МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.Ф. УТКИНА»

Кафедра «Вычислительной и прикладной математики»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

дисциплины

«Методы оптимизации и теория принятия решений»

Специальность
09.05.01 «Применение и эксплуатация систем специального назначения»

Специализация
«Математическое программное и информационное обеспечение
вычислительной техники и автоматизированных систем»

Уровень подготовки
Специалитет

Квалификация выпускника – инженер

Форма обучения – очная

Рязань

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины
Рекомендации по планированию и организации времени, необходимого для изучения дисциплины. Описание последовательности действий студента («сценарий изучения дисциплины»)

Рекомендуется следующим образом организовать время, необходимое для изучения дисциплины.

Для освоения лекционного материала следует: изучить конспект лекции в тот же день, после лекции: 10 – 15 минут, повторно прочитать конспект лекции за день перед следующей лекцией: 10 – 15 минут. Также следует изучить теоретический лекционный материал по рекомендуемому учебнику/учебному пособию: 1 час в неделю.

Следует максимально использовать лекционное время для изучения дисциплины, понимания лекционного материала и написания конспекта лекций. В процессе лекционного занятия студент должен уметь выделять важные моменты и основные положения. При написании *конспекта лекций* следует придерживаться следующих правил и рекомендаций.

1. При ведении конспекта рекомендуется структурировать материал по разделам, главам, темам. Вести нумерацию формул. Выделять по каждой теме постановку задачи, основные положения, выводы. Кратко записывать те пояснения лектора, которые показались особенно важными. Это позволит при подготовке к сдаче зачёта и экзамена не запутаться в структуре лекционного материала.

2. Лекционный материал следует записывать в конспект лишь после того, как излагаемый лектором тезис будет вами дослушан до конца и понят.

3. При конспектировании следует отмечать непонятные, на данном этапе, положения, доказательства и пр.

4. Рекомендуется по каждой теме выразить свое мнение, комментарий, вывод.

Подготовка к практическим занятиям.

Практические занятия по дисциплине существенно дополняют лекции. В процессе анализа теоретических положений и решения практических задач студенты расширяют и углубляют свои знания, полученные из лекционного курса и учебников, приобретают умение применять общие закономерности к конкретным случаям. В процессе решения задач развивается логическое мышление и вырабатываются навыки вычислений, работы со справочной литературой. Практические занятия способствуют закреплению знаний и практических навыков, формированию конструктивного стиля мышления, расширению кругозора.

При подготовке к практическому занятию необходимо внимательно ознакомиться с соответствующим теоретическим материалом по конспекту лекций и рекомендуемому учебнику, затем изучить конспект или материалы предыдущего практического занятия и выполнить заданное расчетное задание: 1 – 2 часа в неделю.

Следует максимально использовать аудиторное время практических занятий. В процессе занятия студент должен активно участвовать в дискуссиях, обсуждениях и решениях практических задач и вести *конспект практических занятий* отдельно от конспекта лекций.

Дополнительно в часы самостоятельной работы студенты могут повторно решить задачи, с которыми они плохо освоились во время аудиторных занятий, и обязательно те задачи, которые не получились дома при предыдущей подготовке к практическим занятиям.

Подготовка к лабораторным работам.

Перед началом проведения лабораторной работы необходимо ознакомится с методическими указаниями к данной лабораторной работе, внимательно ознакомиться с заданием и желательно заранее выполнить подготовку проекта в используемой инструментальной среде, чтобы время лабораторного занятия использовать для исправления ошибок, модификации проекта и защиты данной работы.

Выполнение каждой из запланированных работ заканчивается предоставлением отчета. Требования к форме и содержанию отчета приведены в методических указаниях к лабораторным работам или определяются преподавателем на первом занятии. *Отчет по лабораторной работе* студент должен начать оформлять еще на этапе подготовки к ее выполнению. Допускаясь к лабораторной работе, каждый студент должен представить преподавателю «заготовку» отчета, содержащую: оформленный титульный лист или название и номер работы при ведении общего конспекта, цель работы, задание, проект решения, полученные результаты, выводы.

Изучение методических указаний к лабораторной работе – 2 часа перед выполнением лабораторной работы и в ходе разработки проекта и 2 часа для оформления отчета, отладки проекта и подготовки к сдаче работы.

