо радиуса $R = 2\text{ м}$ вращается равноускоренно из состояния покоя; через $t = 10\text{ с}$ точки, лежащие на

обода, обладают линейной скоростью $v = 100$ м/с. Найти скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса для момента $t = 15$ с.

Ответ: $v = 150$ м/с, $\omega_n = 11250$ м/с², $\omega_\tau = 10$ м/с².

Задача 3.2. Вал радиуса $R = 10$ см приводится во вращение гирей P , привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x = 100t^2$, где x - расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t - время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности



вала в момент t .

К задаче 3.2.

Ответ: $\omega = 20t$ рад/с, $\varepsilon = 20$ рад/с², $w = 200\sqrt{1 + 400t^4}$ см/с².

Тема 4. Плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Скорость точки при плоском движении твердого тела.

1. Плоскопараллельное движение твердого тела – движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости параллельной некоторой неподвижной плоскости.

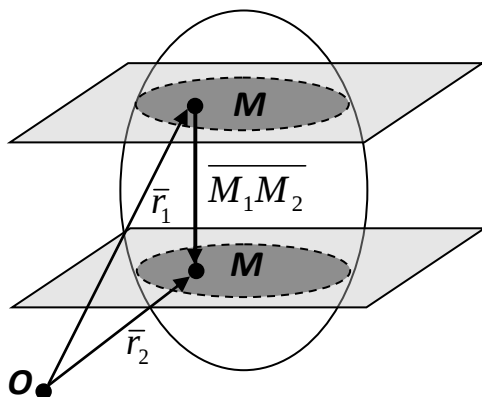
Сечение тела одной из таких плоскостей есть плоская фигура, остающаяся в этой плоскости при движении тела.

Теорема о плоскопараллельном движении твердого тела.

Плоскопараллельное движение твердого тела однозначным образом определяется движением плоской фигуры, образованной сечением тела одной из параллельных плоскостей.

Выберем две точки на произвольных двух сечениях тела, находящиеся на одном перпендикуляре к этим плоскостям.

Проведем к каждой точке радиусы-векторы из неподвижной точки O и свяжем их между собой вектором $\overline{M_1M_2}$:



$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \overline{M_1M_2}$$

При плоском движении тела вектор $\overline{M_1M_2}$ не изменяется по величине, остается параллельным самому себе (движется поступательно) и, следовательно, точки этого вектора описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения:

$$\frac{d\bar{r}_2}{dt} = \frac{d\bar{r}_1}{dt}; \quad (\overline{M_1M_2} = \text{const}); \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_1, \quad \text{е} \quad \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2}; \quad \bar{a}_2 = \bar{a}_1.$$

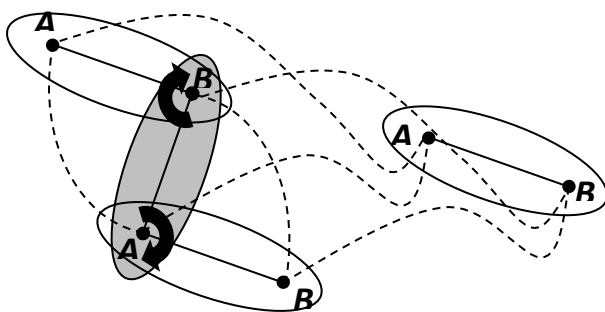
Таким образом, при плоском движении тела движение каждой точки одной из плоских фигур определяет движение соответствующих

точек, находящихся во всех других смежных параллельных плоскостях.

Следствие: Поскольку положение плоской фигуры однозначно определяется положением ее двух точек или отрезка прямой, проведенной через эти точки, то плоскопараллельное движение твердого тела определяется движением прямолинейного отрезка, принадлежащего одному из сечений тела параллельными плоскостями.

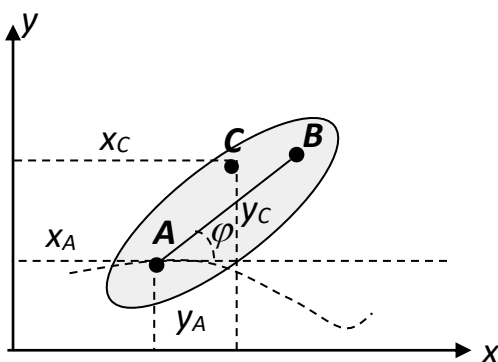
II. Разложение плоскопараллельного движения плоской фигуры на поступательное и вращательное. Плоскую фигуру или отрезок прямой можно перевести из одного положения в другое бесчисленным множеством способов, меняя последовательность выполнения поступательного и вращательного движения между собой, а также выбирая различные траектории и точки в качестве полюса.

Плоскопараллельное движение состоит из двух движений: поступательное и вращательное, и его всегда можно разложить на эти два движения.



При этом поступательное зависит от выбора полюса и траектории движения, а вращательное, характеризуемое поворотом вокруг выбранного полюса, не зависит от выбора полюса (для любого полюса величина угла поворота и направление вращения – одинаковы).

Выбирая в качестве полюса любую точку, например, A , поступательная часть движения будет описываться уравнениями движения этой точки.



Вращательная часть движения описывается уравнением изменения угла поворота вокруг полюса, отсюда *уравнения движения плоской фигуры*:

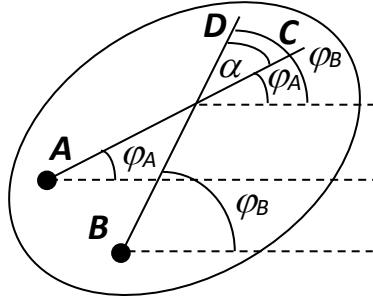
$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t); \\ y_A &= y_A(t); \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned}$$

Независимость угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры от выбора полюса.

Выберем два произвольных прямолинейных отрезка, изображающих положение плоской фигуры и два полюса на этих отрезках.

Углы наклона отрезков к горизонтальной оси различны и связаны между собой соотношением

$$\varphi_B(t) = \varphi_A(t) + \alpha.$$



Продифференцируем это соотношение:

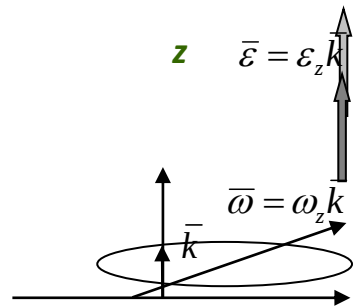
$$\frac{d\varphi_B(t)}{dt} = \frac{d\varphi_A(t)}{dt}, \quad (\alpha = const).$$

Отсюда следует, что угловые скорости двух отрезков равны. После повторного дифференцирования следует, что угловые ускорения двух отрезков также равны:

$$\boxed{\omega_{CA} = \omega_{DB}.}$$

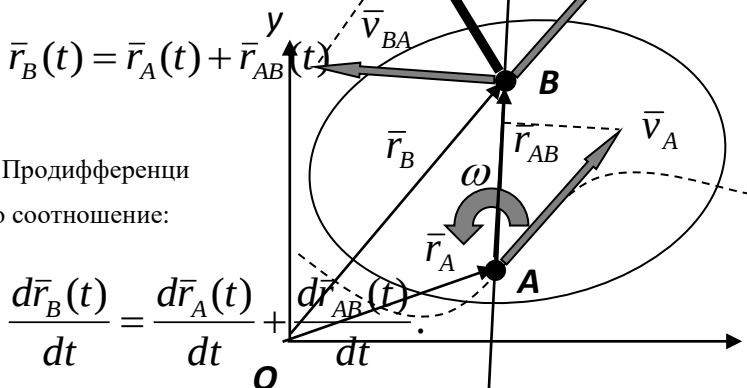
$$\boxed{\varepsilon_{CA} = \varepsilon_{DB}.}$$

Таким образом, угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры не зависят от выбора полюса и их можно представить в виде векторов, перпендикулярных плоскости фигуры.



III. Теорема о сложении скоростей. Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.

Радиусы-
векторы точек A и B
связаны между собой
соотношением:



Продифференци-
руем это соотношение:

$$\frac{d\bar{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_A(t)}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AB}(t)}{dt}$$

Второе слагаемое это вращательная скорость точки B вокруг полюса A :

$$\bar{v}_{BA}(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{r}_{AB}(t); \quad |\bar{r}_{AB}| = \text{const.}$$

Таким образом, скорость точки B равна геометрической сумме скорости полюса A и вращательной скорости точки B вокруг полюса:

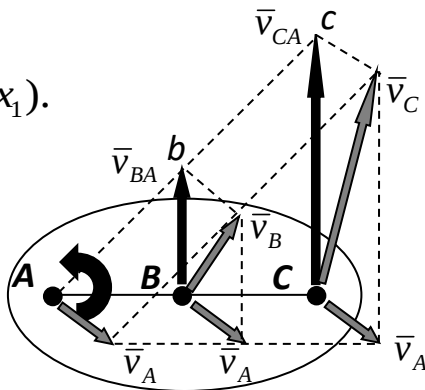
$$\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB} = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.}$$

Следствие 1. Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки равны.

Спроецируем данное соотношение на ось x_1 :

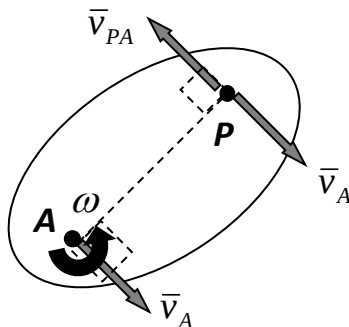
$$v_{Bx1} = v_{Ax1}, \quad (\bar{v}_{BA} \perp x_1).$$

Следствие 2. Концы векторов скоростей точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят эту прямую на отрезки пропорциональные расстояниям между точками.



$$v_{BA} = \omega AB, \quad v_{CA} = \omega AC, \quad \frac{v_{CA}}{v_{BA}} = \frac{AC}{AB} = \frac{Ac}{Ab}.$$

IV. Мгновенный центр скоростей (МЦС). При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю, данная точка называется **мгновенным центром скоростей** плоской фигуры.



Пусть известна скорость одной из точек фигуры и угловая скорость вокруг этой точки. Запишем векторное соотношение для скорости некоторой точки P согласно теореме о сложении скоростей:

$$\bar{\mathbf{v}}_P = \bar{\mathbf{v}}_A + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}_{AP} = \bar{\mathbf{v}}_A + \bar{\mathbf{v}}_{PA}.$$

Зададим значение скорости этой точки P равной нулю:

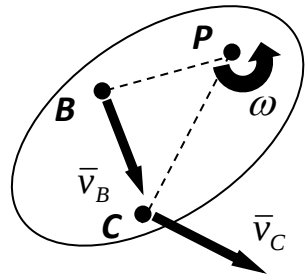
$$\bar{v}_P = 0.$$

Тогда получаем:

$$\bar{\mathbf{v}}_{PA} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}_{AP} = -\bar{\mathbf{v}}_A.$$

Т.е. вращательная скорость искомой точки должна быть равна по модулю скорости точки A , параллельна этой скорости и направлена в противоположную сторону.

Это позволяет найти положение МЦС (точки P), а именно: МЦС должен находиться на перпендикуляре к скорости точки A , отложенном в сторону угловой скорости, на расстоянии:



$$AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

Если положение МЦС найдено, скорость любой точки плоской фигуры может быть легко определена посредством выбора полюса в МСЦ. В этом случае векторное выражение теоремы о сложении

скоростей вырождается в известную зависимость скорости от расстояния до центра вращения:

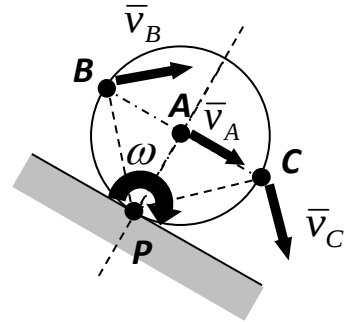
$$\begin{aligned}\bar{v}_B &= \bar{v}_P + \bar{\omega} \times \bar{r}_{PB} = \bar{v}_{BP}; & (\bar{v}_P = 0); & & v_B &= \omega \cdot BP. \\ \bar{v}_C &= \bar{v}_P + \bar{\omega} \times \bar{r}_{PC} = \bar{v}_{CP}; & (\bar{v}_P = 0); & & v_C &= \omega \cdot CP.\end{aligned}$$

Другими словами, можно утверждать, что в любой момент времени тело не совершает никакого другого движения, кроме как вращательного движения вокруг МЦС.

Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры.

1. Дано: v_A , положения точек A, B, C , проскальзывание отсутствует. **Найти:** v_B, v_C .

МЦС находится на перпендикуляре к вектору v_A (нет проскальзывания и точка с нулевой скоростью совпадает с точкой контакта колеса и неподвижной поверхностью качения). Определяем угловую скорость:



$$\omega = \frac{v_A}{AP}.$$

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону вектора линейной скорости v_A . Соединяем точки B и C с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$v_B = \omega \cdot BP; \quad v_C = \omega \cdot CP.$$

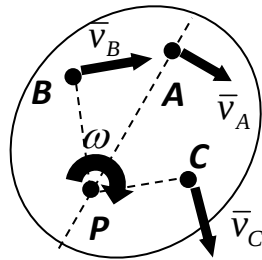
Векторы линейных скоростей v_B и v_C направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

2. Дано: v_A , ω , **положения точек** A, B, C . **Найти:** v_B, v_C .

МЦС находится на перпендикуляре к вектору v_A . Определяем расстояние до МЦС:

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

Расстояние AP откладываем в сторону дуговой стрелки угловой скорости. Дуговую стрелку угловой скорости изображаем вокруг МЦС. Соединяем точки B и C с МЦС и определяем скорости этих точек:

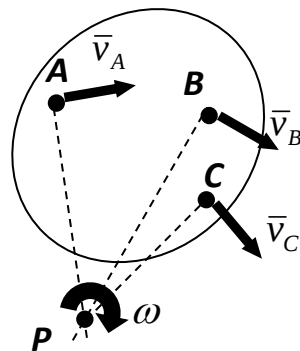


$$v_B = \omega \cdot BP; \quad v_C = \omega \cdot CP.$$

Векторы линейных скоростей v_B и v_C направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

3. Дано: v_A, v_B , **положения точек** A, B, C . **Найти:** v_C .

МЦС находится на пересечении



перпендикуляров векторам v_A , v_B . Определяем угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейных скоростей v_A , v_B . Соединяем точку C с МЦС и определяем скорость этой точки:

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости v_C направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

4. Дано: v_A , траектория точки B , положения точек A , B , C .

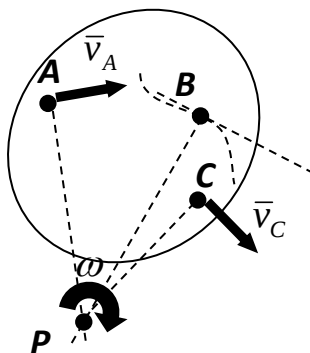
Найти: v_C .

МЦС находится на пересечении перпендикуляров к вектору v_A и касательной к траектории точки B .

Определяем угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_A}{AP}.$$

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейной скорости v_A . Соединяем точку C с МЦС и определяем скорость этой точки:



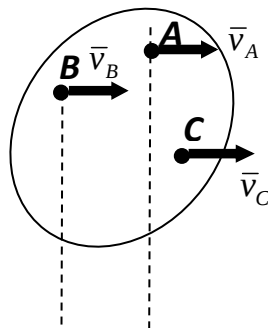
$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости v_C направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

5. Дано: $v_A, v_B, v_A \parallel v_B$, *положения точек A, B, C. Найти:* v_C .

МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам v_A и v_B . Эта точка находится в бесконечности. Угловая скорость обращается в нуль:

$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$



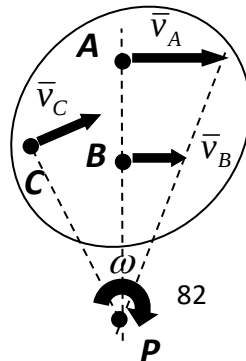
Скорость точки C равна геометрически скоростям точек A и B:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A = \bar{v}_B.$$

Вектор скорости точки C направлен параллельно векторам скоростей точек A и B (в ту же сторону).

6. Дано: $v_A, v_B, v_A \parallel v_B$, *положения точек A, B, C. Найти:* v_C .

МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам v_A и v_B . Эти перпендикуляры сливаются в одну линию.



Определяем положение МЦС и угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A - v_B}{AB}.$$

Дуговую стрелку угловой скорости изображаем в сторону векторов линейных скоростей v_A, v_B .

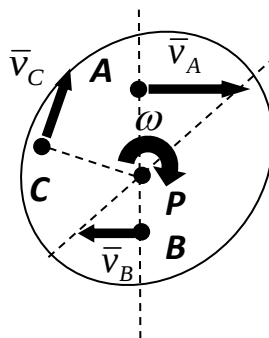
Соединяем точку C с МЦС и определяем скорость этой точки:

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости v_C направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

7. Дано: $v_A, v_B, v_A \parallel v_B$, *положения точек A, B, C . Найти:* v_C .

МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам v_A и v_B . Эти перпендикуляры сливаются в одну линию. Определяем положение МЦС (проводим линию через концы векторов v_A и v_B) и угловую скорость:



$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A + v_B}{AB}.$$

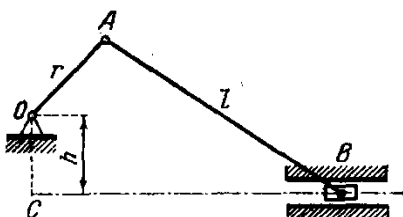
Дуговую стрелку угловой скорости изображаем в сторону векторов линейных скоростей v_A, v_B . Соединяем точку C с МЦС и определяем скорость этой точки:

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости v_C направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

Задача 4.1. Найти скорость ползуна B нецентрального кривошипного механизма при двух горизонтальных и двух вертикальных положениях кривошипа, вращающегося вокруг вала O с угловой скоростью $\omega = 1,5$ рад/с, если $OA = 40$ см, $AB = 200$ см, $OC = 20$ см.

Ответ: $v_1 = v_3 = 6,03$ см/с, $v_2 = v_4 = 60$ см/с.



К задаче 4.1. К задаче 4.2.

Задача 4.2. Стержень AB длины $0,5$ м движется в плоскости рисунка. Скорость v_A ($v_A = 2$ м/с) образует угол 45° с осью x , совмещенной со стержнем. Скорость v_B точки B образует угол 60° с осью x . Найти модуль скорости точки B и угловую скорость стержня.

Ответ: $v_B = 2,82$ м/с, $\omega = 2,06$ рад/с.

Тема 5. Ускорение точки при плоском движении твердого тела.

Теорема о сложении ускорений. Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки вокруг полюса.

Скорости точек A и B связаны между собой соотношением:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} = \bar{a}_A + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}).$$

Второе слагаемое дифференцируем как произведение двух функций:

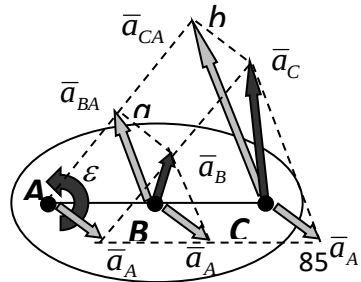
$$\frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}.$$

Получили сумму вращательного и центростремительного ускорений рассматриваемой точки относительно полюса.

Таким образом, ускорение точки плоской фигуры:

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\hat{\omega}} + \bar{a}_{BA}^{\ddot{\omega}} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^*}.$$

Следствие. Концы векторов ускорений точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят ее на



отрезки, пропорциональные расстояниям между точками.

Концы векторов ускорений точек a_{BA} и a_{CA} лежат на одной прямой ABC и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

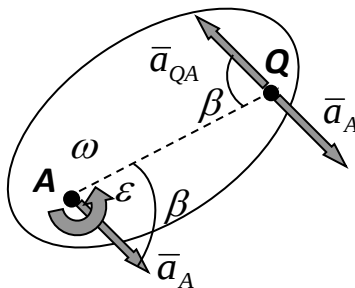
$$a_{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} AB, \quad a_{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} AC.$$

Концы векторов ускорений полюса A , изображенных в точках B и C , также лежат на одной прямой.

Мгновенный центр ускорений (МЦУ). При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, ускорение которого в этот момент равно нулю, данная точка называется **мгновенным центром ускорений** плоской фигуры.

Пусть известно ускорение одной из точек фигуры, угловая скорость и угловое ускорение вокруг этой точки.

Запишем векторное соотношение для ускорения некоторой точки Q согласно теореме о сложении ускорений:



$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AQ} + \bar{\varepsilon} \times \bar{v}_{QA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA}.$$

Зададим значение ускорения этой точки Q равной нулю:

$$\bar{a}_Q = 0.$$

Тогда получаем:

$$\bar{a}_{QA} = -\bar{a}_A.$$

Т.е. ускорение искомой точки при вращении вокруг полюса должно быть равно по модулю ускорению точки A , параллельно этому ускорению и направлено в противоположную сторону.

Угол между вектором полного ускорения точки при вращении относительно центра равен:

$$\beta = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Это позволяет найти положение МЦУ (точки Q), а именно: МЦУ должен находиться прямой, составляющей угол β к вектору ускорения точки A , проведенной в сторону углового ускорения, на расстоянии:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Если положение МЦУ найдено, ускорение любой точки плоской фигуры может быть легко определено посредством выбора полюса в МЦУ. В этом случае векторное выражение теоремы о

сложении ускорений вырождается в известную зависимость полного ускорения от расстояния до центра вращения.

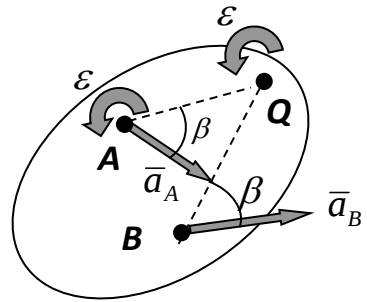
Примеры использования МЦУ для определения ускорений точек плоской фигуры.

1. Дано: a_A , ε , ω , положения точек A , B . Найти: a_B .

МЦУ находится на прямой, составляющей угол β к вектору ускорения точки A , проведенной в сторону углового ускорения, на расстоянии:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}};$$

$$\beta = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$



Соединяем точку B с МЦУ и определяем ускорение этой точки:

$$a_B = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} QB.$$

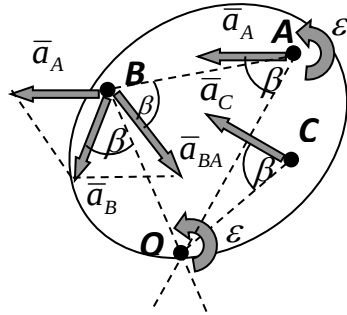
Если $\varepsilon = 0$ и $\omega \neq 0$, то $\beta = 0$ и $AQ = \frac{a_A}{\omega^2}$. Ускорения всех точек будут направлены в точку Q (МЦУ). Если $\varepsilon \neq 0$ и $\omega = 0$, то $\beta = 90^\circ$ и $AQ = \frac{a_A}{\varepsilon}$. Ускорения всех точек будут перпендикулярны отрезкам, соединяющим точки с МЦУ.

2. Дано: a_A, a_B , положения точек A, B, C . Найти: a_C .

Запишем теорему о сложении ускорений и найдем ускорение точки B во вращении вокруг полюса A :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

Определим угол β между вектором a_{BA} и прямой AB направление дуговой стрелки углового ускорения. МЦУ находится на пересечении прямых, повернутых на угол β от векторов ускорений точек A и B в сторону дуговой стрелки углового ускорения.

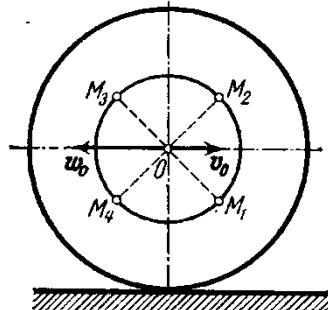


Соединяем точку C с МЦУ и определяем ускорение этой точки из одного из соотношений:

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_C}{CQ}.$$

Направляем вектор ускорения под углом β к отрезку QC в сторону дуговой стрелки углового ускорения.

Задача 5.1. Вагон трамвая движется по прямолинейному горизонтальному участку пути с замедлением $\omega_0 = 2 \text{ м/с}^2$, имея в данный момент скорость $v_0 = 1 \text{ м/с}$. Колеса катятся по рельсам без скольжения. Найти ускорения концов двух диаметров ротора, образующих с вертикалью углы по 45° , если радиус колеса $R = 0,5 \text{ м}$, а ротора $r = 0,25 \text{ м}$.



Ответ: $\omega_1 = 2,449 \text{ м/с}^2$, $\omega_2 = 3,414 \text{ м/с}^2$, $\omega_3 = 2,449 \text{ м/с}$, $\omega_4 = 0,586 \text{ м/с}^2$.

Тема 6. Сложное движение точки. Скорость точки при сложном ее движении.

I. Сложное движение точки – такое движение, при котором точка участвует одновременно в двух или нескольких движениях.

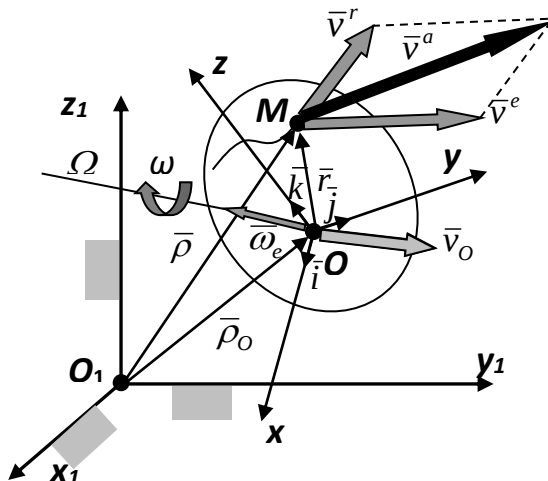
Примерами сложного движения точки (тела) являются,

например, лодка, переплывающая реку; человек, идущий по движущемуся эскалатору и др.

Для описания сложного движения точки или для представления движения в виде сложного используются две системы отсчета: **неподвижная** $O_1x_1y_1z_1$, связанная с каким-либо условно неподвижным телом и **подвижная** $Oxyz$, связанная с каким-либо движущимся телом.

При сложном движении имеют место:

Абсолютное движение (a) – движение точки, рассматриваемое относительно неподвижной системы отсчета.



Относительное движение (r) – движение точки, рассматриваемое относительно подвижной системы отсчета.

Переносное движение(e) – движение подвижной системы отсчета, рассматриваемое относительно неподвижной системы отсчета.

Абсолютная скорость (ускорение) точки $v^a(a^a)$ - скорость (ускорение) точки, вычисленная относительно неподвижной системы отсчета.

Относительная скорость (ускорение) точки $v^r(a^r)$ – скорость (ускорение) точки, вычисленная относительно подвижной системы отсчета.

Переносная скорость (ускорение) точки $v^e(a^e)$ – скорость (ускорение) точки, принадлежащей подвижной системе координат или твердому телу, с которым жестко связана подвижная система координат, совпадающей с рассматриваемой движущейся точкой в данный момент времени и вычисленная относительно неподвижной системы отсчета.

II. Теорема о сложении скоростей точки при сложном движении. Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей точки.

В любой момент времени справедливо соотношение:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_O + \bar{r} = \bar{\rho}_O + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени, имея в виду, что орты i, j, k изменяют свое направление в общем случае движения свободного тела, с которым связана подвижная система координат:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} + x\frac{d\bar{i}}{dt} +$$

В данном равенстве первое слагаемое (v_O) – *скорость полюса* O ; следующие три – *относительная скорость точки* (v^r), последние три слагаемых характеризуют *линейную скорость точки относительно оси вращения* (векторная формула):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} &= \bar{v}_O; & \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} &= \bar{v}^r; \\ x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{r}. \end{aligned}$$

Сумма первого и последнего слагаемого – скорость точки свободного тела есть *переносная скорость точки* (v^e):

$$\boxed{\bar{v}^e = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{r}.}$$

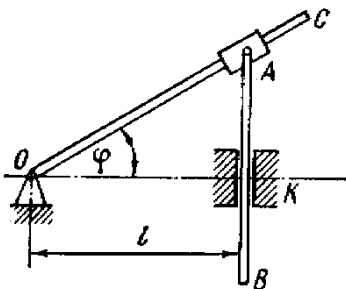
Таким образом, с учетом того, что производная по времени радиуса-вектора ρ есть абсолютная скорость, получаем:

$$\boxed{\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e.}$$

Модуль вектора абсолютной скорости:

$$|\vec{v}^a| = \sqrt{|\vec{v}^r|^2 + |\vec{v}^e|^2 + 2|\vec{v}^r||\vec{v}^e|\sin(\vec{v}^r, \vec{v}^e)}.$$

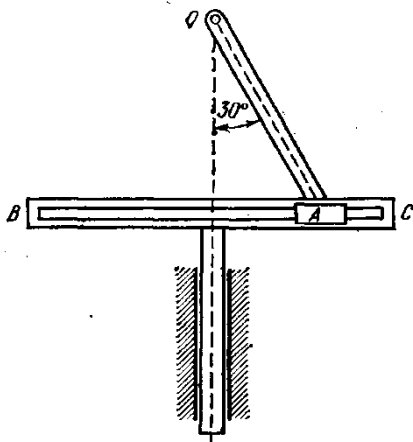
Задача 6.1. В кулисном механизме при качании кривошипа OC вокруг оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A , перемещаясь вдоль кривошипа OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в вертикальных направляющих K . Расстояние $OK = l$. Определить скорость движения ползуна A относительно кривошипа OC в функции от угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа.



Ответ: $v_r = \frac{l\omega \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi}.$

К задаче 6.1.

Задача 6.2. Стержень скользит в вертикальных направляющих, опираясь нижним концом с помощью ролика на поверхность полуцилиндра радиуса r . Полуцилиндр движется по горизонтали вправо с постоянной скоростью v_0 . Радиус ролика ρ . Определить скорость стержня, если в начальный момент он находился в наивысшем положении.



Ответ:

$$v = \frac{v_0^2 t}{\sqrt{(r + \rho)^2 - v_0^2 t^2}}.$$

К задаче 6.2

Тема 7.Сложное движение точки. Ускорение точки при сложном ее движении.

Теорема о сложении ускорений. Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений точки.

Для скорости получено соотношение:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k} + x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени еще раз:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\rho}}{dt^2} &= \frac{d^2 \bar{\rho}_O}{dt^2} + \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j} + \ddot{z} \bar{k} + \dot{x} \frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d\bar{k}}{dt} + \\ &+ \dot{x} \frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d\bar{k}}{dt} + x \frac{d^2 \bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \bar{k}}{dt^2}. \end{aligned}$$

В данном равенстве первое слагаемое (a_O) – *ускорение полюса* O ; следующие три – *относительное ускорение точки* (a^r):

$$\frac{d^2 \bar{\rho}_O}{dt^2} = \bar{a}_O ;$$

$$\ddot{\bar{x}}\bar{i} + \ddot{\bar{y}}\bar{j} + \ddot{\bar{z}}\bar{k} = \bar{a}^r .$$

Для последних трех слагаемых следует определить вторые производные по времени от ортов подвижной системы координат $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{i}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{i}); \\ \frac{d^2 \bar{j}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{j}); \\ \frac{d^2 \bar{k}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{k}). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в последние три слагаемые и сгруппируем:

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times x\bar{i} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times x\bar{i}) + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times y\bar{j} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times y\bar{j}) \\ & + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times z\bar{k} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times z\bar{k}) = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}). \end{aligned}$$

Сумма первого и полученных двух слагаемых – ускорение точки свободного тела есть **переносное ускорение точки** (a^e):

$$\bar{a}^e = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}).$$

В оставшихся шести слагаемых сложим одинаковые члены, подставим векторные произведения для первых производных по времени от ортов и сгруппируем:

$$2 \left[\dot{x} \frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d\bar{k}}{dt} \right] = 2 \left[\dot{x}(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + \dot{y}(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + \dot{z}(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) \right] = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}^r).$$

Полученная компонента ускорения представляет собой **ускорение Кориолиса** (a^c):

$$\bar{a}^c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}^r).$$

С учетом того, что вторая производная по времени радиуса-вектора ρ есть абсолютное ускорение, получаем:

$$\bar{a}^a = \bar{a}^r + \bar{a}^e + \bar{a}^c.$$

Модуль вектора ускорения Кориолиса:

$$|\bar{a}^c| = 2\omega_e v^r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}^r).$$

Ускорение Кориолиса обращается в ноль в двух случаях:

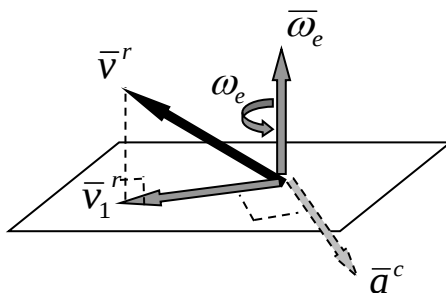
1. Угловая скорость переносного движения равна 0 (поступательное переносное движение).
2. Вектор угловой скорости параллелен вектору относительной скорости (синус угла между векторами обращается в 0).

Направление вектора ускорения Кориолиса определяется по одному из трех правил:

1. По правилу векторного произведения.
2. По правилу правой руки.

3. По правилу

Жуковского: спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости; повернуть проекцию вектора относительной скорости на прямой угол в сторону дуговой стрелки угловой скорости.



Причины возникновения ускорения Кориолиса. Для прояснения физических причин возникновения ускорения Кориолиса рассмотрим пример, в котором будем полагать постоянными вектор относительной скорости (в подвижной системе координат) и вектор угловой переносной скорости (вращения подвижной системы координат относительно неподвижной оси).

Пусть в некоторый момент времени положение точки и вектора относительной и переносной скоростей таковы, как они изображены на рисунке (вид сверху). Через некоторое время точка удалится от оси вращения и тело повернется на некоторый угол.

В результате:

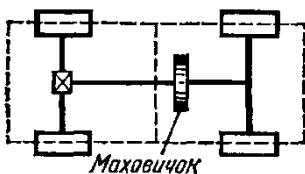
- 1) относительная скорость изменится по направлению из-за наличия переносной угловой скорости;
- 2) переносная линейная скорость изменится по величине из-за наличия относительной скорости, изменяющей расстояние точки до оси вращения.

Таким образом, можно считать, что существует две причины возникновения ускорения Кориолиса:

- 1) переносная угловая скорость влияет на относительную скорость;
- 2) относительная скорость в свою очередь влияет на переносную линейную скорость.

