ПРИЛОЖЕНИЕ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» ИМЕНИ.
В.Ф. УТКИНА

Кафедра «Вычислительная и прикладная математика»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

«Вычислительные алгоритмы для систем ИИ»

Направление подготовки

09.03.04 «Программная инженерия»

Направленность (профиль) подготовки

«Программная инженерия систем искусственного интеллекта»

Уровень подготовки – бакалавриат

Квалификация выпускника – бакалавр

Форма обучения – очная

Срок обучения – 4 года

Рязань

1. ПЛАНЫ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Лабораторная работа №1

ПОГРЕШНОСТЬ ФУНКЦИИ

Методические рекомендации:

1. Теоретический материал и формулы для расчетов взять из лекций.
2. Номер варианта соответствует последней цифре в номере зачетной книжки.
3. Расчетное задание выполняется с помощью калькулятора.

ЗАДАНИЕ

1. Определить, какое равенство точнее.
2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки.
3. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности числа, если они имеют только верные цифры.
4. Вычислить и определить погрешности результата.

Варианты заданий.

№ варианта	Задание
1	1) $\sqrt{44} = 6{,}63;\ 19/41 = 0{,}463.$ 2) $2{,}8546;\ \delta = 0{,}3\%.$ 3) $42{,}884.$ 4) $X = \left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, где $a = 4{,}3(\pm 0{,}05),\ b = 17{,}21(\pm 0{,}02),$ $c = 8{,}2(\pm 0{,}05), m = 12{,}417(\pm 0{,}003),\ n = 8{,}37(\pm 0{,}005).$
2	1) $\sqrt{30} = 5{,}48;\ 7/15 = 0{,}467.$ 2) $6{,}4257(\pm 0{,}0024).$ 3) $0{,}537.$ 4) $X = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, где $a = 13{,}5(\pm 0{,}02),\ b = 3{,}7(\pm 0{,}02),$ $c = 34{,}5(\pm 0{,}02), m = 4{,}22(\pm 0{,}004),\ d = 23{,}725(\pm 0{,}005).$
3	1) $\sqrt{10{,}5} = 3{,}24;\ 4/17 = 0{,}235.$ 2) $0{,}5748(\pm 0{,}0034).$ 3) $2{,}043.$ 4) $X = \dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, где $a = 2{,}754(\pm 0{,}001),\ b = 11{,}7(\pm 0{,}04),$ $c = 10{,}536(\pm 0{,}002), m = 0{,}56(\pm 0{,}005),\ d = 6{,}32(\pm 0{,}008).$
4	1) $\sqrt{10} = 3{,}16;\ 15/7 = 2{,}14.$ 2) $0{,}34484;\ \delta = 0{,}4\%.$ 3) $0{,}745.$ 4) $X = \dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, где $a = 23{,}16(\pm 0{,}02),\ b = 8{,}23(\pm 0{,}005),$ $c = 145{,}5(\pm 0{,}08), m = 0{,}28(\pm 0{,}006),\ d = 28{,}6(\pm 0{,}1).$
5	1) $\sqrt{4{,}8} = 2{,}19;\ 6/7 = 0{,}857.$ 2) $10{,}8441;\ \delta = 0{,}5\%.$ 3) $0{,}288.$ 4) $X = \dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, где $a = 27{,}16(\pm 0{,}006),\ b = 5{,}03(\pm 0{,}01),$ $c = 3{,}6(\pm 0{,}02), m = 12{,}375(\pm 0{,}004),\ n = 86{,}2(\pm 0{,}05).$
6	1) $\sqrt{6{,}8} = 2{,}61;\ 12/11 = 1{,}091.$ 2) $0{,}12356(\pm 0{,}00036).$ 3) $3{,}4453.$ 4) $X = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$, где $a = 16{,}342(\pm 0{,}001),\ b = 2{,}5(\pm 0{,}03),$ $c = 38{,}17(\pm 0{,}002), m = 3{,}6(\pm 0{,}04),\ d = 9{,}14(\pm 0{,}005).$

7	1) $\sqrt{22} = 4{,}69;\ 2/21 = 0{,}095.$ 2) $24{,}5643;\ \delta = 0{,}1\%.$ 3) $4{,}348.$ 4) $S = \frac{1}{64}\pi\sqrt{D^4 - d^4}$, где $D = 36{,}5(\pm 0{,}1),\ d = 26{,}35(\pm 0{,}005),$ $\pi = 3{,}14.$
8	1) $\sqrt{9{,}8} = 3{,}13;\ 23/15 = 1{,}53.$ 2) $8{,}3445(\pm 0{,}0022).$ 3) $0{,}576.$ 4) $X = \frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$, где $a = 9{,}542(\pm 0{,}001),\ b = 3{,}128(\pm 0{,}002),$ $c = 0{,}172(\pm 0{,}001), m = 2{,}8(\pm 0{,}03),\ d = 5{,}4(\pm 0{,}02).$
9	1) $\sqrt{83} = 9{,}11;\ 6/11 = 0{,}545.$ 2) $3{,}7834(\pm 0{,}0041).$ 3) $0{,}678.$ 4) $y = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, где $a = 10{,}82(\pm 0{,}03),\ b = 2{,}786(\pm 0{,}0006),$ $m = 0{,}28(\pm 0{,}006),\ n = 14{,}7(\pm 0{,}06).$
10	1) $\sqrt{52} = 7{,}21;\ 17/19 = 0{,}895.$ 2) $7{,}521;\ \delta = 0{,}12\%.$ 3) $0{,}0748.$ 4) $Q = \frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$, где $n = 2{,}0435(\pm 0{,}0001),\ x = 4{,}2(\pm 0{,}05),$ $y = 0{,}82(\pm 0{,}01).$

Лабораторная работа №2
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задание:

Найти решение уравнения с точностью $\varepsilon = 0.0001$ следующими методами:

– дихотомии;

– пропорциональных частей (хорд);

– касательных (Ньютона);

– модифицированным методом Ньютона;

– комбинированным методом;

– итерационным.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Разработать программу на одном из языков высокого уровня, реализующую методы решения уравнений.

2. Программа должна иметь оконный интерфейс

3. Оформить отчет в соответствии с требованиями кафедры

4. Номер варианта соответствует последней цифре в номере зачетной книжки.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Решение уравнения $f(x) = 0$ складывается из двух этапов.

1. Отделение корней - нахождение интервалов (a, b), каждый из которых содержит один и только один корень уравнения.
2. Уточнение приближенных значений корней .

Отделение корней может быть проведено путем анализа знаков функции $f(x)$ в выбранных точках области определения функции.

Пример 1. Отделим корни уравнения, левая часть которого равна $f(x) = x^3 - 6x + 2$. Для этого построим таблицу:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
Знак $f(x)$	–	–	+	+	–	+	+

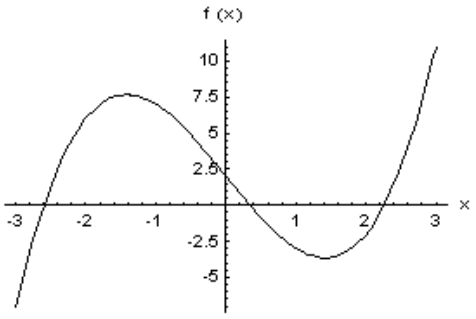
Заключаем из таблицы, что корни уравнения находятся в интервалах: (-3,-1), (0,1) и (1,3).

Для разделения корней алгебраических уравнений можно использовать правило Декарта:

Количество положительных корней многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

равно числу перемен знака в последовательности коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ или меньше этого числа на четное число.



Соответственно, анализ коэффициентов многочлена $P_n(x+h)$ позволяет узнать число корней многочлена $P_n(x)$, превышающих значение h, а число перемен знака в последовательности коэффициентов многочлена $P_n(-x)$ определяет число отрицательных корней исходного многочлена.

Пример 2. Для рассмотренной выше функции $f(x) = x^3 - 6x + 2$ знак в последовательности коэффициентов $(1,-6,2)$ меняется дважды, следовательно, уравнение $f(x) = 0$ может иметь не более двух положительных корней. Для многочлена $f(x+1) = x^3 + 3x^2 - 3x - 4$ знак в последовательности коэффициентов меняется один раз, следовательно, исходное уравнение имеет один корень больше 1. Знак коэффициентов многочлена $f(-x) = -x^3 + 6x + 2$ также меняется лишь один раз, следовательно, имеется только один отрицательный корень.