После выполнения лабораторной работы необходимо согласовать полученные результаты с преподавателем. Важным этапом является *защита лабораторной работы*. В процессе защиты студент отвечает на вопросы преподавателя, касающиеся теоретического материала, относящегося к данной работе, и проекта, реализующего его задание, комментирует полученные в ходе работы результаты. При подготовке к защите лабораторной работы рекомендуется ознакомиться со списком вопросов по изучаемой теме и попытаться самостоятельно на них ответить, используя конспект лекций и рекомендуемую литературу. Кроме чтения учебной литературы рекомендуется активно использовать информационные ресурсы сети Интернет по изучаемой теме.

Подготовка к сдаче экзамена или зачета.

Экзамен/зачет – форма промежуточной проверки знаний, умений, навыков, степени освоения дисциплины. Главная задача экзамена/зачета состоит в том, чтобы у студента по окончанию изучения данной дисциплины сформировались определенное представление об общем содержании дисциплины, определенные теоретические знания и практические навыки, определенный кругозор. Готовясь к экзамену/зачету, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, на практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью.

Экзамены/зачеты дают возможность преподавателю определить теоретические знания студента и его практические навыки при решении определенных прикладных задач. Оцениваются: понимание и степень усвоения теоретического материала; степень знакомства с основной и дополнительно литературой, а также с современными публикациями; умение применить теорию к практике, решать определенные практические задачи данной предметной области, правильно проводить расчеты и т. д.; знакомство с историей данной науки; логика, структура и стиль ответа, умение защищать выдвигаемые положения.

Значение экзаменов/зачетов не ограничивается проверкой знаний, являясь естественным завершением обучения студента по данной дисциплине, они способствуют обобщению и закреплению знаний и умений, приведению их в стройную систему, а также устранению возникших в процессе обучения пробелов.

Подготовка к экзамену/зачету – это тщательное изучение и систематизация учебного материала, осмысление и запоминание теоретических положений, формулировок, формул, установление и осмысление внутрипредметных связей между различными темами и разделами дисциплины, закрепление теоретических знаний путем решения определенных задач.

Перед экзаменом назначается *консультация*, ее цель – дать ответы на вопросы, возникшие в ходе самостоятельной подготовки студента, студент имеет возможность получить ответ на все неясные ему вопросы, кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет способствовать повторению и закреплению знаний всех присутствующих. Преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те разделы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных разделах курса.

На непосредственную подготовку к экзамену обычно дается 3 – 5 дней. Этого времени достаточно для углубления, расширения и систематизации знаний, полученных в ходе обучения, на устранение пробелов в знании отдельных вопросов, для определения объема ответов на каждый из вопросов рабочей программы дисциплины.

Планируйте подготовку к зачету/экзамену, учитывая сразу несколько факторов: неоднородность в сложности учебного материала и степени его проработки в ходе обучения, свои индивидуальные способности. Рекомендуется делать перерывы в занятиях через каждые 50-60 минут на 10 минут. После 3-4 часов занятий следует сделать часовой перерыв. Чрезмерное утомление приведет к снижению тонуса интеллектуальной деятельности. Целесообразно разделять весь рабочий день на три рабочих периода – с утра до обеда, с обеда до ужина и с ужина до сна. Каждый рабочий период дня должен заканчиваться отдыхом не менее 1 часа. Работая в сессионном режиме, студент имеет возможность увеличить время занятий с 10 (как требовалось в семестре) до 12 часов в сутки.

Подготовку к экзаменам или зачетам следует начинать с общего планирования своей деятельности. С определения объема материала, подлежащего проработке, необходимо внимательно сверить свои конспекты с программой дисциплины, чтобы убедиться, все ли разделы отражены в лекциях, отсутствующие темы изучить по учебнику. Второй этап предусматривает системное изучение материала по данному предмету с обязательной записью всех выкладок, выводов, формул. На третьем этапе – этапе закрепления – полезно чередовать углубленное повторение особенно сложных вопросов с беглым повторением всего материала.