Кориолисово ускорение имеют тела, движущиеся по поверхности Земли, например, поезда, автомобили и т.д. Оно обнаруживается, например, при движении воды в реке, протекающей с севера на юг по меридиану. В Северном полушарии размывается правый берег, а в Южном – левый. На экваторе ускорение Кориолиса равно нулю, так как векторы переносной угловой скорости и относительной скорости параллельны. По этой же причине истирается больше правый рельс в Северном полушарии и левый в Южном, если поезд идет с севера на юг.

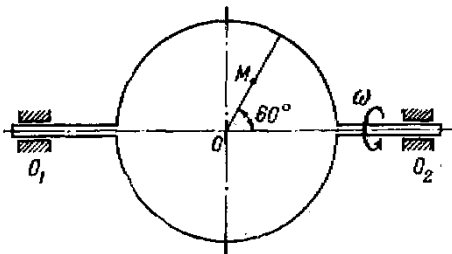
Задача 7.1. Автомобиль на прямолинейном участке пути движется с ускорением $\omega_0 = 2 \text{ м/с}^2$. На продольный вал насажен вращающийся маховичок радиуса $R = 0,25 \text{ м}$, имеющий в данный момент угловую скорость $\omega = 4 \text{ рад/с}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 4 \text{ рад/с}^2$. Найти абсолютное ускорение точек обода маховичка в данный момент.



Ответ: $\omega = 4,58 \text{ м/с}^2$.

К задаче 7.1.

Задача 7.2. По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t \text{ рад/с}$ в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону $OM = 4t^2 \text{ см}$. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60° . Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1 \text{ с}$.



Ответ: $\omega_M = 35,56 \text{ см/с}^2$.

К задаче 7.2.

Раздел Динамика.

1. Задачи динамики. 1-я задача динамики.

I. Динамика – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение в связи с действующими на объект силами.

Раздел состоит из трех подразделов:

Динамика точки – изучает движение материальной точки с учетом сил, вызывающих это движение.

Динамика механической системы – изучает движение совокупности материальных точек и твердых тел,

объединяемых общими законами взаимодействия, с учетом сил, вызывающих это движение.

Аналитическая механика – изучает движение несвободных механических систем с использованием общих аналитических методов.

Основной объект в динамике точки – **материальная точка** – материальное тело, обладающей массой, размерами которого можно пренебречь.

Основные допущения:

- 1) существует абсолютное пространство (обладает чисто геометрическими свойствами, не зависящими от материи и ее движения);
- 2) существует абсолютное время (не зависит от материи и ее движения).

Отсюда вытекает:

- 1) существует абсолютно неподвижная система отсчета;
- 2) время не зависит от движения системы отсчета;
- 3) массы движущихся точек не зависят от движения системы отсчета.

Эти допущения используются в классической механике, имеющей достаточно широкую область применения, поскольку рассматриваемые в прикладных науках механические системы не обладают такими большими массами и скоростями движения, для которых необходим учет их влияния на геометрию пространства, время, движение.

Основные законы динамики составляют основу всех методов описания и анализа движения механических систем и их динамического взаимодействия под действием различных сил.

Закон инерции. Изолированная материальная точка тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Отсюда следует эквивалентность состояния покоя и движения по инерции. Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной*. Свойство материальной точки стремиться сохранить неизменным свое кинематическое состояние называется *инертностью*.

Закон пропорциональности силы и ускорения (Основное уравнение динамики). Ускорение, сообщаемое материальной точке силой, прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе этой точки:

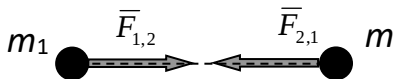
2.

$$\boxed{\bar{a} = \frac{1}{m} \bar{F}} \Rightarrow \boxed{m\bar{a} = \bar{F}.}$$

Здесь $\bar{F}$ – действующая сила, измеряется в Н (1 Н сообщает точке массой 1 кг ускорение 1 м/с²), m – масса точки (мера инертности), кг, численно равна весу, деленному на ускорение свободного падения:

$$\boxed{m = \frac{G}{g}.}$$

3. Закон равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное по величине и противоположно направленное противодействие.



$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

4. Закон независимости действия сил. Ускорение материальной точки под действием нескольких сил равно геометрической сумме ускорений точки от действия каждой из сил в отдельности:

3.

$$\vec{a}(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots) = \vec{a}_1(\vec{F}_1) + \vec{a}_2(\vec{F}_2) + \dots \Rightarrow$$

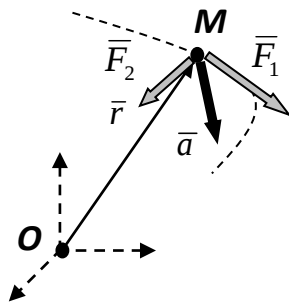
$$\vec{a}(\vec{R}) = \vec{a}_1(\vec{F}_1) + \vec{a}_2(\vec{F}_2) + \dots$$

II. Основное уравнение динамики. Существуют три способа задания движения точки (векторный, координатный, естественный). Основное уравнение динамики

соответствует векторному способу задания движения точки:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i.$$

Подставим ускорение точки при векторном задании движения в основное уравнение динамики,



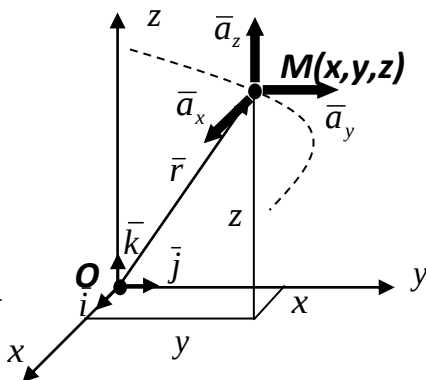
получим *дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторном виде:*

$$\boxed{m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_i}, \text{ где}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}.$$

Используем связь радиуса-вектора с координатами и вектора силы с проекциями:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$$



$$F_i = F_{xi}\bar{i} + F_{yi}\bar{j} + F_{zi}\bar{k}.$$

Отсюда получаем:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \sum (F_{xi}\bar{i} + F_{yi}\bar{j} + F_{zi}\bar{k}).$$

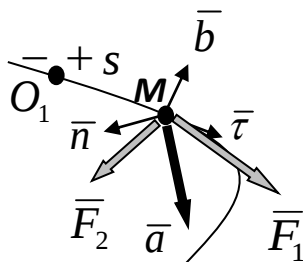
После группировки векторное соотношение распадается на три скалярных уравнения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{xi}; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{yi}; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{zi}.$$

Получаем *дифференциальные уравнения движения точки в координатном виде:*

$$m\ddot{x} = \sum F_{xi}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{yi}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{zi}.$$

Спроецируем векторное
дифференциальное уравнение
движения на естественные
(подвижные) оси координат:



$$(\tau): ma_{\tau} = \sum F_{i\tau};$$

$$(n): ma_n = \sum F_{in};$$

$$(b): m \cdot 0 = \sum F_{ib}.$$

Получаем естественные уравнения движения точки:

$$m\ddot{s} = \sum F_{i\tau}; \quad m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_{in}.$$

III. Две основные задачи динамики. Существуют две основные задачи динамики:

1. *Прямая задача:* задано движение (уравнения движения, траектория), требуется определить силы, под действием которых происходит заданное движение.
2. *Обратная задача:* заданы силы, под действием которых происходит движение, требуется найти параметры движения (уравнения движения, траекторию движения).

Обе задачи решаются с помощью основного уравнения динамики и проекции его на координатные оси. Решение первой задачи связано с операциями дифференцирования.

Решение обратной задачи требует интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений.

Порядок решения прямой и обратной задачи:

1. Составление дифференциального уравнения движения:

1.1. Выбрать систему координат (прямоугольную (неподвижную) при неизвестной траектории движения, естественную (подвижную) при известной траектории, например).

1.2. Освободить материальную точку от связей, заменить их действие реакциями, добавить активные силы.

1.3. Записать основной закон динамики в векторном виде, спроецировать на выбранные оси, выразить задаваемые или реактивные силы через переменные время, координаты или скорости, если они от них зависят.

2. Решение дифференциальных уравнений:

2.1. Понизить производную, если уравнение не приводится к каноническому (стандартному) виду.

2.2. Разделить переменные.

2.3. Если в уравнении три переменных, то сделать замену переменных, затем разделить переменные.

2.4. Вычислить неопределенные интегралы в левой и правой частях уравнения.

2.5. Используя начальные условия, определить постоянную интегрирования.

Замечание. Вместо вычисления неопределенных интегралов можно вычислить определенные интегралы с переменным верхним пределом. Нижние пределы представляют начальные

значения переменных (начальные условия). Тогда не требуется отдельного нахождения постоянной, которая автоматически включается в решение.

2.6. Выразить скорость через производную координаты по времени, и повторить пункты 2.2 ... 2.5.

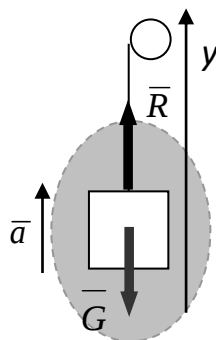
Замечание. Если уравнение приводится к каноническому виду, имеющему стандартное решение, то это готовое решение и используется.

Пример 1 (прямая задача). Кабина лифта весом G поднимается тросом с ускорением a .

Определить натяжение троса.

1. Выбираем объект и систему координат (кабина лифта движется поступательно и ее можно рассматривать как материальную точку).

2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией, прикладываем активные силы.



3. Составляем основное уравнение динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}.$$

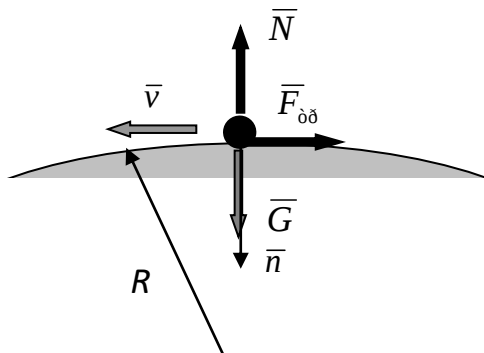
4. Проецируем основное уравнение динамики на ось y :

$$ma_y = R - G.$$

Определяем реакцию троса, которая по величине будет равна натяжению:

$$R = G + ma_y = G + \frac{G}{g} a_y = G \left(1 + \frac{a_y}{g}\right).$$

Пример 2 (прямая задача). Автомашина весом G движется по выпуклому мосту, радиус кривизны которого равен R , со скоростью V . Определить давление автомашины на мост.



1. Выбираем объект и естественную систему координат (машину рассматриваем как точку).
2. Отбрасываем связь и заменяем реакцией, прикладываем активные силы.
3. Составляем основное уравнение динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{\delta\delta}.$$

4. Проецируем основное уравнение динамики на нормальную ось:

$$ma_n = G - N.$$

Определяем нормальную реакцию, равную давлению машины на мост:

$$N = G - ma_n = G - m \frac{v^2}{R} = G \left(1 - \frac{v^2}{gR}\right).$$

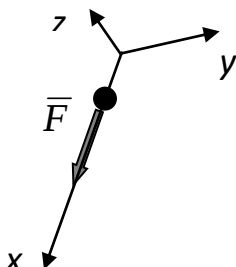
Тема: Вторая задача динамики.

Решение обратной задачи динамики. В общем случае движения точки силы, действующие на точку, являются переменными, зависящими от времени, координат и скорости. Движение точки описывается системой трех дифференциальных уравнений второго порядка. После интегрирования каждого из них будет шесть постоянных. Значения постоянных находятся из шести начальных условий при $t = 0$.

$\begin{array}{lll} x = x_0; & y = y_0; & z = z_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0; & \dot{y} = \dot{y}_0; & \dot{z} = \dot{z}_0. \end{array}$

Таким образом, под действием одной и той же системы сил материальная точка может совершать целый класс движений, определяемых начальными условиями. Начальные координаты учитывают исходное положение точки. Начальная скорость, задаваемая проекциями, учитывает влияние на ее движение по рассматриваемому участку траектории сил, действовавших на точку до прихода на этот участок, т.е. начальное кинематическое состояние.

Пример 3 (обратная задача). Свободная материальная точка массы m движется по действием силы F , постоянной по модулю и величине. В начальный момент скорость точки составляла v_0 и совпадала по направлению с силой. Определить уравнение движение точки.



1. Выберем декартову систему отсчета, направляя ось x вдоль направления силы.

2. Составляем основное уравнение динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} = \overline{const.}$$

3. Спроецируем уравнение на ось:

$$ma_x = F_x = F. \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = F.$$

4. Понижаем порядок производной:

$$m \frac{dv_x}{dt} = F.$$

5. Разделяем переменные:

$$dv_x = \frac{F}{m} dt.$$

6. Вычисляем интегралы от обеих частей уравнения:

$$\int dv_x = \int \frac{F}{m} dt \Rightarrow v_x = \frac{F}{m} t + C_1.$$

7. Представим проекцию скорости как производную координаты по времени и разделяем переменные:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + C_1 \Rightarrow dx = \left(\frac{F}{m} t + C_1 \right) dt.$$

8. Вычислив интегралы от обеих частей уравнения, получим:

$$x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

9. Для определения значений постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия $t = 0$, $v_x = v_0$, $x = x_0$:

$$v_0 = \frac{F}{m} \cdot 0 + C_1; \quad x_0 = \frac{F}{m} \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2.$$

$$C_1 = v_0; \quad C_2 = x_0.$$

В итоге получаем уравнение равнопеременного движения (по оси x):

$$4. \quad \boxed{x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.}$$

Свободные колебания материальной точки.

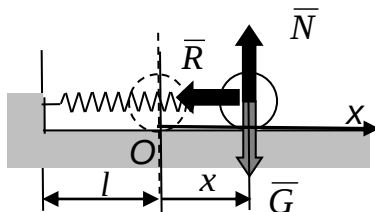
1. Виды колебаний материальной точки:

1. Свободные колебания (без учета сопротивления среды).
2. Свободные колебания с учетом сопротивления среды (затухающие колебания).
3. Вынужденные колебания.
4. Вынужденные колебания с учетом сопротивления среды.

Колебания, происходящие под действием только восстанавливающей силы, называются *свободными*.

Сила упругости – пример линейной восстанавливающей силы.

Направлена всегда к положению равновесия, величина прямо пропорциональна линейному удлинению (укорочению) пружины, равному отклонению тела от положения равновесия:



$$R = c|x| \quad R_x = -cx$$

Здесь c – коэффициент жесткости пружины, численно равный силе, под действием которой пружина изменяет свою длину на единицу, в системе СИ измеряется в Н/м.

Запишем основной закон динамики:

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{R}.$$

Выберем систему координат с центром в положении равновесия (точка O) и спроецируем уравнение на ось x :

$$m\ddot{x} = -R = -cx.$$

Разделив на массу, приведем уравнение к *стандартному (каноническому) виду*:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Здесь k – это круговая (циклическая) частота незатухающих колебаний.

Данное уравнение является однородным линейным дифференциальным уравнением II порядка, вид решения которого определяется корнями характеристического уравнения.

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Возьмем производную, тогда скорость точки:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$$

Начальные условия:

$$t = 0 \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0.$$

Определим постоянные:

$$x_0 = C_1 \cos k0 + C_2 \sin k0 = C_1 1 + C_2 0.$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin k0 + kC_2 \cos k0 = -kC_1 0 + kC_2 1.$$

=>

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Уравнение свободных колебаний примет вид:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt.$$

Уравнение можно представить одночленным выражением:

$$x = \hat{A} \sin(kt + \beta).$$

Здесь A – амплитуда, β – начальная фаза.

Константы A и β – связаны с постоянными C_1 и C_2 соотношениями:

$$C_1 = \hat{A} \sin \beta; \quad C_2 = \hat{A} \cos \beta.$$

Формулы для определения констант A и β :

$$tg \beta = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}; \quad a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k} \right)^2}.$$

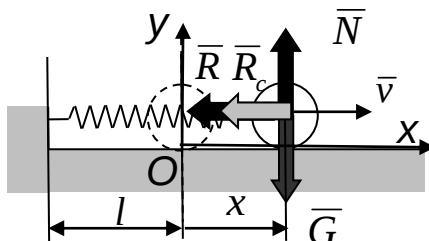
Причиной возникновения свободных колебаний является начальное смещение x_0 и/или начальная скорость v_0 .

Период колебаний – время, за которое происходит одно полное колебание:

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

II. Затухающие колебания материальной точки. Если колебательное движение материальной точки происходит при наличии восстанавливающей силы и силы сопротивления движению, то такие колебания являются затухающими.

Зависимость силы сопротивления движению от смещения или скорости определяется физической природы среды или связи, препятствующей движению. Наиболее простой зависимостью является линейная зависимость от скорости (вязкое сопротивление):



$$\bar{R}_c = -\alpha \bar{v}; \quad R_{cx} = -\alpha \dot{x}.$$

Здесь α – коэффициент вязкости среды.