Наиболее наглядный способ отделения корней - анализ графика функции $f(x)$.

Второй этап решения - уточнение найденного приближенного значения корня - осуществляется с помощью итерационных методов: исходное значение уточняется в ходе повторяющихся итераций. Для реализации этих методов необходимо иметь оценку погрешности найденного значения корня. Наиболее универсальный способ оценки дает следующая теорема.

Пусть ξ - корень уравнения $f(x) = 0$, а $\bar{x}$ - приближенное значение этого корня; пусть ξ и $\bar{x}$ находятся внутри отрезка $[a,b]$ и $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ при $a \leq x \leq b$; тогда

$$|\bar{x} - \xi| \leq |f(\bar{x})| / m_1. \qquad (1)$$

Отметим, что чем уже отрезок $[a,b]$, тем точнее эта оценка. Для конкретных итерационных методов существуют также свои специфические методы оценки погрешности.

Метод дихотомии (***метод половинного деления***) состоит в последовательном делении начального отрезка $[a,b]$ пополам и выборе на каждом шаге деления подотрезка, содержащего корень. Так, если на некотором шаге найден отрезок $[a_i, b_i]$, то вычисляем далее $f(\bar{x}) = f((a_i + b_i)/2)$; если $f(\bar{x}) = 0$, то процесс итераций заканчивается - найдено точное значение корня уравнения $\xi = \bar{x}$; если $f(a_i) f(\bar{x}) < 0$, то выбираем для следующего шага отрезок $[a_i, \bar{x}]$, иначе выбираем отрезок $[\bar{x}, b_i]$.

В качестве приближенного значения корня можно взять любое значение внутри найденного отрезка. Очевидно, что погрешность при этом не превышает длины отрезка. Поскольку длина отрезка после n шагов равна $(b-a)/2^n$, то количество итераций, требуемое для достижения заданной точности, может быть вычислено заранее.

Метод хорд (***метод секущих, метод пропорциональных частей***) - процесс итераций осуществляется в соответствии с формулой

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)(X - x_n)/(f(X) - f(x_n)) \qquad (2)$$

В этой формуле X - та из граничных точек отрезка $[a,b]$, в которой выполнено условие

$$f(X) f''(X) > 0 \qquad (3)$$

(предполагается, что вторая производная $f''(x)$ на отрезке $[a,b]$ не меняет знак). В качестве начального приближения выбирается противоположная граничная точка отрезка.

С геометрической точки зрения процесс, описываемый формулой (2), можно пояснить следующим образом:

- на первом шаге проводится прямая линия через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$; точка пересечения этой прямой с осью x определяет точку x_1;

- на втором шаге проводится прямая через точки $(X, f(X))$, $(x_1, f(x_1))$ и точка пересечения с осью x определяет точку x_2 и т.д.

Точка X является неподвижной, а точки $x_0, x_1, x_2, \cdots$ образуют монотонную последовательность, пределом которой является точка ξ - корень уравнения $f(x) = 0$.

Для остановки процесса итераций по достижении необходимой точности может быть использована оценка (1).

Метод Ньютона (***метод касательных***) - процесс итераций проводится по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n). \qquad (4)$$

В качестве начального приближения должна быть выбрана граничная точка отрезка $[a,b]$, в которой выполняется условие (3). Геометрически процесс, осуществляемый по формуле (4), означает последовательное проведение касательных к кривой $f(x)$:

- сначала проводится касательная в точке x_0 и пересечение касательной с осью x дает точку x_1,

- затем проводится касательная в точке x_1 и т.д.

В результате получаем монотонную последовательность $x_0, x_1, \cdots$, пределом которой является точное значение корня уравнения. Отметим, что приближение к пределу происходит с противоположной стороны по сравнению с приближением к пределу в методе хорд.

Для остановки процесса итераций в методе Ньютона может быть использована оценка погрешности (1). Для метода Ньютона справедлива также следующая оценка погрешности найденного значения корня:

$$|x_n - \xi| \le (x_n - x_{n-1})^2 M_2 / (2m_1), \qquad (5)$$

где M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a,b]$. Поскольку при увеличении n $x_n - x_{n-1} \to 0$, то, начиная с некоторого номера шага, $M_2|x_n - x_{n-1}| / (2m_1) < 1$; в этом случае справедлива более простая оценка погрешности:

$$|x_n - \xi| \le |x_n - x_{n-1}|.$$

Модифицированный метод Ньютона - процесс итераций производится в соответствии с формулой $x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_0)$.

Поскольку в этой формуле используется значение производной лишь в одной точке, данный метод требует меньшего объема вычислений на каждом шаге, чем обычный метод Ньютона (4). Однако, данный процесс итераций сходится медленнее. Начальная точка выбирается также, как и в обычном методе Ньютона. В качестве критерия остановки процесса итераций может использоваться оценка погрешности, вычисляемая по формуле (1).

Комбинированный метод - на каждом шаге итераций используются два метода: метод Ньютона и метод хорд. В качестве начального значения для метода

Ньютона используется граничная точка исходного отрезка $[a,b]$, в которой выполняется условие (3); в качестве начальной точки для метода хорд используется противоположная граничная точка, назовем ее y_0. На каждом шаге итераций вначале вычисляется очередное приближенное значение с помощью метода Ньютона по формуле (4). Затем вычисляется приближенное значение в соответствии с методом хорд по формуле

$$y_{n+1} = y_n - f(y_n)(x_{n+1} - y_n) / (f(x_{n+1}) - f(y_n)).$$

В этой формуле роль "неподвижной" точки выполняет точка x_{n+1}, найденная с помощью метода Ньютона. В ходе выполнения итераций получаем две последовательности: $x_0, x_1, x_2, \cdots$ и $y_0, y_1, y_2, \cdots$, сходящиеся с разных сторон к истинному значению корня. В качестве приближенного значения корня на шаге с номером n может быть взято любое значение между x_n и y_n, например, среднее арифметическое $(x_n + y_n)/2$. Очевидно, что погрешность при этом не превышает величины $|x_n - y_n|$.

Метод итераций - исходное уравнение $f(x) = 0$ переписывается в эквивалентном виде $x = \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ выбрана таким образом, чтобы для всех x, принадлежащих исходному отрезку $[a,b]$, выполнялось условие $|\varphi'(x)| \le q < 1$. При выполнении этого условия итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится независимо от начального значения x_0, принадлежащего исходному отрезку, и пределом последовательности $x_0, x_1, x_2, \cdots$ является точка ξ - корень уравнения $f(x) = 0$. При этом, если $\varphi'(x) > 0$, то процесс приближения - монотонный: все точки $x_0, x_1, x_2, \cdots$ расположены с одной стороны от точки ξ. Если $\varphi'(x) < 0$, то последовательные значения расположены по разные стороны от точки ξ.

Для метода итераций справедлива следующая оценка погрешности найденного значения корня:

$$|x_n - \xi| \le |x_n - x_{n-1}| \cdot q / (1 - q). \qquad (6)$$

Из этого неравенства следует, что метод итераций сходится тем быстрее, чем меньше значение q. Если $\varphi'(x) < 0$, то справедлива также более простая оценка:

$$|x_n - \xi| \le |x_n - x_{n-1}|. \qquad (7)$$

Существует следующий способ выбора итерирующей функции $\varphi(x)$. Пусть на исходном отрезке $[a,b]$ производная функции $f(x)$ принимает положительные зна-

чения: $0 < m_1 \le f'(x) \le M_1$; тогда можно положить $\varphi(x) = x - f(x)/M_1$. Отметим, что для улучшения сходимости целесообразно сужать отрезок $[a,b]$.

Пример 3. Найдем подходящую итерирующую функцию для нахождения положительного корня уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 + x - 1000$. Поскольку $f(9) < 0$, а $f(10) > 0$, то искомый корень лежит на отрезке $[9;10]$. На этом отрезке $244 \le f'(x) \le 301$, следовательно, в качестве искомой функции можно выбрать функцию $\varphi(x) = x - f(x)/301$.