Запишем основной закон динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N} + \bar{R}_c.$$

Спроецируем уравнение на ось x :

$$m\ddot{x} = -R_x - R_{cx} = -cx - \alpha\dot{x}.$$

Разделив на массу, приведем уравнение к *стандартному* виду:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0.$$

Принимаем $2n = \frac{\alpha}{m}, k^2 = \frac{c}{m}.$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет различный вид в зависимости от значений корней:

1. $n < k$ – случай малого вязкого сопротивления:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2}t).$$

или

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta).$$

Частота затухающих колебаний:

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Период затухающих колебаний:

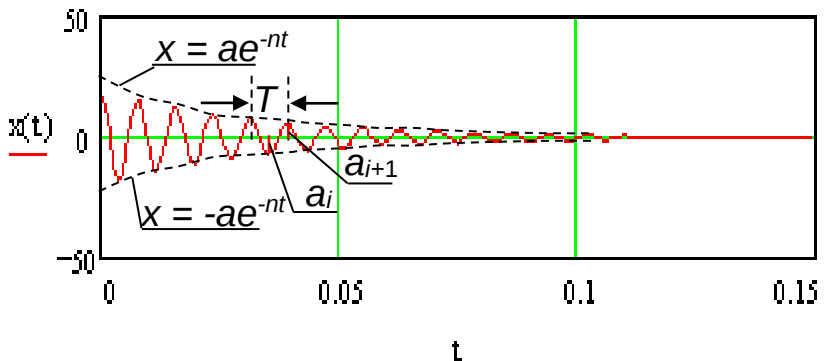
$$T^* = \frac{2\pi}{k^*}.$$

Быстроту убывания амплитуд можно оценить по отношению амплитуд, отстоящих на период колебаний, эту оценку называют **декрементом колебаний**:

$$\Delta = \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \frac{ae^{-n(t_i+T^*)}}{ae^{-nt_i}} = e^{-nT^*}.$$

Модуль натурального логарифма декремента колебаний называют **логарифмическим декрементом колебаний**, и также применяют для оценки быстроты затухания колебаний:

$$\lambda = -nT^*$$



2. $n > k$ – случай большого вязкого сопротивления:

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t})$$

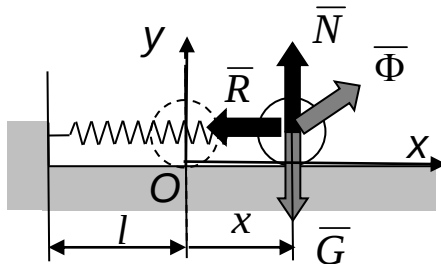
3. $n = k$ – случай граничный между первым и вторым:

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2)$$

Тема: Вынужденные колебания материальной точки.

Если наряду с восстанавливающей силой действует периодически изменяющаяся сила (возмущающая), то такие колебания являются вынужденными.

Запишем основной закон динамики:



$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N} + \bar{\Phi}.$$

Проекция уравнения на ось x :

$$m\ddot{x} = -R_x + \Phi_x = -cx + H \sin \omega t.$$

Здесь H – амплитуда возмущающей силы, ω – частота возмущающей силы.

Разделив на массу, приведем уравнение к стандартному виду:

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{H}{m} \sin \omega t.$$

Решение полученного неоднородного дифференциального уравнения состоит из двух частей $x = x_{\text{св}} + x_{\text{вын}}$:

$x_{\text{св}}$ – общее решение однородного уравнения (см. выше);

$x_{\text{вын}}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение:

$$x_{\tilde{n}\hat{a}} = \begin{cases} C_1 \cos kt + C_2 \sin kt; \\ e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}); \\ e^{-nt} (C_1 t + C_2). \end{cases}$$

Частное решение подбираем в форме правой части:

$$x_{\hat{a}\hat{u}\hat{t}} = \hat{A} \sin \omega t;$$

$$\dot{x}_{\hat{a}\hat{u}\hat{t}} = \omega \hat{A} \cos \omega t;$$

$$\ddot{x}_{\hat{a}\hat{u}\hat{t}} = -\omega^2 \hat{A} \sin \omega t.$$

Подставим полученные выражения в стандартное уравнение:

$$-\hat{A}\omega^2 \sin \omega t + k^2 \hat{A} \sin \omega t = \frac{H}{m} \sin \omega t.$$

Данное равенство должно удовлетворяться при любом t , поэтому коэффициенты при синусе равны:

$$\hat{A}(-\omega^2 + k^2) = \frac{H}{m} \Rightarrow \hat{A} = \frac{H}{m(k^2 - \omega^2)}.$$

Таким образом, *полное решение*:

$$x = x_{\hat{n}\hat{a}} + x_{\hat{a}\hat{u}\hat{i}} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H}{m(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

или

$$x = \hat{A} \sin(\omega t + \beta) + \frac{H}{m(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Постоянные C_1 и C_2 , или A и β определяются из начальных условий с использованием полного решения. При одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил материальная точка совершает сложное колебательное движение, представляющее собой результат наложения свободных ($x_{\text{св}}$) и вынужденных ($x_{\text{вын}}$) колебаний.

Рассмотрим случаи:

1. $\omega < k$ – вынужденные колебания малой частоты. Фаза колебаний совпадает с фазой возмущающей силы:

$$x_{\text{дв}} = \frac{H}{m(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

2. $\omega > k$ – вынужденные колебания большой частоты. Фаза колебаний противоположна фазе возмущающей силы:

$$x_{\text{дв}} = -\frac{H}{m(\omega^2 - k^2)} \sin \omega t.$$

3. $\omega = k$ – резонанс.

IV. Резонанс. Явление возрастания коэффициента динамичности, а вместе с тем и амплитуды колебаний, называют резонансом колебательной системы.

Уравнение колебаний при равенстве частот имеет вид:

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{H}{m} \sin kt.$$

Общее решение:

$$x_{\text{дв}} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Частное решение в форме правой части взять нельзя, т.к. получится линейно зависимое решение (см. общее решение). Возьмем частное решение в виде:

$$x_{\hat{a}\hat{u}i} = Bt \cos kt;$$

$$\dot{x}_{\hat{a}\hat{u}i} = B \cos kt - Btk \sin kt;$$

$$\ddot{x}_2 = -Bk \sin kt - Bk \sin kt - Btk^2 \cos kt = -2Bk \sin kt$$

Подставим в дифференциальное уравнение колебаний при равенстве частот и после преобразований получим:

$$B = \frac{-H}{2km}.$$

Полное решение:

$$x = x_{\hat{n}\hat{a}} + x_{\hat{a}\hat{u}i} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{Ht}{2mk} \cos kt.$$

или

$$x = A \sin(kt + \beta) + \frac{Ht}{2mk} \sin(kt - \frac{\pi}{2}).$$

Коэффициент динамичности — отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению точки под действием постоянной силы ($H = \text{const}$):

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{н\ddot{o}}}}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{H}{m(k^2 - \omega^2)}.$$

Статическое отклонение найдем из уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad -R + H = 0.$$

$$R = cx = cA_{\text{н\ddot{o}}} = mk^2 A_{\text{н\ddot{o}}} = H.$$

Отсюда:

$$A_{\text{н\ddot{o}}} = \frac{H}{mk^2}.$$

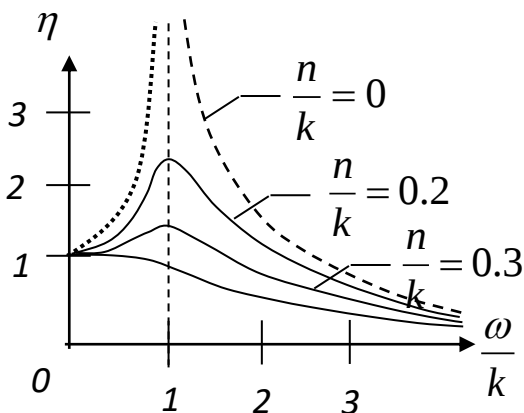
При $\omega < k$:

При $\omega > k$:

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}. \quad \eta = \frac{1}{\frac{\omega^2}{k^2} - 1}.$$

Коэффициент динамичности при резонансе имеет конечную величину и зависит от соотношения n и k .

Вынужденные колебания в среде с сопротивлением.



Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при наличии вязкого сопротивления среды:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{H}{m}\sin\omega t.$$

Общее решение выбирается в зависимости от соотношения n и k .

Частное решение возьмем в виде:

$$x_2 = A_c \sin(pt - \varepsilon);$$

$$\dot{x}_2 = A_c p \cos(pt - \varepsilon);$$

$$\ddot{x}_2 = -A_c p^2 \sin(pt - \varepsilon).$$

Подставим в дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при наличии вязкого сопротивления. Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях получаем систему уравнений, из которых следует:

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A_c = \frac{H}{m\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}.$$

Сдвиг фазы вынужденных колебаний:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}.$$

Вынужденные колебания при сопротивлении движению не затухают. Частота и период вынужденных колебаний равны частоте и периоду изменения возмущающей силы.

Тема: Теорема о движении центра масс системы.

I. Динамика механической системы. Система материальных точек или механическая система – это совокупность материальных точек или материальных тел, объединяемых общими законами взаимодействия, причем положение или движение каждой из точек или тела зависит от положения и движения всех остальных.

Система свободных точек – такая система, в которой движение точек не ограничивается никакими связями (например,

планетная система, в которой планеты рассматриваются как материальные точки).

Система несвободных точек или несвободная механическая система – система, в которой движение материальных точек или тел ограничиваются наложенными на неё связями (например, механизм, машина и т.п.).

Силы, действующие на систему:

Внешние силы (e) – силы, действующие на точки и тела системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы.

Внутренние силы (i) – это силы взаимодействия между материальными точками или телами, входящими в данную систему.

Одна и та же сила может являться как внешней, так и внутренней силой, в зависимости от того, какая механическая система рассматривается.

На основании закона действия и противодействия каждой внутренней силе F_k соответствует другая внутренняя сила F_k' , равная по модулю и противоположная по направлению.

Из этого следуют **два замечательных свойства внутренних сил**:

1. Главный вектор всех внутренних сил системы равен нулю:

$$\overline{R}^i = \sum \overline{F}_k^i = 0.$$

2. Главный момент всех внутренних сил системы относительнолюбого центра равен нулю:

$$\boxed{\bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_{kO}^i = 0.}$$

В проекциях на координатные оси:

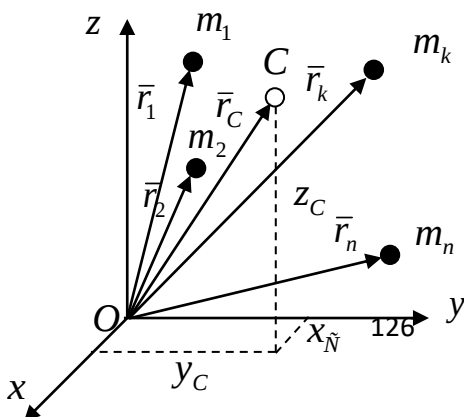
$$\boxed{\sum X_k^i = 0; \quad \sum Y_k^i = 0; \quad \sum Z_k^i = 0.}$$

$$\boxed{\sum M_{kx}^i = 0; \quad \sum M_{ky}^i = 0; \quad \sum M_{kz}^i = 0.}$$

Замечание. Данные уравнения не являются уравнениями равновесия, поскольку внутренние силы приложены к различным точкам или телам системы и могут вызывать движение этих точек (тел) относительно друг друга. Из этих уравнений следует, что внутренние силы не влияют на движение системы, рассматриваемой как одно целое.

Центр масс системы материальных точек.

Для описания движения системы в целом вводится геометрическая точка, называемой **центром масс**, радиус-вектор которой определяется выражением:



$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M},$$

Здесь M – масса всей системы, равная:

$$M = \sum m_k.$$

В проекциях на координатные оси:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}.$$

Понятие центра масс не связано с силами тяготения или силами тяжести.

Теорема о движении центра масс системы. Рассмотрим систему n материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие F_k^e и F_k^i .

Запишем для каждой точки основной закон динамики:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i;$$

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i.$$

По свойству внутренних сил системы:

$$\sum \bar{F}_k^i = \bar{R}^i = 0, \text{ поэтому}$$

$$\sum \bar{F}_k^e = \bar{R}^e.$$

В левой части уравнения внесем массы под знак производной и заменим сумму производных на производную суммы:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\sum m_k \bar{r}_k) = \bar{R}^e.$$

Из определения центра масс следует, что:

$$M \bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k.$$

Подставим в полученное уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2} (M \bar{r}_C) = \bar{R}^e.$$

После вынесения массы системы за знак производной получаем **теорему о движении центра масс системы: произведение массы системы на ускорение ее центра массе равно главному вектору внешних сил:**

$$M\bar{a}_C = \bar{R}^e.$$

В проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_x^e = \sum X_k^e; \\ M\ddot{y}_C &= R_y^e = \sum Y_k^e; \\ M\ddot{z}_C &= R_z^e = \sum Z_k^e. \end{aligned}$$

Следствия из теоремы о движении центра масс системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный вектор внешних сил системы равен нулю, $R^e = 0$, то скорость центра масс постоянна, $v_C = \text{const}$ (центр масс движется равномерно прямолинейно – закон сохранения движения центра масс).

2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ проекция главного вектора внешних сил системы на какую либо ось (например, ось x) равна нулю, $R_x^e = 0$, то скорость центра масс по этой оси постоянна, $v_{Cx} = \text{const}$ (центр масс движется по оси равномерно).

3. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный вектор внешних сил системы равен нулю, $R^e = 0$, и в начальный момент скорость центра масс равна нулю, $v_C = 0$, то радиус-вектор центра масс остается постоянным, $r_C = \text{const}$ (центр масс находится в покое – закон сохранения положения центра масс).

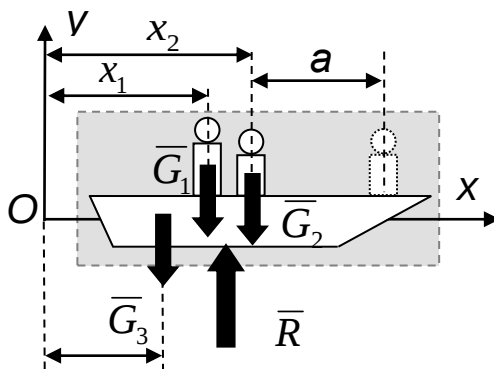
4. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ проекция главного вектора внешних сил системы на какую либо ось (например, ось x) равна нулю, $R_x^e = 0$, и в начальный момент скорость центра масс по этой оси равна нулю, $v_{Cx} = 0$, то координата центра масс по этой оси остается постоянной, $x_C = \text{const}$ (центр масс не движется по этой оси).

Пример. Два человека массами m_1 и m_2 находятся в лодке массой m_3 . В начальный момент времени лодка с людьми находилась в покое. Определить

перемещение лодки, если человек массой m_2 пересел к носу лодки на расстояние a .

1. Объект движения (лодка с людьми).

2. Отбрасываем связи (воду), заменяем связь реакцией R .



3. Добавляем активные силы G_1, G_2, G_3 .

4. Записываем теорему о центре масс:

$$M\bar{a}_C = \bar{R}^e = \bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{G}_3 + \bar{R}.$$

Проецируем на ось x :

$$M\ddot{x}_C = 0. \Rightarrow$$

$$\dot{x}_C = \text{const} = 0. \Rightarrow$$

$$x_C = \text{const.} \Rightarrow$$

$$\sum m_k x_{k0} = \sum m_k x_k. \Rightarrow$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = m_1 (x_1 + l) + m_2 (x_2 + l + a) + m_3 x_3 \Rightarrow$$

$$0 = m_1 l + m_2 (l + a) + m_3 l. \Rightarrow$$

$$l = - \frac{m_2 a}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Лодка переместится на расстояние l в противоположную сторону.

Определим, на какое расстояние надо пересесть человеку массы m_1 , чтобы лодка осталась на месте:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = m_1 (x_1 + b) + m_2 (x_2 + a) + m_3 x_3. \Rightarrow$$

$$0 = m_1 b + m_2 a. \Rightarrow$$

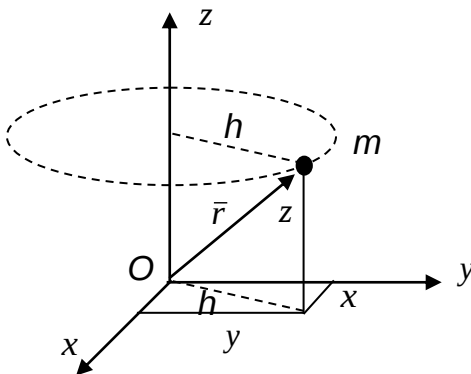
$$b = - \frac{m_2}{m_1} a.$$

Тема: Моменты инерции твердого тела.

I. Элементы теории моментов инерции. При вращательном движении твердого тела мерой сопротивления изменению движения является момент инерции.

**Момент инерции
материальной точки
относительно оси.**

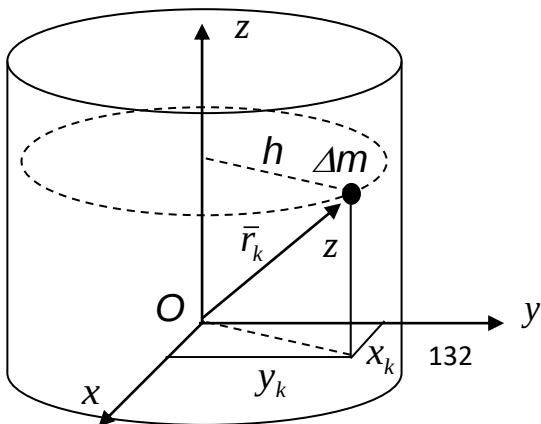
Момент инерции
материальной точки
относительно оси равен
произведению массы точки на
квадрат расстояния точки до
оси:



$$I_z = mh^2 = m(x^2 + y^2).$$

Момент инерции твердого тела относительно оси.

Момент инерции
твердого тела относительно
оси равен сумме
произведений массы
каждой точки на квадрат



расстояния этой точки до оси:

$$I_z = \sum \Delta m_k h_k^2 = \sum \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

При переходе от дискретной малой массы к бесконечно малой массе точки предел такой суммы определяется интегралом:

$$I_z = \int h^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm.$$

Кроме осевого момента инерции твердого тела существуют:

Центробежный момент инерции твердого тела:

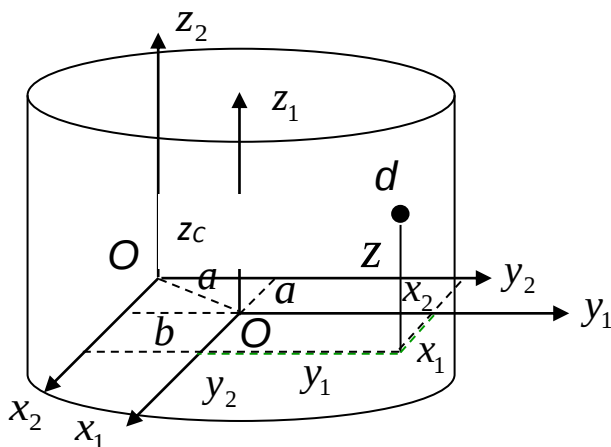
$$I_{xy} = \int xy dm.$$

Полярный момент инерции твердого тела:

$$I_O = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

Теорема Штейнера (о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей):

$$\begin{aligned}
I_{z_2} &= \int (x_2^2 + y_2^2) dm = \\
&= \int ((x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2) dm = \\
&= \int (x_1^2 + y_1^2) dm + 2a \int x_1 dm + \\
&\quad + 2b \int y_1 dm + (a^2 + b^2) \int dm.
\end{aligned}$$



Таким образом:

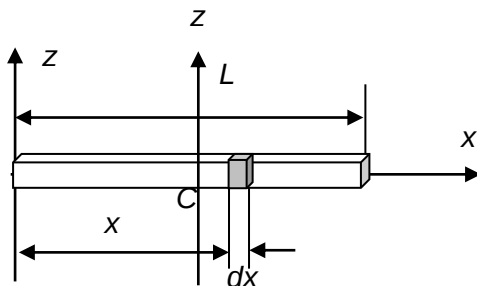
$$I_{z_2} = I_{z_1} + 2aS_{y_1} + 2bS_{x_1} + d^2M.$$

Если ось z_1 проходит через центр масс, то статические моменты равны нулю:

$$I_{z2} = I_{zC} + d^2 M.$$

Рассмотрим моменты инерции простейших тел:

Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси, проходящей через его конец.



Выделим элементарный объем $dV = Adx$ на расстояниях. Элементарная масса:

$$dm = \rho Adx.$$

Здесь A – площадь поперечного сечения стержня, ρ – плотность материала стержня.

Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси, проходящей через один из его концов:

$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho Adx = \rho A \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}.$$

Для вычисления **момента инерции относительно центральной оси** (проходящей через центр тяжести) достаточно изменить расположение оси и задать пределы интегрирования $(-L/2;$

$L/2$). Здесь продемонстрируем формулу перехода к параллельным осям:

$$I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \frac{ML^2}{12}.$$

Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии.

Выделим элементарный объем $dV = 2\pi r dr H$ (тонкий цилиндр радиуса r).

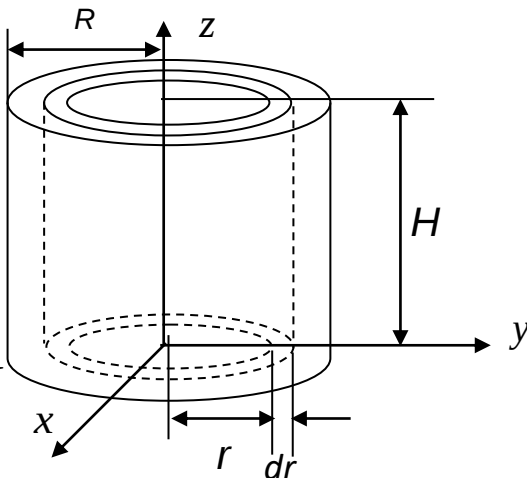
Элементарная масса:

$$dm = \rho 2\pi r dr H$$

.

Тогда:

1



$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H =$$

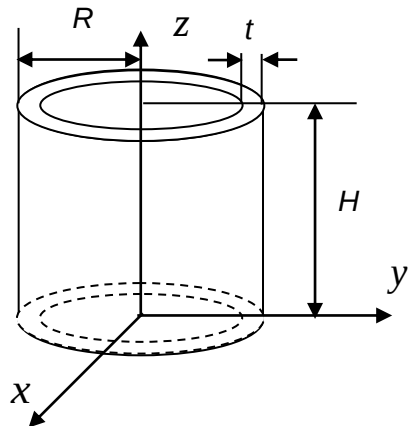
$$= \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}.$$

Здесь использована формула объема цилиндра $V = \pi R^2 H$. Для вычисления момента инерции пустотелого (толстого) цилиндра достаточно задать пределы интегрирования от R_1 до R_2 ($R_2 > R_1$):

$$I_z = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_{R_1}^{R_2} = \rho 2\pi H \left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right) = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}.$$

Момент инерции тонкого цилиндра относительно оси симметрии ($t < R$).

В силу малости толщины цилиндра считаем, что все точки находятся на одинаковом расстоянии R до оси и интегрирования не требуется. Объем $V = 2\pi R t H$. (тонкий цилиндр радиуса R толщиной стенки t).



Тогда момент инерции:

$$I_z = R^2 \rho 2\pi R t H = MR^2.$$

То же самое можно получить с использованием формулы для *толстостенного цилиндра*, учитывая малость t :

$$I_z = \frac{M((R^2 + (R-t)^2))}{2} = \frac{M(2R^2 - 2Rt + t^2)}{2}.$$

Поскольку высота цилиндров в результате не входит в формулы моментов инерции, то они остаются справедливыми для тонкого сплошного диска и обода колеса (тонкого кольца).

Тема: Теорема об изменении количества движения материальной точки.

Импульс силы — мера механического взаимодействия, характеризующая передачу механического движения со стороны действующих на точку сил за данный промежуток времени, равная произведению силы на промежуток времени:

$$\bar{S} = \bar{F}(t_2 - t_1).$$

Для получения полного импульса силы необходимо сложить все элементарные импульсы:

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt.$$

В проекциях на координатные оси, соответственно:

$$S_{\tilde{o}} = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt; \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt; \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt.$$

Импульс равнодействующей – равен геометрической сумме импульсов приложенных к точке сил за один и тот же промежуток времени:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$

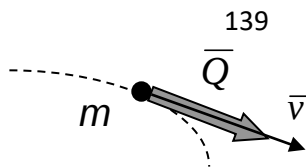
Умножим на dt :

$$\bar{R} dt = \bar{F}_1 dt + \bar{F}_2 dt + \dots + \bar{F}_n dt.$$

Проинтегрируем на данном промежутке времени, в итоге получим:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots + \bar{S}_n.$$

Количество движения материальной точки – мера механического движения, определяемая вектором, равным произведению массы точки на вектор ее скорости:



$$\boxed{\bar{Q} = m\bar{v}.}$$

Количество движения системы материальных точек – геометрическая сумма количеств движения материальных точек:

$$\boxed{\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \dots + \bar{Q}_n = \sum \bar{Q}_k.}$$

$$\bar{Q} = \sum \bar{Q}_k = \sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_k).$$

По определению центра масс:

$$M\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k.$$

В итоге получаем, что *вектор количества движения системы равен произведению массы всей системы на вектор скорости центра масс системы:*

$$\boxed{\bar{Q} = M\bar{v}_C.}$$

Тема: Теорема об изменении количества движения механической системы.

Рассмотрим систему n материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их

на соответствующие равнодействующие F_k^e и F_k^i . Запишем для каждой точки основное уравнение динамики, представив ускорение как производную от скорости:

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:

$$\sum m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i.$$

По свойству внутренних сил системы:

$$\sum \bar{F}_k^i = \bar{R}^i = 0.$$

В левой части уравнения внесем массы под знак производной и заменим сумму производных на производную суммы:

$$\frac{d}{dt}(\sum m_k \bar{v}_k) = \bar{R}^e.$$

По определению количества движения системы:

$$\sum m_k \bar{v}_k = \bar{Q}.$$

Тогда получаем, что *производная вектора количества движения системы по времени равна главному вектору внешних сил системы:*

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e.$$

В проекциях на координатные оси:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum F_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e = \sum F_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e = \sum F_{kz}^e.$$

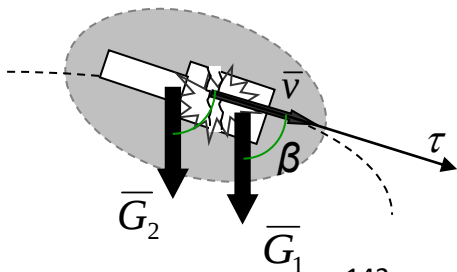
Следствия из теоремы об изменении количества движения системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный вектор внешних сил системы равен нулю, $R^e = 0$, то вектор количества движения постоянен, $Q = \text{const}$ (закон сохранения количества движения системы).

2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ проекция главного вектора внешних сил системы на какую либо ось (например, ось x) равна нулю, $R_x^e = 0$, то проекция количества движения системы на эту ось постоянна, $Q_x = \text{const}$.

Пример. Граната массы M , летевшая со скоростью v , разорвалась на две части. Скорость одного из осколков массы m_1 возросла в направлении движения до величины v_1 . Определить скорость второго осколка.

1. Объект движения (граната).



2. Объект — свободная система, связи и их реакции отсутствуют.

3. Добавляем активные силы G_1 и G_2 .

4. Записываем теорему об изменении количества движения:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e = \bar{G}_1 + \bar{G}_2.$$

Проецируем на ось τ :

$$\frac{dQ_\tau}{dt} = m_1 g \cos \beta + m_2 g \cos \beta \neq 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_{Q_0}^Q dQ_\tau = \int_0^t (m_1 g \cos \beta + m_2 g \cos \beta) dt \approx 0.$$

Правый интеграл практически равен нулю, т.к. время взрыва $t \ll 1$. Отсюда:

$$Q_\tau - Q_{\tau 0} \approx 0 \quad \text{или} \quad Q_{\tau 0} \approx Q_\tau.$$

Получаем закон сохранения:

$$Mv \approx m_1 v_1 + m_2 v_2. \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{Mv - m_1 v_1}{m_2} v_2.$$

Теорема Эйлера (применение теоремы об изменении количества движения системы к движению сплошной среды (воды)).

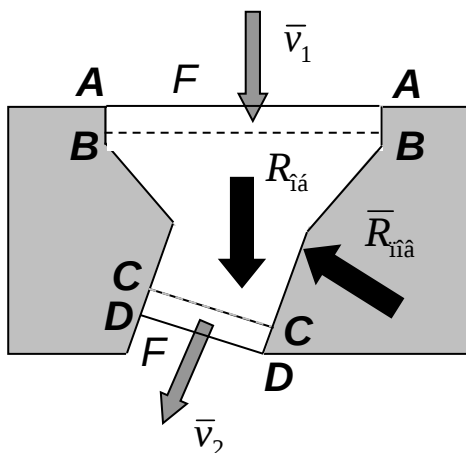
1. Выбираем в качестве объекта движения объем воды, находящийся в криволинейном канале турбины.

2. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями ($R_{\text{пов}}$ – равнодействующая поверхностных сил).

3. Добавляем активные силы ($R_{\text{об}}$ – равнодействующая объемных сил).

4. Записываем теорему об изменении количества движения системы:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}_{\hat{\text{ia}}} + \bar{R}_{\hat{\text{ia}}}.$$



Количество движения воды в моменты времени t_0 и t_1 представим как суммы:

$$\bar{Q}_0 = \bar{Q}_{AB} + \bar{Q}_{BC}.$$

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_{BC} + \bar{Q}_{CD}.$$

Изменение количества движения воды в интервале времени $[t_0, t_1]$:

$$\Delta \bar{Q} = \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \bar{Q}_{CD} - \bar{Q}_{AB}.$$

Изменение количества движения воды за бесконечно малый интервал времени dt :

$$d\bar{Q} = d\bar{Q}_{CD} - d\bar{Q}_{AB},$$

где

$$d\bar{Q}_{AB} = (\rho F_1 v_1 dt) \bar{v}_1;$$

$$d\bar{Q}_{CD} = (\rho F_2 v_2 dt) \bar{v}_2.$$

Принимаем произведение плотности, площади поперечного сечения и скорости за *секундную массу*:

$$\boxed{M_{сек} = \rho F_1 v_1 = \rho F_2 v_2,}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} d\bar{Q}_{AB} &= (M_{\text{сек}} dt) \bar{v}_1; \\ d\bar{Q}_{CD} &= (M_{\text{сек}} dt) \bar{v}_2. \end{aligned} \quad \text{или}$$

$$d\bar{Q} = M_{\text{сек}} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) dt.$$

Подставляя дифференциал количества движения системы в теорему об изменении получаем, что **геометрическая разность векторов секундных количеств движения жидкости равна сумме главных векторов объемных и поверхностных сил:**

$$M_{\text{сек}} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \bar{R}_{\text{об}} + \bar{R}_{\text{пов}}.$$

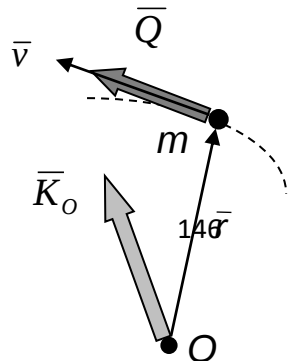
В проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} (x): M_{\text{сек}} (v_{2x} - v_{1x}) &= R_x^{\text{об}} + R_x^{\text{пов}}; \\ (y): M_{\text{сек}} (v_{2y} - v_{1y}) &= R_y^{\text{об}} + R_y^{\text{пов}}; \\ (z): M_{\text{сек}} (v_{2z} - v_{1z}) &= R_z^{\text{об}} + R_z^{\text{пов}}. \end{aligned}$$

Разность проекций векторов секундных количеств движения жидкости на ось равна сумме проекций главных векторов объемных и поверхностных сил на ту же ось.

Тема: Теорема об изменении момента количества движения точки.

Момент количества движения точки или кинетический момент движения



относительно некоторого центра— это мера механического движения, определяемая вектором, равным векторному произведению радиуса-вектора материальной точки на вектор ее количества движения:

$$\overline{K}_O = \overline{r} \times \overline{Q} = \overline{r} \times m\overline{v}.$$

В проекциях на оси:

$$\begin{aligned} K_x &= y(mv_z) - z(mv_y); \\ K_y &= z(mv_x) - x(mv_z); \\ K_z &= x(mv_y) - y(mv_x). \end{aligned}$$

Кинетический момент системы материальных точек относительно некоторого центра равен геометрической сумме моментов количеств движений всех материальных точек относительно этого же центра:

$$\overline{K}_O = \overline{K}_{1O} + \overline{K}_{2O} + \dots + \overline{K}_{nO} = \sum \overline{K}_{iO} = \sum \overline{r}_i \times m_i \overline{v}_i.$$

В проекциях на оси:

$$K_x = \sum K_{ix}; K_y = \sum K_{iy}; K_z = \sum K_{iz}.$$

Тема: Теорема об изменении кинетического момента системы. Рассмотрим систему n материальных точек. Приложенные к

каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие F_k^e и F_k^i . Запишем для каждой точки основное уравнение динамики:

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

Умножим векторно каждое из равенств на радиус-вектор:

$$\bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i.$$

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i.$$

По свойству главного момента всех внутренних сил системы:

$$\bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_{kO}^i = 0.$$

Таким образом, получаем:

$$\sum \frac{d}{dt} (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{M}_O^e.$$

Заменим сумму производных на производную суммы:

$$\frac{d}{dt}(\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{M}_O^e.$$

Выражение в скобках есть момент количества движения системы. Тогда получаем, что *производная вектора момента количества движения системы относительно некоторого центра по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этого же центра:*

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e.}$$

В проекциях на координатные оси:

$$\boxed{\frac{dK_x}{dt} = M_x^e; \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e; \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e.}$$

Производная момента количества движения системы относительно некоторой оси по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этой же оси.

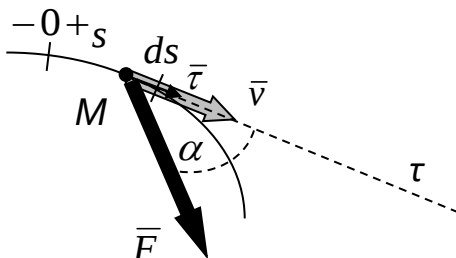
Следствия из теоремы об изменении момента количества движения системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ вектор главного момента внешних сил системы относительно некоторого центра равен нулю, $M_O^e = 0$, то вектор момента количества движения системы относительно этого же центра постоянен, $K_O = \text{const}$ (закон сохранения момента количества движения системы).

2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный момент внешних сил системы относительно какой-либо оси (например, оси x) равен нулю, $M_x^e = 0$, то момент количества движения системы относительно этой оси постоянен, $K_x = \text{const}$.

Тема: Работа и мощность.