Другой способ нахождения подходящей итерирующей функции основан на свойстве производной обратной функции:

Пусть функция $\varphi(x)$ дифференцируема и монотонна на отрезке $[a,b]$ и производная $\varphi'(x_0) \ne 0$ при $a < x_0 < b$; тогда производная обратной функции $g(x)$ в точке $y_0 = \varphi(x_0)$ равна $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

Пусть для исходного уравнения найдено эквивалентное уравнение $x = \varphi(x)$ и $|\varphi'(x)| \ge k > 1$. Тогда данное уравнение можно заменить уравнением $x = g(x)$, где $g(x)$ - функция, обратная к функции $\varphi(x)$; итерационный процесс, построенный на основе этого уравнения, сходится.

Пример 4. Найдем иной вариант итерирующей функции для нахождения положительного корня уравнения $x^3 + x - 1000 = 0$. Если записать это уравнение в виде $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = 1000 - x^3$, то на отрезке $[9;10]$, заключающем искомый корень, $|\varphi'(x)| = 3x^2 \ge 243$, следовательно, функция $\varphi(x)$ не удовлетворяет условию сходимости. Выберем функцию, обратную к функции $\varphi(x)$: $g(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$. На отрезке $9 \le x \le 10$ $|g'(x)| < 1/300$, следовательно, функция $g(x)$ может быть использована для построения сходящегося итерационного процесса. Отметим, что $g'(x) < 0$, так что процесс сходимости - немонотонный и для оценки погрешности можно использовать простую формулу (7).

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

0. Найти наименьший положительный корень уравнения $tg(x) = x$.
1. Найти наименьший корень уравнения $x^5 - x - 0.2 = 0$.
2. Найти положительный корень уравнения $x^5 + x - 0.2 = 0$.
3. Найти наименьший положительный корень уравнения $e^x = 5x^2$.
4. Найти корень уравнения $x^5 - x - 0.2 = 0$, ближайший к точке $x = 0$.
5. Найти наименьший корень уравнения $x^3 - 10x + 2 = 0$.
6. Найти положительный корень уравнения $x^4 - x^2 + 5x - 10 = 0$.

7. Найти наибольший корень уравнения $x^3 - 10x + 2 = 0$.
8. Найти наименьший корень уравнения $e^x = 3x^2$.
9. Найти корень уравнения $x^3 - 10x + 2 = 0$, ближайший к точке $x = 0$.

Лабораторная работа №3
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Задание:

Для заданного варианта решить методом итераций систему уравнений $A \cdot X = B$ Для остановки процесса последовательных приближений использовать условие: сумма модулей приращений элементов вектора X на последнем шаге итераций меньше $\varepsilon = 0.001$.

Используя метод Гаусса, вычислить определитель и число обусловленности матрицы A.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для решения разработать программу на одном из языков высокого уровня, реализующую соответствующие алгоритмы и имеющую оконный интерфейс.

2. Отчет оформить в соответствии с требованиями кафедры

3. Номер варианта соответствует последней цифре в номере зачетной книжки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Система линейных алгебраических уравнений в векторной форме имеет вид:

$$A \cdot X = B, \qquad (1)$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$ **- матрица системы,**

$X^T = (x_1, \dots, x_n)$ **- вектор неизвестных,**

$B^T = (b_1, \dots, b_n)$ **- вектор свободных коэффициентов.**

Если определитель матрицы ***A*** не равен нулю (матрица – невырожденная), то существует единственное решение системы (1).

Метод Гаусса для решения системы линейных алгебраических уравнений включает два этапа:

1) преобразование матрицы ***A*** к верхней треугольной матрице;

2) последовательное вычисление неизвестных $x_n,...,x_1$.

Преобразование матрицы $\boldsymbol{A}$ сопровождается преобразованием столбца свободных коэффициентов, т.е. преобразуется расширенная матрица системы $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$, включающая матрицу $\boldsymbol{A}$ и столбец $\boldsymbol{B}$. Преобразование заключается в последовательном обнулении элементов матрицы $\boldsymbol{A}$, расположенных ниже главной диагонали.

Первый шаг первого этапа состоит в обнулении элементов первого столбца a_{i1}, $i=2,...,n$; для этого первая строка матрицы, помноженная, соответственно, на коэффициенты a_{i1}/a_{11}, последовательно вычитается из последующих строк. При этом первая строка называется ведущей строкой, а элемент a_{11} - ведущим или главным элементом. Очевидно, что главный элемент не может быть равен нулю - следовательно, предварительно может потребоваться перестановка строк расширенной матрицы.

Второй шаг - обнуление элементов второго столбца. На этом шаге главным элементом является элемент a_{22}^1 - преобразованный в процессе выполнения первого шага элемент a_{22}. Затем обнуляются элементы третьего столбца и т.д.

На каждом шаге ведущий элемент не может быть равен нулю. Кроме того, с целью повышения точности вычислений целесообразно выбирать в качестве главного элемента наибольший по модулю элемент соответствующего столбца. Поэтому на каждом шаге обнулений предусматривается перестановка строк. Такая разновидность метода Гаусса называется алгоритмом с частичным выбором главного элемента.

После завершения первого этапа расширенная матрица системы принимает вид $[\boldsymbol{U}|\boldsymbol{F}]$, где $\boldsymbol{U}=[u_{ij}]$ - верхняя треугольная матрица - результат преобразования матрицы $\boldsymbol{A}$, а $\boldsymbol{F}$ - результат преобразования столбца свободных коэффициентов.

На втором этапе последовательно вычисляются: $x_n = f_n / u_{nn}$; $x_i = (f_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} \cdot x_j) / u_{ii}$, $i=n-1,...,1$.

Пример 1. Решим систему линейных уравнений, последовательно преобразовывая расширенную матрицу системы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5.2 & 9 & 2.4 \\ 5 & 1 & -1 & 8 \\ 10 & 2 & -10 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 10 & 2 & -10 & 24 \\ 5 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 5.2 & 9 & 2.4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 10 & 2 & -10 & 24 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 10 & 2 & -10 & 24 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Вначале переставляем строки так, чтобы ведущий элемент был максимальным. Затем вычитаем элементы первой строки из второй, умножив их на коэффициент 5/10, и из третьей, умножив элементы первой строки на коэффициент 1/10. На этом заканчивается процесс обнуления элементов первого столбца.

Процесс обнуления элементов второго столбца в данном случае сводится просто к перестановке строк.

Второй этап состоит в последовательном вычислении:

$$x_3 = -4/4 = -1,\quad x_2 = -10 \cdot x_3 / 5 = 2,\quad x_1 = (24 - 2 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3)/10 = 1.$$

Для матрицы, приведенной к треугольному виду, вычисление определителя сводится к перемножению элементов, стоящих на главной диагонали; при этом следует учесть, что каждая перестановка строк меняет знак определителя.

Число обусловленности матрицы ***A*** вычисляется по формуле:

Cond(***A***)=||***A***||*||$\boldsymbol{A^{-1}}$||,

где $\boldsymbol{A^{-1}}$ - обратная матрица, $\|A\| = \underset{1<i<n}{Max} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ - норма матрицы.

Число обусловленности характеризует близость матрицы к вырожденной матрице. Для единичной матрицы Cond(***E***)=1; для произвольной матрицы Cond(***A***) ≥ 1. Чем ближе матрица к вырожденной, тем больше число обусловленности. Если число обусловленности матрицы ***A*** - велико, то решение системы уравнений $A \cdot X = B$ становится некорректной задачей. Если правая часть системы задана с погрешностью: $B + \delta B$ вместо ***B***, - то погрешность решения удовлетворяет неравенству

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq Cond(A) \cdot \frac{\|\delta B\|}{\|B\|},$$

где $\|X\| = \underset{1\leq i\leq n}{Max} |x_i|$ - норма вектора ***X***.