1. Работа силы. Пусть точка приложения переменной по величине и направлению силы перемещается по некоторой произвольной траектории. На малом (элементарном) перемещении силу можно считать постоянной и **элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения (касательную к траектории движения), умноженной на элементарное перемещение:**



$$dA = F_{\tau} ds = F \cos \alpha \cdot ds$$

Знак элементарной работы определяется величиной угла α и знаком $\cos \alpha$:

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ когда } dA > 0; \quad \alpha > \frac{\pi}{2}, \text{ когда } dA < 0.$$

Поскольку часто более удобно работать с острыми углами, то в этом случае используют острый угол и знак присваивают по правилу: *если сила и перемещение совпадают по направлению, то присваивается знак «+», если противоположны по направлению, то знак «-».*

Запишем элементарную работу в виде скалярного произведения:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

В проекциях на оси координат:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Тогда работа на конечном перемещении MM_1 получается суммированием или интегрированием:

$A = \int_M^{M_1} F_\tau ds$	$A = \int_M^{M_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
$A = \int_M^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$	

Частные случаи:

1. Сила постоянная по величине ($F = \text{const}$) и направлению ($\alpha = \text{const}$):

$$A = \int_M^{M_1} F \cos \alpha \cdot ds = F \cos \alpha \int_M^{M_1} ds = Fs \cos \alpha.$$

2. Сила постоянная по величине ($F = \text{const}$) и параллельна перемещению ($\alpha = 0$):

$$A = \pm Fs.$$

3. Сила перпендикулярна перемещению:

$$A = 0.$$

Работа равнодействующей на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении:

$$A = \sum A_i.$$

Работа постоянной сил по величине и направлению на составном перемещении равна алгебраической сумме работ этой силы на каждом из составляющих перемещений:

$$A = \bar{F} \cdot \bar{s} = \bar{F} \cdot (\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \dots) = \bar{F} \cdot \bar{s}_1 + \bar{F} \cdot \bar{s}_2 + \dots = A_{s1} + A_{s2} + \dots$$

$$A = \sum A_{si}.$$

Работа внутренних сил неизменяемой системы равна нулю:

$$A^i = \int_M^{M_1} (\bar{R} + \bar{R}') \cdot d\bar{r} = \int_M^{M_1} (\bar{R} - \bar{R}) \cdot d\bar{r} = 0; (\bar{R}' = -\bar{R}).$$

$$\boxed{A^i = 0.}$$

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению силы тяжести на разность высот:

$$A = \int_M^{M_1} G_x dx + G_y dy + G_z dz = \int_M^{M_1} (-G) dz = -Gz \Big|_z^{z_1} = -G(z_1 - z)$$

$$(G_x = G_y = 0, G_z = -G).$$

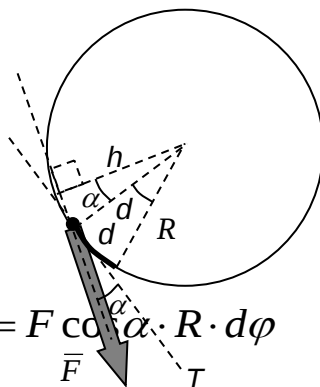
$$\boxed{A = -G(z_1 - z).}$$

Работа линейной силы упругости (реакции пружины) при перемещении из состояния равновесия:

$$A = \int_M^{M_1} R_x dx = \int_M^{M_1} (-cx) dx = -c \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x_1} = -c \frac{x_1^2}{2}; (R_x = -cx)$$

$$\boxed{A = -c \frac{\Delta x^2}{2}.}$$

Работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Запишем выражение для элементарной работы силы, приложенной к точке, и выразим элементарное перемещение через угол поворота тела:



$$dA = F_{\tau} ds = F \cos \alpha \cdot ds = F \cos \alpha \cdot R \cdot d\varphi$$

Причем $\cos \alpha \cdot R = h$.

Тогда *работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, выражается через момент силы относительно оси:*

$$dA = Fh \cdot d\varphi = M_z(\bar{F})d\varphi.$$

Работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, для конечного угла поворота:

$$A = \int_{\varphi}^{\varphi_1} M_z(\bar{F})d\varphi.$$

В случае постоянного значения момента силы относительно оси работа равна произведению момента силы на угол поворота:

$$A = M_z(\bar{F})(\varphi_1 - \varphi).$$

Мощность – величина, характеризующаяся количеством работы, произведенной в единицу времени. Пусть за период времени Δt выполнена некоторая работа в количестве ΔA , тогда **средняя мощность**:

$$N_{\text{ср}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Перейдя к пределу, получим выражение для **мгновенной мощности**:

$$N = \frac{d^* A}{dt}.$$

Подставим в формулу мощности выражение элементарной работы, получим **мощность силы, приложенной к точке**:

$$N = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v_\tau = \bar{F} \cdot \bar{v}.$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся твердому телу:

$$N = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega_z = \bar{M} \cdot \bar{\omega}.$$

Тема: Кинетическая энергия МТ и МС. Теоремы об изменении кинетической энергии МТ и МС. – мера механического движения, характеризующая способность механического движения превращаться в эквивалентное количество другого движения, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы – величина, равная сумме кинетических энергий всех точек механической системы:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Рассмотрим кинетическую энергию при различных видах движения тела:

Поступательное движение:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = \frac{v^2}{2} M = \frac{Mv_C^2}{2};$$

$$\Rightarrow T = \frac{Mv_C^2}{2}.$$

Вращательное движение:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k (\omega_z h_k)^2}{2} = \frac{\omega_z^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{I_z \omega_z^2}{2},$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{I_z \omega_z^2}{2}}.$$

Плоское движение:

$$T = \sum \frac{m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2} = \sum \frac{m_k (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC}) \cdot (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC})}{2} =$$

$$= \frac{M v_C^2}{2} + \bar{v}_C \cdot \sum m_k \bar{v}_{kC} + \sum \frac{m_k v_{kC}^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{zC} \omega_z^2}{2}}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Изменение кинетической энергии точки равно работе сил, действующих на точку на том же перемещении.

Запишем основной закон динамики точки:

$$m \bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{R}.$$

Выразим ускорение через скорость и умножим левую и правую части соотношения скалярно на дифференциал радиуса-вектора:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{R} \cdot d\bar{r} \quad \Leftrightarrow \quad m\bar{v} \cdot d\bar{v} = \bar{R} \cdot d\bar{r}.$$

Проинтегрируем полученное соотношение:

$$\int d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0}^M dA; \quad \left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_0}^v = A.$$

После подстановки пределов получаем **теорему об изменении кинетической энергии материальной точки**:

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.}$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы.
Изменение кинетической энергии системы равно работе сил, действующих на систему на соответствующих перемещениях точек системы.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для произвольной точки системы, при этом выделим работу внешних и внутренних сил, приложенных к данной точке:

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{mv_{k0}^2}{2} = A_k^i + A_k^e.$$

Просуммируем левые и правые части соотношений по всем точкам:

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^i + \sum A_k^e.$$

В левой части получили разность кинетических энергий системы:

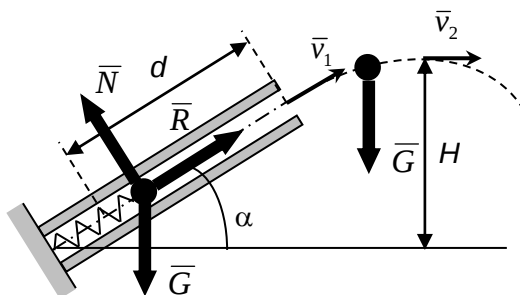
$$T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e.$$

Для неизменяемой системы, где $\sum A_k^i = 0$:

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

Пример. Снаряд массы m выбрасывается пружинным устройством из канала под углом α к горизонту. Длина нерастянутой пружины жесткостью c равна длине канала l_0 . Перед выстрелом пружина сжимается на величину d . Определить скорость снаряда при вылете из канала, а также максимальную высоту полета.

1. Выбираем объект – снаряд.
2. Отбрасываем связи – ствол и пружину.
Заменяем связи реакциями – N , R .



3. Добавляем активные силы – G .

4. Записываем теорему об изменении кинетической энергии для точки:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Начальная скорость снаряда равна нулю: $v_0 = 0$.

Работа сил, приложенных к объекту, равна:

$$A = A_N + A_G + A_R.$$

Работа нормальной реакции равна нулю (направление реакции перпендикулярно перемещению): $A_N = 0$.

Работа силы тяжести:

$$A_G = -G\Delta h = -mgd \sin \alpha.$$

Работа упругой реакции пружины (направление реакции совпадает с перемещением):

$$A_R = c \frac{d^2}{2}.$$

Подставляем определенные величины в теорему:

$$\frac{mv_1^2}{2} - 0 = -mgd \sin \alpha + c \frac{d^2}{2}.$$

Отсюда величина скорости вылета снаряда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha}.$$

Определяем максимальную высоту полета (повторяем пункты 1-4):

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A.$$

Вертикальная скорость снаряда в наивысшей точке траектории равна нулю: $v_{2y} = 0$.

Горизонтальная скорость снаряда постоянная (из закона сохранения проекции на ось x количества движения точки) и равна:

$$v_{2x} = v_{1x} = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Работа силы тяжести:

$$A_G = -G\Delta h = -mg(H - l_0 \sin \alpha).$$

Подставляем определенные величины в теорему:

$$\frac{m \left(\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha \right) \cos^2 \alpha}{2} - \frac{m \left(\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha \right)}{2} = -$$

Отсюда максимальная высота полета:

$$H = \left(\frac{cd^2}{2mg} - d \sin \alpha \right) \sin^2 \alpha + l_0 \sin \alpha.$$

Тема: Динамика поступательного и вращательного движения твердого тела. Динамика плоского движения твердого тела.

Рассмотренные теоремы динамики системы дают дифференциальные уравнения, описывающие эти два типа движения твердого тела:

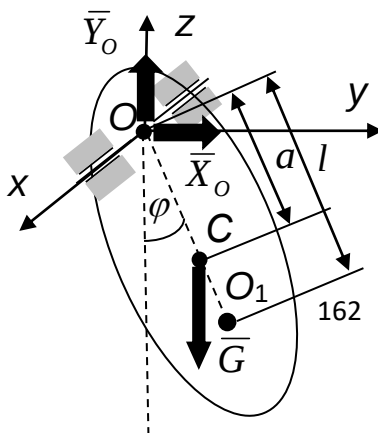
При поступательном движении твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = R_x^e; \quad M\ddot{y}_C = R_y^e; \quad M\ddot{z}_C = R_z^e.$$

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e.$$

Физический маятник – твердое тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось



вращения, не проходящую через его центр тяжести, и находящийся под действием только силы тяжести. При отклонении физического маятника от положения равновесия возникает возвращающий момент от силы тяжести, наличие которого является условием колебательного движения (качания) относительно положения равновесия.

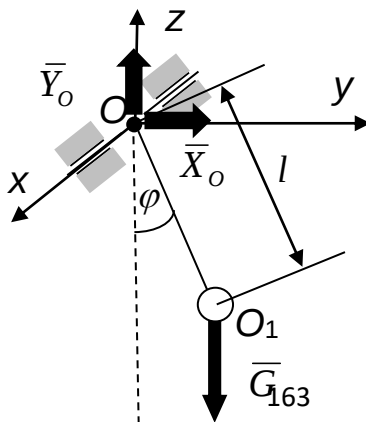
1. Выбираем объект – маятник.
2. Отбрасываем связи (цилиндрические шарниры) и заменяем их реакциями (суммарные реакции двух шарниров).
3. Запишем дифференциальное уравнение вращения оси x :

$$I_x \ddot{\varphi} = M_x^e = -Ga \sin \varphi.$$

Отсюда получаем **дифференциальное уравнение качаний физического маятника**:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Ga}{I_x} \sin \varphi = 0.$$

Математический маятник – тяжелая материальная точка, совершающая движение под действием силы тяжести в вертикальной плоскости относительно точки привеса на нерастяжимой невесомой нити.



Рассмотрим математический маятник длиной l :

$$I_x \ddot{\varphi} = M_x^e = -Gl \sin \varphi.$$

$$\text{Здесь } I_x = ml^2, G = mg.$$

Подставим момент инерции и получим *дифференциальное уравнение качаний математического маятника*:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Поскольку полученные уравнения отличаются лишь коэффициентами, то всегда можно поставить в соответствие физическому маятнику математический маятник, период качаний которого равен периоду данного физического маятника. Для этого достаточно приравнять коэффициенты:

$$\frac{Ga}{I_x} = \frac{g}{l}.$$

Отсюда можно определить *приведенную длину физического маятника*:

$$l = \frac{I_x}{ma}; \quad l > a.$$

Точка O_1 физического маятника, находящаяся на расстоянии l по прямой OC называется *центром качаний маятника*.

В случае малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Ga}{I_x} \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad \text{где} \quad k = \sqrt{\frac{Ga}{I_x}}.$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_x}{Ga}}.$$

Используя формулу для периода колебаний можно определять опытным путем моменты инерции тел сложной формы (положение центра тяжести можно найти методом подвешивания).

Динамика плоского движения твердого тела.

Плоское движение может быть представлено как совокупность поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного движения вокруг центра масс.

Выберем в качестве полюса центр масс:

$$x_C = f_1(t); \quad y_C = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t).$$

Используя теорему о движении центра масс, получим дифференциальные уравнения, описывающие поступательное движение тела:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_x^e = \sum F_{ix}^e; \\ M\ddot{y}_C &= R_y^e = \sum F_{iy}^e. \end{aligned}$$

Используя теорему об изменении кинетического момента системы, найдем дифференциальное уравнение, описывающее вращательное движение тела вокруг центра масс:

$$I_z \ddot{\phi} = M_z^e = \sum M_{iz}^e.$$

Тема: Принцип Даламбера для МТ и МС. Метод кинетостатики.

Принцип Даламбера – это общий метод, при помощи которого уравнениям динамики по форме придастся вид уравнений статики.

Основное уравнение динамики точки:

$$m\bar{a} = \sum \bar{P}_i.$$

Перенесем произведение массы на ускорение в правую часть:

$$0 = \sum \bar{P}_i - m\bar{a}.$$

Получившееся дополнительное слагаемое имеет размерность силы и принимается за силу инерции, направленную в сторону противоположную ускорению:

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}.$$

Получаем *принцип Даламбера для материальной точки: геометрическая сумма приложенных к точке сил и силы инерции этой точки равна нулю:*

$$\sum \overline{P}_i + \overline{\Phi} = 0.$$

Сила инерции условно добавляется к действующим на точку силам, образуя взаимно уравновешенную систему сил.

Принцип Даламбера для несвободной механической системы.

Запишем принцип Даламбера для k -той точки:

$$\overline{P}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0.$$

Здесь P_k – равнодействующая задаваемых сил, приложенных к точке;

R_k – равнодействующая реакций связей, приложенных к точке;

$\Phi_k = -ma_k$ – сила инерции точки.

Сложим все уравнений:

$$\sum \bar{P}_k + \sum \bar{R}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0.$$

Здесь P^* – главный вектор задаваемых сил, приложенных к точке;

R^* – главный вектор реакций связей, приложенных к точке;

Φ^* – главный вектор сил инерции точек системы.

Таким образом, *геометрическая сумма главных векторов задаваемых сил, реакций связи и сил инерции материальных точек равна нулю:*

$$\boxed{\bar{P}^* + \bar{R}^* + \bar{\Phi}^* = 0.}$$

Умножим уравнение, выражающее принцип Даламбера на радиус-вектор, проведенный из центра O к точке:

$$\bar{r}_k \times \bar{P}_k + \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0.$$

Сложим все уравнений:

$$\sum \bar{r}_k \times \bar{P}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0.$$

Таким образом, *геометрическая сумма главных моментов задаваемых сил, реакций связи и сил инерции материальных точек относительно любого центра равна нулю:*

$$\boxed{\bar{M}_O^P + \bar{M}_O^R + \bar{M}_O^\Phi = 0.}$$

III. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду. В динамике за центр приведения принимается обычно центр масс системы.

В результате приведения сил инерции в общем случае получается главный вектор сил инерции и главный момент сил инерции относительно центра масс:

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}^* &= \sum \overline{\Phi}_k = -\sum m_k \overline{a}_k; \\ \overline{M}_C^\Phi &= \sum \overline{M}_{iC}^\Phi = -\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{a}_k.\end{aligned}$$

Главный вектор сил инерции твердого тела – не зависит от выбора центра приведения и для всех типов движения равен:

$$\overline{\Phi}^* = -M\overline{a}_C.$$

Рассмотрим главный момент сил инерции при различных видах движения:

Поступательное движение. Ускорения всех точек одинаковы и главный момент сил инерции относительно центра масс равен нулю, т.к. радиус-вектор центра масс обращается в нуль, если центр приведения совпадает с центром масс:

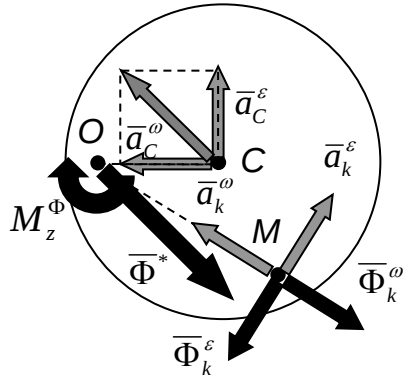
$$\overline{M}_C^\Phi = \sum \overline{M}_{iC}^\Phi = -\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{a}_C = -\sum m_k \overline{r}_k \times \overline{a}_C = -M$$

Таким образом, силы инерции приводятся к равнодействующей силе, приложенной в центре масс, равной по

модулю произведению массы тела на модуль ускорения его центра масс и направленной противоположно этому ускорению.

Вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим тело, имеющее плоскость материальной симметрии, перпендикулярной оси вращения. В этом случае ось вращения является главной осью инерции тела в точке O . Ускорения всех точек, лежащих на одной прямой, параллельной оси вращения геометрически равны. Поэтому силы инерции симметричных точек относительно плоскости материальной симметрии также равны и их равнодействующая будет лежать в этой плоскости (в точке M_k).