Для нахождения обратной матрицы следует *n* раз решить систему

$$A \cdot X = e_i, \qquad i=1,...,n, \qquad (2)$$

где e_i - i-й столбец единичной матрицы. При решении систем уравнений (2) методом Гаусса целесообразно преобразовывать сразу расширенную матрицу [***A***|***E***], включающую исходную и единичную матрицы. При этом можно воспользоваться разновидностью метода Гаусса, называемой схемой Жордана. В соответствии со схемой Жордана исходная матрица преобразуется к единичной. Сначала матрица А приводится к диагональной: с помощью ведущих элементов каждого столбца производится обнуление элементов, расположенных как выше, так и ниже главной диагонали. В заключение каждая строка расширенной матрицы делится на соответствующий диагональный элемент. В результате преобразований формируется расширенная матрица [***E***|$\boldsymbol{A^{-1}}$], содержащая в правой части искомую обратную матрицу.

При решении системы уравнений методом итераций исходная система $A \cdot X = B$ приводится к эквивалентному виду:

$$X = C \cdot X + F \qquad (3)$$

и формируется итерационный процесс

$$X^{k+1} = C \cdot X^k + F, \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{X^k}$ - вектор, получаемый на k-м шаге процесса итераций. Более подробно итерационный процесс можно записать в виде:

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^k + f_i, \qquad i=1,...,n. \qquad (5)$$

Итерационный процесс сходится независимо от выбора вектора начального приближения $\boldsymbol{X^0}$, если выполнено условие:

$$\underset{1\le i\le n}{Max} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \le q < 1. \qquad (6)$$

Приведение исходной системы к нужному виду может быть произведено следующим образом. Решим i-е уравнение системы

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{ii}x_i + ... + a_{in}x_n = b_i$$

относительно x_i:

$$x_i = (-\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} a_{ij}x_j + b_i) / a_{ii}, \qquad i=1,...,n. \qquad (7)$$

В результате получаем систему вида (3), где элементы матрицы $\boldsymbol{C}$ равны $c_{ij}=-a_{ij}/a_{ii}$, если $j \ne i$, и $c_{ii}=0$, а элементы вектора $\boldsymbol{F}$ равны $f_i=b_i/a_{ii}$, для всех $i=1,...,n$. При этом для выполнения условия сходимости (6) достаточно, чтобы в матрице $\boldsymbol{A}$ диагональные элементы были преобладающими:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Преобладания диагональных элементов можно добиться с помощью элементарных операций над строками исходной матрицы: перестановкой строк и суммированием строк, взятых с подходящими коэффициентами.

Пример 2. Решим систему линейных уравнений методом итераций, предварительно преобразовав уравнения так, чтобы диагональные элементы матрицы A были преобладающими:

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 & 33 \\ -18 & 15 & 6 & -30 \\ 0 & 7 & -2 & 58 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 & 33 \\ 0 & 7 & -2 & 58 \\ -18 & 15 & 6 & -30 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 & 33 \\ 0 & 7 & -2 & 58 \\ -2 & 0 & 6 & -22 \end{bmatrix}.$$

На первом шаге переставляем вторую и третью строки матрицы, на втором - прибавляем к третьей строке первую строку с весовым коэффициентом 2 и вторую строку с коэффициентом -1. Записываем итерационный процесс:

$$x_1^{k+1} = (4 \cdot x_2^k + x_3^k + 33) / 8, \quad x_2^{k+1} = (2 \cdot x_3^k + 58) / 7, \quad x_3^{k+1} = (2 \cdot x_1^k - 26) / 6.$$

Результаты расчетов приведены в таблице:

k	0	1	2	.. .	7	8
x_1^k	4 .125	7 .81	7 .458	.. .	7 .997	7 .998
x_2^k	8 .286	7 .238	7 .631	.. .	7 .997	7 .999
x_3^k	- 3.667	- 2.292	- 1.063	.. .	- 1.003	- 1.001

Точное решение системы равно X^T = (8, 8, -1).

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

№ варианта	Задание
1	$\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3, \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6{,}8, \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8, \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = 7{,}2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 8{,}2x_1 - 3{,}2x_2 + 14{,}2x_3 + 14{,}8x_4 = -8{,}4, \\ 5{,}6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6{,}4x_4 = 4{,}5, \\ 5{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 12{,}4x_3 - 2{,}3x_4 = 3{,}3, \\ 6{,}8x_1 + 13{,}2x_2 - 6{,}3x_3 - 8{,}7x_4 = 14{,}3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5{,}7x_1 - 7{,}8x_2 - 5{,}6x_3 - 8{,}3x_4 = 2{,}7, \\ 6{,}6x_1 + 13{,}1x_2 - 6{,}3x_3 + 4{,}3x_4 = -5{,}5, \\ 14{,}7x_1 - 2{,}8x_2 + 5{,}6x_3 - 12{,}1x_4 = 8{,}6, \\ 8{,}5x_1 + 12{,}7x_2 - 23{,}7x_3 + 5{,}7x_4 = 14{,}7. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 14{,}2x_2 + 6{,}3x_3 - 15{,}5x_4 = 2{,}8, \\ 8{,}3x_1 - 6{,}6x_2 + 5{,}8x_3 + 12{,}2x_4 = -4{,}7, \\ 6{,}4x_1 - 8{,}5x_2 - 4{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = 7{,}7, \\ 17{,}1x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}4x_3 - 7{,}2x_4 = 13{,}5. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 15{,}7x_1 + 6{,}6x_2 - 5{,}7x_3 + 11{,}5x_4 = -2{,}4, \\ 8{,}8x_1 - 6{,}7x_2 + 5{,}5x_3 - 4{,}5x_4 = 5{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 5{,}7x_2 - 23{,}4x_3 + 6{,}6x_4 = 7{,}7, \\ 14{,}3x_1 + 8{,}7x_2 - 15{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = 23{,}4. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4{,}3x_1 - 12{,}1x_2 + 23{,}2x_3 - 14{,}1x_4 = 15{,}5, \\ 2{,}4x_1 - 4{,}4x_2 + 3{,}5x_3 + 5{,}5x_4 = 2{,}5, \\ 5{,}4x_1 + 8{,}3x_2 - 7{,}4x_3 - 12{,}7x_4 = 8{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 7{,}6x_2 + 1{,}34x_3 + 3{,}7x_4 = 12{,}1. \end{cases}$

7	$\begin{cases} 14{,}4x_1 - 5{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 12{,}7x_4 = -14{,}4, \\ 23{,}4x_1 - 14{,}2x_2 - 5{,}4x_3 + 2{,}1x_4 = 6{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 13{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 14{,}3x_4 = 9{,}4, \\ 5{,}6x_1 + 8{,}8x_2 - 6{,}7x_3 - 23{,}8x_4 = 7{,}3. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 1{,}7x_1 + 10x_2 - 1{,}3x_3 + 2{,}1x_4 = 3{,}1, \\ 3{,}1x_1 + 1{,}7x_2 - 2{,}1x_3 + 5{,}4x_4 = 2{,}1, \\ 3{,}3x_1 - 7{,}7x_2 + 4{,}4x_3 - 5{,}1x_4 = 1{,}9, \\ 10x_1 - 20{,}1x_2 + 20{,}4x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}8. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 1{,}9x_3 - 57{,}4x_4 = 10, \\ 1{,}1x_1 - 4{,}3x_2 + 1{,}5x_3 - 1{,}7x_4 = 19, \\ 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}8x_4 = 20, \\ 7{,}1x_1 - 1{,}3x_2 - 4{,}1x_3 + 5{,}2x_4 = 10. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 6{,}1x_1 + 6{,}2x_2 - 6{,}3x_3 + 6{,}4x_4 = 6{,}5, \\ 1{,}1x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}2x_3 - 3{,}8x_4 = 4{,}2, \\ 5{,}1x_1 - 5{,}0x_2 + 4{,}9x_3 - 4{,}8x_4 = 4{,}7, \\ 1{,}8x_1 + 1{,}9x_2 + 2{,}0x_3 - 2{,}1x_4 = 2{,}2. \end{cases}$

Лабораторная работа №4
ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Задание:

Для функции *f(x)*, заданной своими значениями в точках $x_0,...,x_n$, построить интерполяционный многочлен Ньютона с использованием разделенных разностей. Для вариантов с четными номерами использовать формулу интерполирования вперед, для вариантов с нечетными номерами - формулу интерполирования назад.

Сравнить графики аппроксимируемой функции *f(x)* и интерполяционного многочлена внутри и за пределами отрезка интерполирования. Построить график погрешности интерполяции.