Главный вектор сил инерции равен:

$$\vec{\Phi}^* = -M\vec{a}_C.$$

Ускорение центра масс:

$$a_C = OC\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

При выборе центра приведения в точке O главный вектор сил инерции должен быть приложен в этой точке параллельно вектору ускорения центра масс в противоположную сторону.

В произвольной точке M_k ускорение равно:

$$\bar{a}_k = \bar{a}_k^\varepsilon + \bar{a}_k^\omega; \quad a_k^\varepsilon = \varepsilon OM_k, a_k^\omega = \omega^2 OM_k.$$

Так как линии действия центробежных сил инерции проходят через центр вращения, то главный момент сил инерции вычисляется как сумма моментов только вращательных сил инерции:

$$M_O^\Phi = -\sum \Phi_k^\varepsilon OM_k = -\sum m_k \varepsilon OM_k^2 = -\varepsilon \sum m_k OM_k^2$$

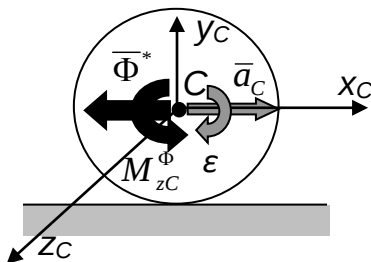
Таким образом, главный момент сил инерции равен произведению углового ускорения на момент инерции тела относительно оси вращения и направлен в сторону противоположную угловому ускорению:

$$M_z^\Phi = -I_z \varepsilon.$$

При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси силы инерции приводятся к главному вектору и главному моменту сил инерции.

3. Плоское движение.

Рассмотрим тело, совершающее плоское движение, и имеющее плоскость материальной симметрии параллельную плоскости движения. Это движение может быть разложено на поступательное движение с



центром масс тела C и вращательное вокруг подвижной оси z_C , проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения.

В соответствии с этим силы инерции поступательного движения приводятся к главному вектору сил инерции, приложенному в центре масс, и главному моменту сил инерции (паре сил, лежащей в плоскости движения):

$$\boxed{\overline{\Phi}^* = -M\overline{a}_C. \quad M_{zC}^{\Phi} = -I_{zC}\varepsilon.}$$

Тема: Принцип возможных перемещений.

1. Аналитическая механика – устанавливает общие, единые методы изучения движения и равновесия любых материальных систем средствами математического анализа. Для этого вводятся новые понятия и обобщаются старые. Связи рассматриваются теперь как некоторые условия, налагаемые на систему, которые должны удовлетворяться в процессе движения системы. Связи можно классифицировать по ряду признаков.

По интегрируемости различают:

Голономные (геометрические) – выражаются конечными уравнениями относительно координат или интегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, t) = 0.$$

Неголономные (кинематические) – выражаются неинтегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат, т.е. уравнениями, содержащими не только координаты точек системы, но и их производные по времени:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0.$$

Неинтегрируемость состоит в том, что их нельзя привести к виду уравнений голономной связи.

По зависимости от времени:

Склерономные (стационарные) – не зависящие от времени:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k) = 0.$$

Например, уравнение траектории, полученное для некоторой точки шатуна кривошипно-шатунного механизма рассматривается как уравнение склерономной голономной связи:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Реономные (нестационарные) – зависящие от времени. Например, кинематическое возбуждение колебаний.

По освобождаемости:

Неосвобождающие (удерживающие или двухсторонние) – описываются уравнением, исключающим возможность покидания

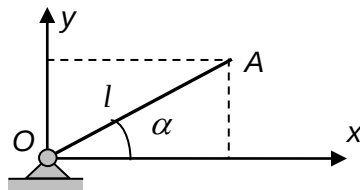
точкой траектории или поверхности, описываемой уравнением. Этому соответствует, например, жесткая связь в виде шарнирного стержня.

Освобождающие (неудерживающие или односторонние) – выражаются неравенством, регламентирующим связь лишь в одном направлении, например, гибкая нить или гладкая поверхность.

Обобщенные координаты – независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы при ее движении. Обобщенность состоит в том, что они могут иметь различную природу (линейные или угловые перемещения относительно некоторого начального положения или какие-либо другие величины). Общее обозначение – q_i ($i=1, \dots, n$).

Число независимых обобщенных координат, через которые можно выразить декартовы координаты всех точек системы является **числом степеней свободы системы**.

В механизме, представленном на рисунке, положение любой точки стержня (например, A) однозначно определяется значением всего одной величины – угла α , который является обобщенной координатой ($q=\alpha$). Число степеней свободы равно $n=1$.



Уравнение связи для рассматриваемой точки A :

$$x^2 + y^2 = l^2$$

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \\ x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \\ \dots\dots\dots; \\ x_{3N} = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \end{array}$$

Возможные перемещения – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями.

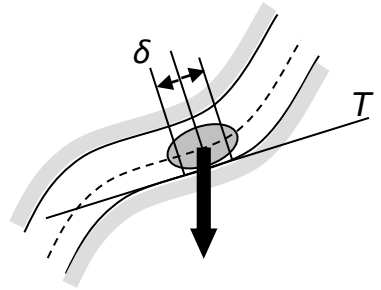
Diagram illustrating the level set method. A curved surface is defined by the level set equation $f(x, y, z) = 0$. A point on this surface is shown, with a vector $\bar{r}$ pointing from a source point to it. A small rectangular region on the surface is shown, with a vector $\delta \bar{r}$ representing a displacement within the region.

Действительные *перемещения* —бесконечно малые
(элементарные) перемещения, действительно (фактически)
происходящие за время dt , допускаемые наложенными на систему

связями. Действительные перемещения зависят от сил, приложенных к системе, от вида связей (стационарных, нестационарных, голономных, неголономных) и начальных условий.

Поскольку вектор положения точки системы можно выразить через обобщенные координаты

$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$, то возможные перемещения выражаются через приращения обобщенных координат как полный дифференциал:

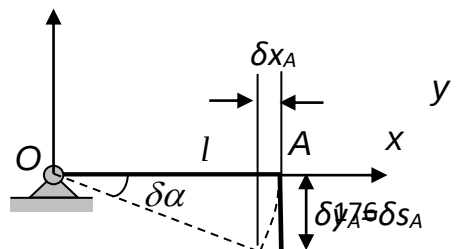


$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n \text{ или}$$

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Способы вычисления возможных перемещений:

Геометрический способ – в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:



$$\delta x_A = l - l \cos \delta \alpha;$$

$$\delta y_A = l \sin \delta \alpha.$$

Для малых углов $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, тогда:

$$\delta x_A \approx 0;$$

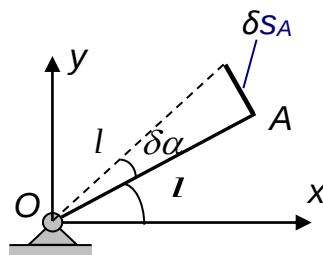
$$\delta y_A \approx \delta s_A = l \delta \alpha.$$

Например, для наклонного стержня:

$$\delta s_A = l \delta \alpha;$$

$$\delta x_A = \delta s_A \sin \alpha = l \sin \alpha \delta \alpha;$$

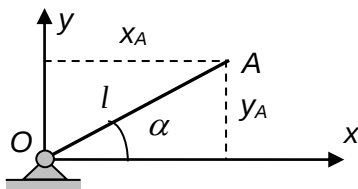
$$\delta y_A \approx \delta s_A \cos \alpha = l \cos \alpha \delta \alpha.$$



Аналитический способ – вычисляется вариация от координат:

$$x_A = l \cos \alpha;$$

$$y_A = l \sin \alpha.$$



$$\delta x_A = \frac{\partial}{\partial \alpha} (l \cos \alpha) \delta \alpha = -l \sin \alpha \delta \alpha;$$

$$\delta y_A = \frac{\partial}{\partial \alpha} (l \sin \alpha) \delta \alpha = l \cos \alpha \delta \alpha.$$

В отличие от геометрического способа знаки возможного приращения координат получаются автоматически. При использовании геометрического способа в дальнейших вычислениях, например, работы, необходимо учитывать направление полученного приращения (перемещения).

Возможная работа силы –элементарная работа силы на том или ином возможном перемещении:

$$\delta A = \bar{F} \delta \bar{r}.$$

В координатном виде:

$$\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z.$$

В естественном виде:

$$\delta A = F \delta s \cos(\bar{F}, \delta \bar{r}).$$

Идеальные связи –связи, при которых суммаэлементарных работ сил реакций связи на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность (при скольжении), абсолютно твердая поверхность (при качении без скольжения).

Любую неидеальную связь можно рассматривать как идеальную, если соответствующие реакции связи (совершающие работу на возможных перемещения) причислить к задаваемым (активным) силам.

Принцип возможных перемещений — для равновесия материальной системы, подчиненной голономным, стационарным, двухсторонним и идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялась нулю:

$$\delta A^F = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Доказательство необходимости. Система находится в равновесии и для каждой точки удовлетворяется уравнение равновесия:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0.$$

Умножим скалярно на вектор возможного перемещения точки и сложим:

$$\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Из определения идеальной связи следует:

$$\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Доказательство достаточности: Предположим, что равновесия нет. Тогда каждая из точек под действием активных сил придет в движение, переместится за время dt на малое действительное перемещение $d\bar{r}$. Рассматривая эти перемещения, как возможные, вычислим работу и просуммируем:

$$(\bar{F}_k + \bar{R}_k) d\bar{r}_k = (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \delta \bar{r}_k > 0.$$

По определению идеальной связи:

$$\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Отсюда следует:

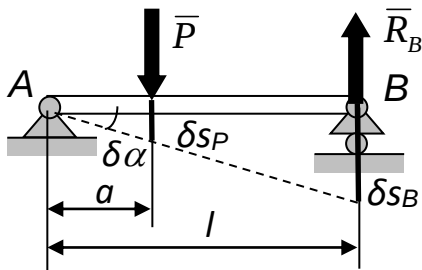
$$\sum (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \delta \bar{r}_k = \sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k > 0.$$

Пример. Определим

реакцию балки в правой опоре.

Балка неподвижна и не имеет ни возможных, ни действительных перемещений. Отбросим связь, реакция которой отыскивается, и заменим ее реакцией. Без правой

опоры балка может поворачиваться под действием активных сил,



реакцию R_B причисляем к активным силам. Зададим малое возможное перемещение.

Вычислим возможные перемещения:

$$\delta s_P = a \delta \alpha; \delta s_B = l \delta \alpha.$$

Запишем сумму работ:

$$\delta A^{P+R} = P \delta s_P - R_B \delta s_B = 0. \Rightarrow$$

$$Pa \delta \alpha - R_B l \delta \alpha = 0. \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{Pa \delta \alpha}{l \delta \alpha} = \frac{Pa}{l}.$$

20. Общее уравнение динамики.

I. Общее уравнение динамики.

II. Обобщенные силы.

I. Общее уравнение динамики. Принцип возможных перемещений, дающий, можно применить к решению задач динамики.

Применим принцип Даламбера, сводящий задачу динамики к задаче статики:

$$\bar{P}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Затем применим принцип возможных перемещений, решающий эту статическую задачу:

$$P_k \delta s_k \cos(\bar{P}_k, \delta \bar{s}_k) + R_k \delta s_k \cos(\bar{R}_k, \delta \bar{s}_k) + \Phi_k \delta s_k \cos(\bar{\Phi}_k, \delta \bar{s}_k) = 0$$

Просуммируем по всем точкам:

$$\sum P_k \delta s_k \cos(\bar{P}_k, \delta \bar{s}_k) + \sum R_k \delta s_k \cos(\bar{R}_k, \delta \bar{s}_k) + \sum \Phi_k \delta s_k \cos(\bar{\Phi}_k, \delta \bar{s}_k) = 0$$

Для идеальных связей:

$$\sum R_k \delta s_k \cos(\bar{R}_k, \delta \bar{s}_k) = 0.$$

Получим *общее уравнение динамики*:

$$\boxed{\sum P_k \delta s_k \cos(\bar{P}_k, \delta \bar{s}_k) + \sum \Phi_k \delta s_k \cos(\bar{\Phi}_k, \delta \bar{s}_k) = 0.}$$

В любой момент времени сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции несвободной механической системы с двухсторонними идеальными связями на любом возможном перемещении равна нулю.

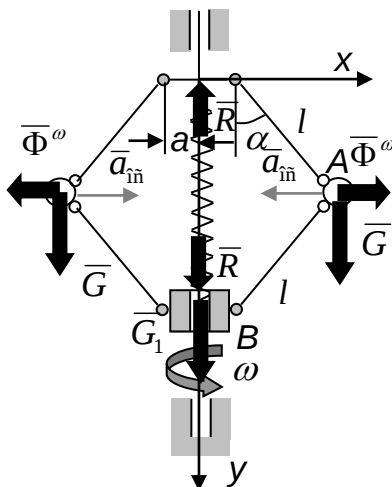
Более короткие записи общего уравнения динамики:

$$\boxed{\sum (\bar{P}_k + \bar{\Phi}_k) \delta \bar{r}_k = 0 \quad \sum (\bar{P}_k - m_k \bar{a}_k) \delta \bar{r}_k = 0.}$$

$$\boxed{\delta A = 0,}$$

Пример. Центробежный

регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной скоростью. При $\alpha = 0$ пружина не деформирована. Жесткость пружины c . Длина каждого из стержней l . Плечо подвески a . Вес каждого из шаров G , вес муфты G_1 . Определить угловую скорость установившегося вращения для данного угла α .



1. Покажем заданные силы.

2. Добавим силы инерции:

$$\bar{\Phi}^{\omega} = -m\bar{a}_{\text{ин}};$$

$$\Phi^{\omega} = ma_{\text{ин}} = \frac{G}{g} \omega^2 (a + l \sin \alpha).$$

3. Упругая связь (пружина), не являющаяся идеальной (совершает работу на возможных перемещениях), должна быть

отброшена и заменена реакцией, которая включается в число заданных сил. Модуль реакции пружины пропорционален изменению длины (укорочению) пружины:

$$R = c\Delta l = c(2l - 2l \cos \alpha) = 2cl(1 - \cos \alpha).$$

4. Определим проекции возможных перемещений (вариации координат) точек приложения сил:

$$\begin{aligned} x_A &= a + l \sin \alpha; & \delta x_A &= l \cos \alpha \delta \alpha; \\ y_A &= l \cos \alpha; & \Rightarrow \delta y_A &= -l \sin \alpha \delta \alpha; \\ y_B &= 2l \cos \alpha. & \delta y_B &= -2l \sin \alpha \delta \alpha. \end{aligned}$$

5. Составим общее уравнение динамики:

$$\delta A = 2G\delta y_A + (G_1 + R)\delta y_B + 2\Phi^\omega \delta x_A = 0.$$

Подставим значения сил инерции и реакции пружины:

$$\begin{aligned} &2G(-l \sin \alpha \delta \alpha) + (G_1 + 2cl(1 - \cos \alpha))(-2l \sin \alpha \delta \alpha) + \\ &+ 2 \frac{G}{g} \omega^2 (a + l \sin \alpha) l \cos \alpha \delta \alpha = 0. \end{aligned}$$

Отсюда после некоторых сокращений и упрощений:

$$\omega = \sqrt{\frac{(G + G_1 + 2cl(1 - \cos \alpha))g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{G(a + l \sin \alpha)}}.$$

Тема: Обобщенные координаты системы.
Дифференциальные уравнения движения МС в обобщ.
координатах или уравнение Лагранжа II рода.

Обобщенные силы. Пусть механическая система имеет s степеней свободы, ее положение определяется s обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_s$. Сообщим некоторой обобщенной координате q_j бесконечно малое приращение, оставляя остальные обобщенные координаты неизменными, т.е. $\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{j-1} = 0$, $\delta q_j \neq 0$, $\delta q_{j+1} = \dots = \delta q_s = 0$. В результате все N точек системы получают какие-то бесконечно малые перемещения $\bar{\delta}_{1,j}, \bar{\delta}_{2,j}, \dots, \bar{\delta}_{N,j}$, совокупность этих перемещений представляет **одно из возможных перемещений** системы.

Элементарная работа всех заданных сил системы на этих перемещениях равна:

$$\delta A_{qj} = \sum_{k=1}^N F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \bar{\delta}_{kj}).$$

Поставим в соответствие ко всем заданным силам системы некоторую одну (воображаемую) силу, которая совершает такую же работу на данном возможном (обобщенном) перемещении δq_j , что и все силы системы:

$$Q_j \delta q_j = \sum_{k=1}^N F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \bar{\delta}_{kj}).$$

Тогда величина этой силы определится как:

$$Q_j = \frac{\sum_{k=1}^N F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj})}{\delta q_j} = \frac{\delta A_{qj}}{\delta q_j}.$$

Обобщенная сила Q_j , соответствующая обобщенной координате q_j – скалярная величина, равная отношению элементарной работы заданных сил на всех перемещениях системы, вызванных элементарным приращением $\delta q_j \neq 0$ координаты q_j , к величине этого приращения.

Размерность этой силы определяется размерностью обобщенной координаты. Например, если q_j есть линейная обобщенная координата, то размерность обобщенной силы Q_j соответствует силе (Н). Если q_j есть угловая обобщенная координата, то размерность обобщенной силы Q_j соответствует паре сил или моменту (Нм).

Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат. Размерность каждой из обобщенных сил определяется размерностью соответствующей обобщенной координаты.

Формулы для вычисления обобщенной силы:

В векторной форме:

$$\delta A_{qj} = \sum_{k=1}^N F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj}) = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_{kj}.$$

Радиус-вектор k -той точки есть функция всех обобщенных координат:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s).$$

Вариация радиуса-вектора по обобщенным координатам при $\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{j-1} = 0, \delta q_j \neq 0, \delta q_{j+1} = \dots = \delta q_s = 0$:

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j$$

Отсюда:

$$\delta A_{qj} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_{kj} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Тогда:

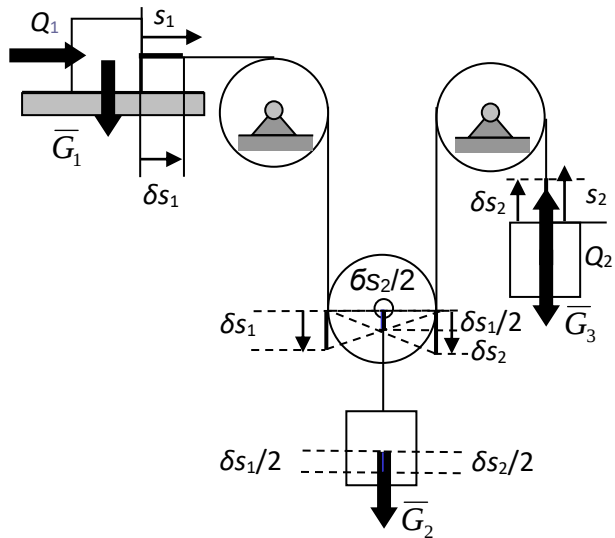
$$Q_j = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}.$$

В координатной форме:

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \left(F_{xk} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{yk} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{zk} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

Пример. Для механической системы трех грузов с двумя неподвижными и одним подвижным блоками определить обобщенные силы Q_j .

1. Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат. Число обобщенных координат равно количеству степеней свободы, которое можно определить последовательным наложением



связей. Ограничим горизонтальное перемещение груза 1, грузы 2 и 3 могут вертикально перемещаться. Ограничим дополнительно вертикальное перемещение, например, груза 3. Груз 2 перемещаться не может (связи считаем двухсторонними).

Итак, $n = 2$. Выбираем обобщенные координаты $q_1 = s_1$ и $q_2 = s_2$:

2. Для определения Q_1 задаем произвольное малое перемещение $\delta q_1 = \delta s_1$ ($\delta q_2 = \delta s_2 = 0$).

Вычисляем возможную работу заданных сил:

$$\delta A_{q1} = G_2 \frac{\delta s_1}{2}.$$

Отсюда:

$$Q_1 = \frac{\delta A_{q1}}{\delta q_1} = \frac{G_2}{2}.$$

3. Для определения Q_2 задаем произвольное малое перемещение $\delta q_2 = \delta s_2$ ($\delta q_1 = \delta s_1 = 0$).

Вычисляем возможную работу заданных сил:

$$\delta A_{q2} = G_2 \frac{\delta s_2}{2} - G_3 \delta s_2.$$

Отсюда:

$$Q_2 = \frac{\delta A_{q2}}{\delta q_2} = \frac{G_2}{2} - G_3.$$

Тема: Теория удара. Прямой центральный удар двух тел. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел

I. Удар – явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек изменяются на конечную величину.

Ударные силы - силы взаимодействия при соударении тел.

Время удара – промежуток времени, в течении которого происходит удар (контакт соударяющихся поверхностей). В силу этого

ударные силы могут достигать очень больших значений, при которых возможно изменение скоростей точек на конечную величину.

Соотношение между конечным изменением скорости и величиной ударной силы определяется *основным уравнением удара*:

$$m(\bar{v}_1 - \bar{v}_0) = \bar{S}.$$

Импульс ударной силы:

$$\bar{S} = \int \bar{F} dt.$$

Импульс ударной силы является конечной величиной. Точный закон изменения ударной силы в течении времени удара, как впрочем и само время удара, как правило, остаются неизвестным и интеграл заменяется произведением некоторого среднего значения силы на время удара:

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F} dt \approx \bar{F}_{\text{ср}} \tau.$$

В силу того, что ударные силы много больше по величине других сил (неударных), последними пренебрегают. В силу малости времени удара, возникающие перемещения точек во время удара также очень малы и их можно не учитывать.

При рассмотрении механической системы во время удара используется теорема об изменении количества движения системы, а для вращающейся системы теорема об изменении момента количества движения системы:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}^e. \quad \overline{K}_{O1} - \overline{K}_{O0} = \sum \overline{M}_O(\overline{S}^e).$$

Удар шара о неподвижную поверхность. Рассматривается поступательное движение шара массой m со скоростью v перпендикулярно неподвижной массивной поверхности (преграде) – **прямой удар**. Например, шар падает с высоты h_0 и ударяется о горизонтальную поверхность со скоростью v .

Различают две фазы удара:

1. Переход кинетической энергии движения в потенциальную энергию упругой деформации. При этом скорость падает до нуля, часть энергии расходуется на нагрев тела.

2. Переход потенциальной энергии в кинетическую при восстановлении первоначальной формы тела за счет упругих сил. Из-за наличия остаточных (пластических) деформаций и нагрева тела кинетическая энергия полностью не восстанавливается и скорость u отделения шара от поверхности будет меньше, чем скорость до удара ($u < v$).

Отношение модуля скорости шара в конце удара к модулю его скорости в начале удара называется **коэффициентом восстановления при ударе**:

$$k = \frac{|\overline{u}|}{|\overline{v}|}.$$

Коэффициент восстановления может изменяться от 0 до 1. При $k = 0$ – абсолютно неупругий удар (шар не отскакивает от преграды),

при $k = 1$ – абсолютно упругий удар (нет потери энергии при деформации, нет нагрева).

Реальные материалы всегда имеют такие потери энергии, и коэффициент восстановления даже для достаточно упругих материалов лишь приближается в той или иной степени к единице. Кроме того, коэффициент восстановления зависит от скорости, при которой происходит удар. Поэтому сравнение значений коэффициентов восстановления должно выполняться при одной и той же скорости. Например, при скорости $v = 3$ м/с: стекло – $k=0,94$; кость – $k = 0,89$; сталь – $k = 0,56$; дерево – $k = 0,50$.

Коэффициент восстановления определяет соотношение между импульсами ударной силы в двух фазах.

Основное уравнение удара для первой фазы:

$$0 - mv = \int_{\tau_1} N_1 dt = S_1.$$

Основное уравнение удара для второй фазы:

$$mu - 0 = \int_{\tau_2} N_2 dt = S_2.$$

Отсюда коэффициент восстановления:

$$k = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{v}|} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Импульс второй фазы и суммарный импульс ударной силы в двух фазах зависят от коэффициента восстановления:

$$S_2 = kS_1.$$

$$S = S_1 + S_2 = S_1 + kS_1 = (1 + k)S_1 = (1 + k)mv.$$

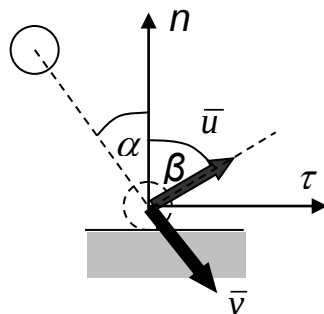
Косой удар. Прямой центральный удар двух тел.

Рассмотрим поступательное движение шара массой m со скоростью v , составляющей некоторый угол (угол падения) к нормали неподвижной массивной поверхности (преграде) – ***косой удар***.

Запишем основное уравнение удара:

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{S}.$$

Спроецируем уравнение на нормаль и касательную к поверхности:



$$(n) \quad m(u_n - v_n) = m(u \cos \beta + v \cos \alpha) = S;$$

$$(\tau) \quad m(u_\tau - v_\tau) = m(u \sin \beta - v \sin \alpha) = 0.$$

Из последнего уравнения следует:

$$u = \frac{v \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Коэффициент восстановления:

$$k = \frac{|\bar{u}_n|}{|\bar{v}_n|} = \frac{u \cos \beta}{v \cos \alpha} = \frac{v \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta \cdot v \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Поскольку коэффициент восстановления $k < 1$, то угол отражения больше угла падения. Угол отражения равен углу падения только в случае абсолютно упругого удара ($k = 1$).

Модуль скорости после удара:

$$u = \sqrt{u_\tau^2 + u_n^2} = \sqrt{v_\tau^2 + k^2 v_n^2} = \sqrt{(v \sin \alpha)^2 + k^2 (v \cos \alpha)^2} = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}$$

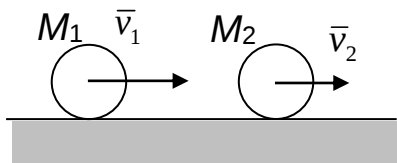
При очень больших углах падения, близких к прямому углу, скорость после удара приближается к скорости до удара ($u \rightarrow v$).

Импульс ударной силы:

$$S = mu \cos \beta + mv \cos \alpha = mv(\sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha} \cdot \cos \beta + \cos \alpha).$$

При очень больших углах падения, близких к прямому углу, импульс ударной силы приближается к нулю ($S \rightarrow 0$).

Прямой центральный удар двух тел. Рассмотрим соударение двух движущихся тел со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$) массами M_1 и M_2 .



В первой фазе удара ударная сила взаимодействия возрастает от нуля до максимального значения (деформация нарастает до момента выравнивания скоростей). Проекция на горизонтальную ось теоремы об изменении количества движения для всей системы дает:

$$(M_1 + M_2)u - M_1v_1 - M_2v_2 = 0.$$

Отсюда следует:

$$u = \frac{M_1v_1 + M_2v_2}{M_1 + M_2}.$$

Для определения величины импульса составим такое же уравнение для одного тела, например, 1:

$$M_1(u - v_1) = S_1^I.$$

Подставим значение послеударной скорости:

$$S_1^I = M_1(u - v_1) = M_1 \left(\frac{M_1v_1 + M_2v_2}{M_1 + M_2} - v_1 \right) = M_1 \left(\frac{M_1v_1 + M_2v_2 - M_1v_1 - M_2v_1}{M_1 + M_2} \right).$$

После преобразований получаем:

$$S_1^I = M_1 \left(\frac{M_2v_2 - M_2v_1}{M_1 + M_2} \right) = \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} (v_2 - v_1).$$

Заметим, что разность скоростей представляет собой *относительную* скорость (скорость сближения) и поскольку $v_2 < v_1$, то ударный импульс, приложенный к телу 1, будет направлен в сторону, противоположную движению этих тел. Аналогично можно определить импульс, приложенный к телу 2. По закону действия и противодействия:

$$\bar{S}_1^I = -\bar{S}_2^I.$$

Во второй фазе удара ударная сила взаимодействия уменьшается от максимального значения до нуля (упругие деформации восстанавливают полностью и частично форму тел и потенциальная энергия деформации переходит в кинетическую до отделения тел друг от друга). Проекция на горизонтальную ось теоремы об изменении количества движения для одного из тел, например, 1, дает:

$$M_1(u_1 - u) = S_1^II.$$

С использованием коэффициента восстановления можно записать:

$$M_1(u_1 - u) = kS_1^I.$$

Поделим это уравнение на уравнение для величины импульса первого тела до удара, получим:

$$\frac{u_1 - u}{u - v_1} = k.$$

Отсюда получаем:

$$u_1 = k(u - v_1) + u = u(1 + k) - kv_1.$$

Подставим выражение для послеударной скорости:

$$u_1 = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2} (1 + k) - kv_1.$$

После преобразований получаем:

$$u_1 = v_1 + \frac{(k + 1)M_2(v_2 - v_1)}{M_1 + M_2}.$$

Разность скоростей ($v_2 - v_1$) опять представляет собой относительную скорость (скорость сближения) и поскольку $v_2 < v_1$, то скорость тела 1 уменьшается и это уменьшение пропорционально массе тела 2 и относительной скорости. Аналогично можно определить скорость тела 2:

$$u_2 = v_2 - \frac{(k + 1)M_1(v_2 - v_1)}{M_1 + M_2}.$$

Здесь скорость тела 2 увеличивается и это увеличение пропорционально массе тела 1.

Замечания:

1. В частном случае равенства масс ($M_1 = M_2$) и абсолютно упругого удара ($k = 1$) скорость тела 1 после удара будет равна скорости тела 2 до удара и наоборот. Т.е. если тело 2, например, как при игре в бильярд, покоилось, то после удара телом 1 тело 2 получит скорость тела 1, а тело 1 остановится.

2. Проверить полученные соотношения можно подставив их в закон сохранения количества движения:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 u_1 + M_2 u_2.$$

3. Отношения модулей относительных скоростей до и после удара определяют коэффициент восстановления (или наоборот). Для этого вычтем выражение для скорости u_1 из аналогичного ему выражение для скорости u_2 :

$$u_2 - u_1 = u(1 + k) - kv_2 - (u(1 + k) - kv_1) = k(v_1 - v_2).$$

Отсюда получаем:

$$\boxed{\frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = k.}$$

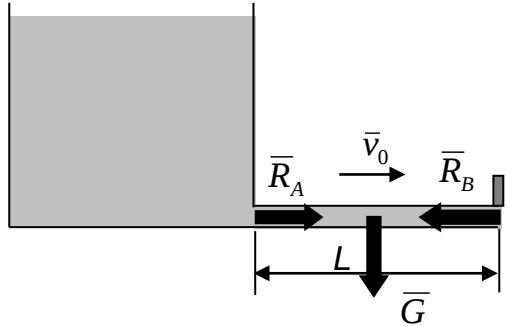
Определим модуль ударного импульса, приложенного к каждому телу за весь период упругого удара (за две фазы):

$$S_2 = S_1 = S_1^I + S_1^{II} = S_1^I + kS_1^I = (1 + k)S_1^I.$$

Используем выражение, полученное для импульса первой фазы:

$$S_2 = S_1 = (1+k) \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_2 - v_1).$$

Гидравлический удар. При резком закрывании задвижки в магистральных трубопроводах может произойти ударное воздействие на элемент запирающего устройства и саму трубу (резко возрастает давление в системе). Рассмотрим трубу длиной L , по которой движется жидкость под некоторым давлением. Пусть в некоторый момент поток резко перекрывается опусканием задвижки.



Запишем теорему об изменении количества движения для объема жидкости, находящейся под давлением в трубе:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \bar{S}^e = \bar{S}(\bar{G}) + \bar{S}(\bar{R}_A) + \bar{S}(\bar{R}_B).$$

Спроецируем уравнение на ось x , совпадающей с осью трубы:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \int_{\Delta t} (R_A - R_B) dt = \int_{\Delta t} (p_A - p_B) A dt = \int_{\Delta t} \Delta p \cdot A dt$$

Здесь Δp – разность давлений, A – площадь поперечного сечения потока, Δt – время, за которое ударная волна пройдет расстояние L .

Характер изменения ударной силы (разности давления) неизвестен. Ударный импульс заменим произведением средней разности давлений на площадь поперечного сечения потока и время импульса:

$$\int_{\Delta t} \Delta p A dt = A \Delta p_{\text{н\ddot{o}}} \Delta t.$$

Количество движения жидкости в начальный и конечный моменты:

$$Q_{0x} = Mv_0 = \rho A L v_0; \quad Q_{1x} = 0.$$

Подставим эти выражения в уравнение разности проекций количеств движения:

$$-\rho A L v_0 = A \Delta p_{\text{н\ddot{o}}} \Delta t.$$

$$-\rho \frac{L}{\Delta t} v_0 = \Delta p_{\text{н\ddot{o}}}.$$

$$-\rho c v_0 = \Delta p_{\text{н\ddot{o}}}.$$

Здесь c – *скорость распространения ударной волны*. Знак минус означает, что $R_B > R_A$ и его можно далее опустить.

С использованием коэффициента объемного веса получаем **формулу Жуковского**:

$$\boxed{\frac{\Delta p_{\text{н\delta}}}{\gamma} = \frac{cv_0}{g}}.$$

Таким образом, повышение давления не зависит от длины трубы и пропорционально скорости течения жидкости.

Скорость распространения ударной волны в жидкости:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.07 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 9.81}{1000}} = 1425 \text{ м/с}.$$

Здесь E – модуль упругости воды $2,07 \cdot 10^4$ кгс/см².

Поскольку при гидравлическом ударе происходит также деформация трубы, влияющая на изменение плотности жидкости, была получена формула для скорости распространения волны с учетом этого:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{Ed}{E_i \delta}}}.$$

Здесь E_m – модуль материала трубы, d – диаметр трубы, δ – толщина стенки трубы.

Следовательно, *гидравлический удар зависит от скорости и будет сильнее в трубах малого диаметра и трубах, изготовленных из материалов с более высоким модулем упругости* (например, модуль упругости стали почти в два раз больше модуля упругости меди).

Литература

а) основная:

1. Митюшов, Е. А. Теоретическая механика [Текст] : учебник для студентов вузов / Е. А. Митюшов, С. А. Берестова. - 2-е изд. ; перераб. - Москва : Академия, 2011. - 320 с. - (Бакалавриат).

2. Лачуга, Ю. Ф. Теоретическая механика [Текст] : учебник для студентов высших аграрных заведений, обучающихся по агроинженерным специальностям / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. - 3-е изд. ; перераб. и доп. - М. : КолосС, 2010. - 576 с. : ил. - (Учебники и учебные пособия для студентов высших учебных заведений).

б) дополнительная:

1. Ксендзов, В. А. Теоретическая механика. Курс лекций [Текст] : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению "Агроинженерия" / В. А. Ксендзов, А. В. Паршков. - Рязань : РГАТУ, 2012. - 380 с.

2. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика [Текст] : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. - 12-е изд. ; стер. - СПб. : Лань, 2013. - 672 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).