Качественно, с помощью графиков, оценить влияние на погрешность количества и расположения внутренних узлов интерполяции $x_1,...,x_{n-1}$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для решения разработать программу на одном из языков высокого уровня, реализующую соответствующие алгоритмы и имеющую оконный интерфейс.

2. Отчет оформить в соответствии с требованиями кафедры

3. Номер варианта соответствует последней цифре в номере зачетной книжки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Разделенные разности можно определить рекурсивно. Для функции f(x) разделенная разность первого порядка определяется формулой

$$f(x_i;x_{i+1}) = (f(x_{i+1}) - f(x_i)) / (x_{i+1} - x_i); \quad (1)$$

разность *n*-го порядка определяется через разности порядка *(n-1)*:

$$f(x_i;...;x_{i+n}) = (f(x_{i+1};...;x_{i+n}) - f(x_i;...;x_{i+n-1})) / (x_{i+n} - x_i). \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) $x_i,...,x_{i+n}$ - произвольные точки.

Разности, необходимые для построения интерполяционного многочлена, можно найти путем последовательного построения треугольной таблицы:

x	$f(x)$	Разности 1-го порядка	Разности 2-го порядка	. . .
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0;x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{f(x_1;x_2)-f(x_0;x_1)}{x_2-x_0}$	. . .
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	. . .	
x_2	$f(x_2)$	. . .		
. . .	. . .			

Разность n-го порядка можно вычислить также с помощью общей формулы

$$f(x_0;\ldots;x_n)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k)/\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)\right]. \qquad (3)$$

Интерполяционная формула Ньютона с использованием разделенных разностей может быть записана в одном из видов:

$L(x)=f(x_0)+f(x_0;x_1)(x-x_0)+f(x_0;\ x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1)\ +\ldots+\ f(x_0;\ \ldots;x_n)(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$, (4)

$L(x)=f(x_n)+f(x_{n-1};x_n)(x-x_n)+f(x_{n-2};\ x_{n-1};x_n)(x-x_n)(x-x_{n-1})\ +\ldots+\ f(x_0;\ \ldots;x_n)(x-x_n)\ldots(x-x_1)$. (5)

Если последовательность точек $x_0,\ldots,x_n$ - монотонна, т.е. $x_0< x_1<\ldots< x_n$, то формулу (4) называют формулой для интерполирования вперед, а формулу (5) - формулой для интерполирования назад. На самом деле при построении интерполяционных многочленов с разделенными разностями не существует ограничений на расположение и нумерацию узлов интерполяции, что позволяет путем смещения узлов минимизировать погрешность интерполяции.

Обозначим: $x_{\min}=\underset{0\le i\le n}{Min}\,x_i$, $x_{\max}=\underset{0\le i\le n}{Max}\,x_i$.

Отрезок $[x_{min}, x_{max}]$ называется отрезком интерполяции, область вне этого отрезка называется областью экстраполяции.

На соседних подотрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$ погрешность интерполяции имеет разные знаки, и абсолютная величина погрешности достигает максимума вблизи середины каждого подотрезка. Смещение узла интерполяции x_i приводит к уменьшению абсолютной величины погрешности на одном из соседних подотрезков и увеличению – на другом.

В области экстраполяции абсолютная величина погрешности монотонно растет по мере удаления от граничных точек x_{min}, x_{max}.

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

0. $f(x) = \mathrm{Sin}(\pi\,\mathrm{Sin}(\pi\,x))$, $x_{min}=0$, $x_{max}=1$, $n=5$.
1. Резонансная характеристика колебательного контура: $f(x) = 1 / \mathrm{Sqrt}(1 + x^2)$, $x_{min}=-3$, $x_{max}=3$, $n=4$.
2. $f(x) = \mathrm{Sin}(\pi\,\mathrm{Cos}(\pi\,x))$, $x_{min}=0$, $x_{max}=1$, $n=5$.
3. $f(x) = \mathrm{Sin}(x) / \mathrm{Sqrt}(1 + x^6)$, $x_{min}=-\pi$, $x_{max}=\pi$, $n=6$.
4. $f(x) = \exp(-b\,x)\,\mathrm{Sin}[\pi(x + x^2)]$, $b=0.15$, $x_{min}=0$, $x_{max}=1$, $n=4$.
5. $f(x) = (x^4 + 8)\,\exp[-(x/2)^2]$, $x_{min}=-4$, $x_{max}=4$, $n=8$.
6. $f(x) = \exp(-b\,x)\,\mathrm{Cos}[\pi(x + x^2)]$, $b=0.15$, $x_{min}=0$, $x_{max}=1$, $n=4$.
7. $f(x) = \mathrm{Cos}(\pi\,x^2)$, $x_{min}=0$, $x_{max}=1$, $n=4$.
8. $f(x) = \mathrm{Cos}(2\pi\,x^3)$, $x_{min}=0$, $x_{max}=1$, $n=5$.
9. $f(x) = \mathrm{Sin}[2\pi\,\mathrm{Sin}^2(\pi\,x/2)]$, $x_{min}=0$, $x_{max}=1$, $n=6$.

Лабораторная работа №5

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задание:

Решить задачи 1, 2, 3.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для решения разработать программу на одном из языков высокого уровня, реализующую соответствующие алгоритмы и имеющую оконный интерфейс.

2. Отчет оформить в соответствии с требованиями кафедры

3. Номер варианта соответствует последней цифре в номере зачетной книжки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Обычно решение заключается в нахождении ряда значений x_i и y_i искомой зависимости y (x) при i, изменяющемся от 0 до N при шаге изменения x, равном h. Будем рассматривать способы решения дифференциального уравнения, при которых h = const.

Рассмотрим методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида $Y' = f(X, Y)$.

Метод Эйлера реализуется применением на каждом шаге вычислений следующих итерационных выражений:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x, y)$$

При этом для i = 0 значения x_0 и y_0 должны быть известны как начальные условия, без чего невозможно единственное решение. Погрешность метода пропорциональна h^2.

Для уменьшения погрешности решения следует применять более точные методы. Например, метод Эйлера с пересчетом реализуется следующими итерационными выражениями на каждом шаге вычислений:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$y_{i+1} = y_i + h * (f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h * f(x_i, y_i))) / 2$

Погрешность метода пропорциональна h^3.

При высоких требованиях к точности решения можно воспользоваться **методом Рунге-Кутта**, реализующийся следующими формулами:

$K_1(x, y) = h*f(x, y)$

$K_2(x, y) = h*f(x + h/2, y + k_1(x, y)/2)$

$K_3(x, y) = h*f(x + h/2, y + k_2(x, y)/2)$

$K_4(x, y) = h*f(x + h, y_i + k_3(x, y))$

$x_{i+1} = x_i + h$

$y_{i+1} = y_i + (k_1(x, y) + 2* K_2(x, y) + 2* K_3(x, y) + K_4(x, y)) / 6$

Погрешность метода пропорциональна h^5.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений 2 порядка $Y'' + p(x)Y' + g(x)Y = f(x)$

с граничными условиями

$k_{11}*Y(a) + k_{12}*Y'(a) = A,$

$K_{21}*Y(b) + k_{22}*Y'(b) = B,$

также применяется **метод конечных разностей**, при этом производные входящие в уравнение и дополнительные условия заменяются следующими конечно-разностными отношениями

$$Y' = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h} \qquad Y' = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} \qquad Y' = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h}$$

$$Y''_{i+1} = \frac{Y'_{i+1} - Y'_i}{h} = \frac{Y_{i+1} - Y_i - Y_i - Y_{i-1}}{h^2} = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2}$$

В результате получим систему алгебраических уравнений, решение которой даст таблицу приближенных значений искомой функции.

Пример 1. Решить обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

Y"+XY'-0,5Y/X=1 с граничными условиями:

Решение:

$$\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2} + X_i \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h} - 0.5\frac{Y_i}{X_i} = 1 \qquad (i = 1,2)$$

Из краевых условий составим конечно-разностные уравнения в конечных точках

$$Y_0 + 2\frac{Y_1 - Y_0}{h} = 1$$

$Y_3 = 2.15$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{Y_2 - 2Y_1 + Y_0}{0.01} + 2.1\dfrac{Y_2 - Y_1}{0.1} - 0.5\dfrac{Y_1}{2.1} = 1 \\ \dfrac{Y_3 - 2Y_2 + Y_1}{0.01} + 2.2\dfrac{Y_3 - Y_2}{0.1} - 0.5\dfrac{Y_2}{2.2} = 1 \\ Y_0 + 2\dfrac{Y_1 - Y_0}{0.1} = 1 \\ Y_3 = 2.15 \end{cases}$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

Задание 1. Решите на отрезке $[x_0,x_{end}]$ задачу Коши $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ методом Рунге-Кутта с постоянным шагом. Вид уравнения и начальные значения заданы в таблице 1. Изобразите графики решений, вычисленных с шагами h , $2h$ и $h/2$.

Таблица 1 – Данные для расчета

Вариант	$f(x, y, y')=0$	Начальное условие	x_{end}
1	$(e^x + 1)dy + e^x dx = 0$	$y(0) = 0.5$	2
2	$y \ln y + xy' = 0$	$y(1) = e$	2.6
3	$\sqrt{4 - x^2}\, y' + xy^2 + x = 0$	$y(0) = -tg2$	2
4	$3e^x tgy\ dx + \dfrac{2 - e^x}{\cos^2 x} dy = 0$	$y(1) = arctg(2 - e)$	3
5	$(1 - e^x)yy' = e^x$	$y(0) = 1$	2.8
6	$y' \sin x = y \ln y$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$	π
7	$\dfrac{xdx}{1+y} - \dfrac{ydy}{1+x} = 0$	$y(1) = 1$	3
8	$(1 + y^2)dx = xdy$	$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$	π
9	$2\sqrt{y} = y'$	$y(0) = 1$	2
0	$(e^x + 2)dy + 2e^x dx = 0$	$y(0) = \dfrac{1}{9}$	1.6

Порядок выполнения задания:

1. Присвойте начальное значение решения переменной y_0.
2. Определите правую часть уравнения *f(x,y)*.
3. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = \frac{|x_{end} - x_0|}{h}$.
4. Сохраните решение в матрице У1.
5. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = 2\frac{|x_{end} - x_0|}{h}$.
1. Сохраните решение в матрице У2.
7. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = \frac{|x_{end} - x_0|}{2h}$.
8. Сохраните решение в матрице У3.
9. Постройте на одном графике все три найденных решения.
10. Оцените погрешности найденных решений по формуле Рунге.

Задание 2 Решите задачу Коши

$y_1' = f_1(x, y_1, y_2),\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2),\ y_1(a) = y_{1,0}, y_2(a) = y_{2,0}$ на отрезке $[a,b]$ методом Рунге-Кутты с постоянным шагом h=0.1. Изобразите графики решений, вычисленных с шагом h, $2h$ и $h/2$. Вид уравнений и начальные значения заданы в таблице 2.

Вариант	$f_1(x, y_1, y_2)$	$f_2(x, y_1, y_2)$	$y_1(a)$	$y_2(a)$	a	b
1	$arctg\left(\frac{1}{1+y_1^2+y_2^2}\right)$	$\sin(y_1 y_2)$	1	0	-1	1
2	$arctg(x^2+y_2^2)$	$\sin(x+y_1)$	0.5	1.5	0	2
3	$x^2 y_1 + y_2$	$\cos(y_1 + x y_2)$	-1	1	0	4
4	$x^2 + y_2^2$	$x y_1 y_2$	1	0	0	5
5	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y_2^2}}$	$\frac{y_2}{\sqrt{1+x^2+y_1^2}}$	0.2	0	-1	1
6	$\sin(x^2+y_2^2)$	$\cos(x y_1)$	0	0	0	4
7	$\sin y_2$	$\cos y_1$	0.5	-0.5	-1	3
8	$x\cos(y_1+y_2)$	$\sin(y_1-y_2)$	-0.6	2	2	5
9	$\sin y_1 \cos^2 y_2$	$\cos y_1 \cos y_2$	0	0	-1	3
0	$2\sqrt{3x^2+y_1^2+y_1}$	$\sqrt{x^2+y_1^2+y_2}$	1.2	1.2	0	2

Порядок выполнения задания:

1. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
2. Присвойте начальное значение решения переменной y_0.
3. Определите правую часть уравнения *f(x,y)*.
4. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = \frac{|x_{end} - x_0|}{h}$.

5. Сохраните решение в матрице У1.

6. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = 2\frac{|x_{end} - x_0|}{h}$.

7. Сохраните решение в матрице У2.

8. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = \frac{|x_{end} - x_0|}{2h}$.

9. Сохраните решение в матрице У3.

10. Постройте на одном графике все три найденные решения.

11. Оцените погрешности найденных решений по формуле Рунге.

Задание 3. Найдите общее решение линейного однородного уравнения второго порядка $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Решите задачу Коши $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $y(a) = y_0, y'(a) = y_1$. Изобразите его график. Значения параметров a_1, a_2 и a заданы в таблице 3.

Таблица 3 – Данные для расчета

Вариант	a_1	a_2	$y(a)$	$y'(a)$	a
1	2	0	1	1	0
2	-4	4	0	1	0
3	2	0	0	0	π/2
4	0	1	3	0	-π/2
5	2	5	0	0	1
6	-4	4	1	1	0.3
7	6	13	-1	1	0.25
8	0	1	4	1	π/2
9	2	5	6	2	-π/2
10	-4	8	0	2	1
11	2	0	0	2	0
12	-4	4	-1	0.5	2

Порядок выполнения задания:

1. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
2. Присвойте начальное значение решения переменной y_0.
3. Определите правую часть уравнения $f(x,y)$.
4. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = \frac{|x_{end} - x_0|}{h}$.
5. Сохраните решение в матрице У1.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Перед началом изучения дисциплины студенту необходимо ознакомиться с содержанием рабочей программы дисциплины, с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, имеющимися на образовательном портале РГРТУ и сайте кафедры.

Методические рекомендации студентам по работе над конспектом лекции

Основу теоретического обучения студентов составляют лекции. Они дают систематизированные знания студентам о наиболее сложных и актуальных проблемах изучаемой дисциплины. На лекциях особое внимание уделяется не только усвоению студентами изучаемых проблем, но и стимулированию их активной познавательной деятельности, творческого мышления, развитию научного мировоззрения, профессионально-значимых свойств и качеств.

Перед каждой лекцией студенту необходимо просматривать рабочую программу дисциплины, что позволит сэкономить время на записывание темы лекции, ее основных вопросов, рекомендуемой литературы.

Перед очередной лекцией необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущей лекции. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к лектору (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

Во время лекции студенты должны не только внимательно воспринимать действия преподавателя, но и самостоятельно мыслить, добиваться понимания изучаемого предмета. Студенты должны аккуратно вести конспект. В случае недопонимания какой-либо части предмета следует задать вопрос в установленном порядке преподавателю. В процессе работы на лекции необходимо так же выполнять в конспектах модели изучаемого предмета (рисунки, схемы, чертежи и т. д.), которые использует преподаватель.

Слушая лекцию, нужно из всего получаемого материала выбирать и записывать самое главное. Следует знать, что главные положения лекции преподаватель обычно выделяет интонацией или повторяет несколько раз. Именно поэтому предварительная подготовка к лекции позволит студенту уловить тот момент, когда следует перейти к конспектированию, а когда можно просто внимательно слушать лекцию. В связи с этим нелишне перед началом сессии еще раз бегло просмотреть

учебники или прежние конспекты по изучаемым предметам. Это станет первичным знакомством с тем материалом, который прозвучит на лекции, а также создаст необходимый психологический настрой.

Чтобы правильно и быстро конспектировать лекцию важно учитывать, что способы подачи лекционного материала могут быть разными. Преподаватель может диктовать материал, или рассказывать его, не давая ничего под запись, или проводить занятие в форме диалога со студентами. Чаще всего можно наблюдать соединение двух или трех вышеназванных способов.

Эффективность конспектирования зависит от умения владеть правильной методикой записи лекции. Конечно, способы конспектирования у каждого человека индивидуальны. Однако существуют некоторые наиболее употребляемые и целесообразные приемы записи лекционного материала.

Запись лекции можно вести в виде тезисов – коротких, простых предложений, фиксирующих только основное содержание материала. Количество и краткость тезисов может определяться как преподавателем, так и студентом. Естественно, что такая запись лекции требует впоследствии обращения к дополнительной литературе. На отдельные лекции можно приносить соответствующий иллюстративный материал на бумажных или электронных носителях, представленный лектором на портале или присланный на «электронный почтовый ящик группы» (таблицы, графики, схемы). Данный материал будет охарактеризован, прокомментирован, дополнен непосредственно на лекции.

Кроме тезисов важно записывать примеры, доказательства, даты и цифры. Значительно облегчают понимание лекции те схемы и графики, которыми преподаватель иллюстрирует теоретический материал. По мере возможности студенты должны переносить их в тетрадь рядом с тем текстом, к которому эти схемы и графики относятся.

Хорошо если конспект лекции дополняется собственными мыслями, суждениями, вопросами, возникающими в ходе прослушивания содержания лекции. Те вопросы, которые возникают у студента при конспектировании лекции, не всегда целесообразно задавать сразу при их возникновении, чтобы не нарушить ход рассуждений преподавателя. Студент может попытаться ответить на них сам в процессе подготовки к практическим занятиям либо обсудить их с преподавателем на консультации.

Важно и то, как будет расположен материал в лекции. Если запись тезисов ведется по всей строке, то целесообразно отделять их время от времени красной строкой или пропуском строки. Примеры же и дополнительные сведения можно смещать вправо или влево под тезисом, а также на поля. В тетради нужно выделять темы лекций, записывать рекомендуемую для самостоятельной подготовки литературу, внести фамилию, имя и отчество преподавателя. Наличие полей в тет-

ради позволяет не только получить «ровный» текст, но и дает возможность при необходимости вставить важные дополнения и изменения в конспект лекции.

При составлении конспектов необходимо использовать избыточность русского языка, сокращая слова. Так в процессе совершенствования навыков конспектирования лекций важно выработать индивидуальную систему записи материала, научиться рационально сокращать слова и отдельные словосочетания.

Практика показывает, что не всегда студенту удается успевать записывать слова лектора даже при использовании приемов сокращения слов. В этом случае допустимо обратиться к лектору с просьбой повторить сказанное. При обращении важно четко сформулировать просьбу, указать какой отрывок необходимо воспроизвести еще раз. Однако не всегда удобно прерывать ход лекции. В этом случае можно оставить пропуск, и после лекции устранить его при помощи конспекта соседа. Важно сделать это в короткий срок, пока свежа память о воспринятой на лекции информации.

Работу над конспектом следует начинать с его доработки, желательно в тот же день, пока материал еще легко воспроизводим в памяти (через 10 часов после лекции в памяти остается не более 3040 % материала). С целью доработки необходимо прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее следует прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. Записи должны быть наглядными, для чего следует применять различные способы выделений. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект.

Подготовленный конспект и рекомендуемая литература используются при подготовке к практическим занятиям. Подготовка сводится к внимательному прочтению учебного материала, к выводу с карандашом в руках всех утверждений и формул, к решению примеров, задач, к ответам на вопросы. Примеры, задачи, вопросы по теме являются средством самоконтроля.

Непременным условием глубокого усвоения учебного материала является знание основ, на которых строится изложение материала. Обычно преподаватель напоминает, какой ранее изученный материал и в какой степени требуется подготовить к очередному занятию. Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся си-

стеме знаний. Неоднократное обращение к пройденному материалу является наиболее рациональной формой приобретения и закрепления знаний.

Методические рекомендации студентам по работе с литературой

В рабочей программе дисциплины для каждого раздела и темы дисциплины указывается основная и дополнительная литература, позволяющая более глубоко изучить данный вопрос. Обычно список всей рекомендуемой литературы преподаватель озвучивает на первой лекции или дает ссылки на ее местонахождение (на образовательном портале РГРТУ, на сайте кафедры и т. д.).

При работе с рекомендуемой литературой целесообразно придерживаться такой последовательности. Сначала лучше прочитать заданный текст в быстром темпе. Цель такого чтения заключается в том, чтобы создать общее представление об изучаемом материале, понять общий смысл прочитанного. Затем прочитать вторично, более медленно, чтобы в ходе чтения понять и запомнить смысл каждой фразы, каждого положения и вопроса в целом.

Чтение приносит пользу и становится продуктивным, когда сопровождается записями. Это может быть составление плана прочитанного текста, тезисы или выписки, конспектирование и др. Выбор вида записи зависит от характера изучаемого материала и целей работы с ним. Если содержание материала несложное, легко усваиваемое, можно ограничиться составлением плана. Если материал содержит новую и трудно усваиваемую информацию, целесообразно его законспектировать.

План – это схема прочитанного материала, перечень вопросов, отражающих структуру и последовательность материала.

Конспект – это систематизированное, логичное изложение материала источника. Различаются четыре типа конспектов:

- план-конспект – это развернутый детализированный план, в котором по наиболее сложным вопросам даются подробные пояснения,
- текстуальный конспект – это воспроизведение наиболее важных положений и фактов источника,
- свободный конспект – это четко и кратко изложенные основные положения в результате глубокого изучения материала, могут присутствовать выписки, цитаты, тезисы; часть материала может быть представлена планом,
- тематический конспект – составляется на основе изучения ряда источников и дает ответ по изучаемому вопросу.

В процессе изучения материала источника и составления конспекта нужно обязательно применять различные выделения, подзаголовки, создавая блочную

структуру конспекта. Это делает конспект легко воспринимаемым и удобным для работы.

Методические рекомендации студентам по подготовке к практическим занятиям

Практические занятия представляют особую форму сочетания теории и практики. Их назначение – углубление проработки теоретического материала предмета путем регулярной и планомерной самостоятельной работы студентов на протяжении всего курса. Процесс подготовки к практическим занятиям включает изучение нормативных документов, обязательной и дополнительной литературы по рассматриваемому вопросу.

Непосредственное проведение практического занятия предполагает, например:

- индивидуальные выступления студентов с сообщениями по какому-либо вопросу
  изучаемой темы;
- фронтальное обсуждение рассматриваемой проблемы, обобщения и выводы;
- решение задач и упражнений по образцу;
- решение вариантных задач и упражнений;
- решение ситуационных производственных (профессиональных) задач;
- проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной
  деятельности.
- выполнение контрольных работ;
- работу с тестами.

При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется: внимательно ознакомиться с тематикой практического занятия; прочесть конспект лекции по теме, изучить рекомендованную литературу; составить краткий план ответа на каждый вопрос практического занятия; проверить свои знания, отвечая на вопросы для самопроверки; если встретятся незнакомые термины, обязательно обратиться к словарю и зафиксировать их в тетради.

Все письменные задания выполнять в рабочей тетради. Практические занятия развивают у студентов навыки самостоятельной работы по решению конкретных задач.

Методические рекомендации студентам по подготовке к экзамену

При подготовке к экзамену студент должен повторно изучить конспекты лекций и рекомендованную литературу, просмотреть решения основных задач, решенных самостоятельно и на практических занятиях.

Необходимо помнить, что промежутки между очередными экзаменами обычно составляют всего несколько дней. Поэтому подготовку к ним нужно начинать заблаговременно в течение семестра. До наступления сессии уточните у преподавателя порядок проведения промежуточной аттестации по его предмету и формулировки критериев для количественной оценивания уровня подготовки студентов. Для итоговой положительной оценки по предмету необходимо разобрать решение задач, рассмотренных на практических занятиях, вовремя и с нужным качеством выполнить контрольные работы, так как всё это может являться обязательной частью учебного процесса по данной дисциплине.

Рекомендуется разработать план подготовки к каждому экзамену, в котором указать, какие вопросы или билеты нужно выучить, какие задачи решить за указанный в плане временной отрезок.

Также бывает полезно вначале изучить более сложные вопросы, а затем переходить к изучению более простых вопросов. При этом желательно в начале каждого следующего дня подготовки бегло освежить в памяти выученный ранее материал.

В период экзаменационной сессии организм студента работает в крайне напряженном режиме и для успешной сдачи сессии нужно не забывать о простых, но обязательных правилах:

- по возможности обеспечить достаточную изоляцию: не отвлекаться на разговоры с друзьями, просмотры телепередач, общение в социальных сетях;
- уделять достаточное время сну;
- отказаться от успокоительных. Здоровое волнение – это нормально. Лучше снимать волнение небольшими прогулками, самовнушением;
- внушать себе, что сессия – это не проблема. Это нормальный рабочий процесс. Не накручивайте себя, не создавайте трагедий в своей голове;
- помогите своему организму – обеспечьте ему полноценное питание, давайте ему периоды отдыха с переменой вида деятельности;
- следуйте плану подготовки.

Методические рекомендации студентам по проведению самостоятельной работы

Самостоятельная работа студента над учебным материалом является неотъемлемой частью учебного процесса в вузе.

В учебном процессе образовательного учреждения выделяются два вида самостоятельной работы:

1) аудиторная – выполняется на учебных занятиях, под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию), студентам могут быть предложены следующие виды заданий:

- выполнение самостоятельных работ;
- выполнение лабораторных работ;
- составление схем, диаграмм, заполнение таблиц;
- решение задач;
- работу со справочной, нормативной документацией и научной литературой; – защиту выполненных работ; – тестирование и т. д.

2) внеаудиторная – выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия, включает следующие виды деятельности.

- подготовку к аудиторным занятиям (теоретическим и лабораторным работам);
- изучение учебного материала, вынесенного на самостоятельную проработку: работа над определенными темами, разделами, вынесенными на самостоятельное изучение в соответствии с рабочими программами учебной дисциплины или профессионального модуля;
- выполнение домашних заданий разнообразного характера;
- выполнение индивидуальных заданий, направленных на развитие у студентов самостоятельности и инициативы;
- подготовку к практической работе, зачету, экзамену; – другие виды внеаудиторной самостоятельной работы.

Внеаудиторные самостоятельные работы представляют собой логическое продолжение аудиторных занятий, проводятся по заданию преподавателя, который инструктирует студентов и устанавливает сроки выполнения задания.

При планировании заданий для внеаудиторной самостоятельной работы используются следующие типы самостоятельной работы:

- воспроизводящая (репродуктивная), предполагающая алгоритмическую деятельность по образцу в аналогичной ситуации. Включает следующую

основную деятельность: самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы, прослушивание записанных лекций, заучивание, пересказ, запоминание, Internet–ресурсы, повторение учебного материала и др.

– реконструктивная, связанная с использованием накопленных знаний и известного способа действия в частично измененной ситуации, предполагает подготовку отчетов по лабораторным работам (выполнение предложенных практических заданий), подбор литературы по дисциплинарным проблемам, подготовка к защите лабораторных работ и др.

– эвристическая (частично-поисковая) и творческая, направленная на развитие способностей студентов к исследовательской деятельности.

Одной из важных форм самостоятельной работы студента является работа с литературой ко всем видам занятий. Самостоятельная работа студента с литературой позволяет ему более углубленно вникнуть в изучаемую тему.

Один из методов работы с литературой – повторение: прочитанный текст можно заучить наизусть. Простое повторение воздействует на память механически и поверхностно. Полученные таким путем сведения легко забываются.

Более эффективный метод – метод кодирования: прочитанный текст нужно подвергнуть большей, чем простое заучивание, обработке. Чтобы основательно обработать информацию и закодировать ее для хранения, важно провести целый ряд мыслительных операций: прокомментировать новые данные; оценить их значение; поставить вопросы; сопоставить полученные сведения с ранее известными. Для улучшения обработки информации очень важно устанавливать осмысленные связи, структурировать новые сведения.

Изучение научной, учебной и иной литературы требует ведения рабочих записей. Форма записей может быть весьма разнообразной: простой или развернутый план, тезисы, цитаты, конспект.

План – структура письменной работы, определяющая последовательность изложения материала. Он является наиболее краткой и потому самой доступной и распространенной формой записей содержания исходного источника информации. По существу, это перечень основных вопросов, рассматриваемых в источнике. План может быть простым и развернутым. Их отличие состоит в степени детализации содержания и, соответственно, в объеме.

Преимущество плана состоит в том, что план позволяет наилучшим образом уяснить логику мысли автора, упрощает понимание главных моментов произведения. Кроме того, он позволяет быстро и глубоко проникнуть в сущность построения произведения и, следовательно, гораздо легче ориентироваться в его содержании и быстрее обычного вспомнить прочитанное. С помощью плана гораздо удобнее отыскивать в источнике нужные места, факты, цитаты и т. д.

Выписки представляют собой небольшие фрагменты текста (неполные и полные предложения, отдельные абзацы, а также дословные и близкие к дословным записи об излагаемых в нем фактах), содержащие в себе основной смысл содержания прочитанного. Выписки представляют собой более сложную форму записи содержания исходного источника информации. По сути, выписки – не что иное, как цитаты, заимствованные из текста. Выписки позволяют в концентрированные форме и с максимальной точностью воспроизвести наиболее важные мысли автора. В отдельных случаях – когда это оправдано с точки зрения продолжения работы над текстом – вполне допустимо заменять цитирование изложением, близким дословному.

Тезисы – сжатое изложение содержания изученного материала в утвердительной (реже опровергающей) форме. Отличие тезисов от обычных выписок состоит в том, что тезисам присуща значительно более высокая степень концентрации материала. В тезисах отмечается преобладание выводов над общими рассуждениями. Записываются они близко к оригинальному тексту, т. е. без использования прямого цитирования.

Аннотация – краткое изложение основного содержания исходного источника информации, дающее о нем обобщенное представление. К написанию аннотаций прибегают в тех случаях, когда подлинная ценность и пригодность исходного источника информации исполнителю письменной работы окончательно неясна, но в то же время о нем необходимо оставить краткую запись с обобщающей характеристикой.

Резюме – краткая оценка изученного содержания исходного источника информации, полученная, прежде всего, на основе содержащихся в нем выводов. Резюме весьма сходно по своей сути с аннотацией. Однако, в отличие от последней, текст резюме концентрирует в себе данные не из основного содержания исходного источника информации, а из его заключительной части, прежде всего, выводов. Но, как и в случае с аннотацией, резюме излагается своими словами – выдержки из оригинального текста в нем практически не встречаются.

Конспект представляет собой сложную запись содержания исходного текста, включающая в себя заимствования (цитаты) наиболее примечательных мест в сочетании с планом источника, а также сжатый анализ записанного материала и выводы по нему.

При выполнении конспекта требуется внимательно прочитать текст, уточнить в справочной литературе непонятные слова и вынести справочные данные на поля конспекта. Нужно выделить главное, составить план. Затем следует кратко сформулировать основные положения текста, отметить аргументацию автора. Записи материала следует проводить, четко следуя пунктам плана и выражая мысль

своими словами. Цитаты должны быть записаны грамотно, учитывать лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля. Необходимо указывать библиографическое описание конспектируемого источника.

2. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

а) основная литература

1. Бубнов А.А., Бубнов С.А., Проказникова Е.Н. Вычислительная математика для программистов: в 3 ч. : учеб. пособие М.: КУРС, 2018, 141с.
2. Проказникова Е.Н., Бухенский К.В. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений : учеб. М.: КУРС, 2019, 192с.
3. Проказникова Е.Н., Бухенский К.В. Вычислительная математика для программистов: в 3 ч.: учеб. пособие. Ч.3. Практикум : Учебное пособие Рязань: КУРС, 2023, 190 с.

б) дополнительная литература

1. Боев В. Д., Сыпченко Р. П. Компьютерное моделирование Москва: Интернет- Университет Информационн ых Технологий (ИНТУИТ), 2016, 525 с.

Оператор ЭДО ООО "Компания "Тензор"

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

ПОДПИСАНО ЗАВЕДУЮЩИМ КАФЕДРЫ	**ФГБОУ ВО "РГРТУ", РГРТУ,** Овечкин Геннадий Владимирович, Заведующий кафедрой ВПМ	**07.10.26** 00:09 (MSK)	Простая подпись
ПОДПИСАНО ЗАВЕДУЮЩИМ ВЫПУСКАЮЩЕЙ КАФЕДРЫ	**ФГБОУ ВО "РГРТУ", РГРТУ,** Овечкин Геннадий Владимирович, Заведующий кафедрой ВПМ	**07.10.26** 00:09 (MSK)	Простая подпись