Рекомендации по работе с литературой

Теоретический материал курса становится более понятным, когда дополнительно к прослушиванию лекции и изучению конспекта изучаются и книги по данному предмету. Литературу по дисциплине рекомендуется читать как в бумажном, так и в электронном виде (если отсутствует бумажный аналог). Полезно использовать несколько учебников и пособий по дисциплине. Рекомендуется после изучения очередного параграфа ответить на несколько вопросов по данной теме. Кроме того, полезно мысленно задать себе следующие вопросы (и попробовать ответить на них): «о чем этот параграф?», «какие новые понятия введены, каков их смысл?», «зачем мне это нужно по специальности?».

Рекомендуется самостоятельно изучать материал, который еще не прочитан на лекции и не применялся на лабораторном или практическом занятии, тогда занятия будут гораздо понятнее. В течение недели рекомендуется выбрать время (1 час) для работы с литературой.

Метод градиентного спуска

Введение

В работе рассматривается задача поиска минимума функции $f(x)$:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, записываемая в виде:

(1)

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Пусть функция $f(x)$ такова, что можно вычислить ее градиент. Тогда можно применить метод градиентного спуска, описанный в данной статье.

В статье приведены теоремы сходимости метода градиентного спуска, а также рассмотрена его варианты:

- Метод градиентного спуска с постоянным шагом
- Метод градиентного спуска с дроблением шага
- Метод наискорейшего спуска

Метод градиентного спуска

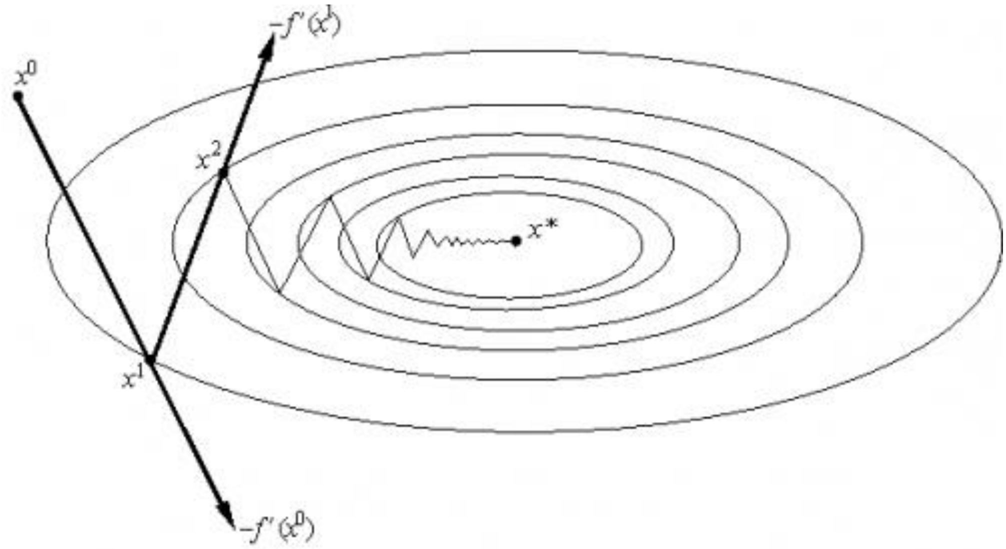

Рис.1 Геометрическая интерпретация метода градиентного спуска с постоянным шагом. На каждом шаге мы сдвигаемся по вектору антиградиента, "уменьшенному в λ раз".

Идея метода

Основная идея метода заключается в том, чтобы осуществлять оптимизацию в направлении наискорейшего спуска, а это направление задаётся антиградиентом $-\nabla f$:

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \lambda^{[k]} \nabla f(x^{[k]})$$

где $\lambda^{[k]}$ выбирается

- постоянной, в этом случае метод может расходиться;
- дробным шагом, т.е. длина шага в процессе спуска делится на некое число;
- наискорейшим спуском: $\lambda^{[k]} = \operatorname{argmin}_{\lambda} f(x^{[k]} - \lambda \nabla f(x^{[k]}))$

Алгоритм

Вход: функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Выход: найденная точка оптимума x

1. Повторять:
2. $x^{[k+1]} = x^{[k]} - \lambda^{[k]} \nabla f(x^{[k]})$, где $\lambda^{[k]}$ выбирается одним из описанных выше способов
3. если выполен критерий останова, то возвращаем текущее значение $x^{[k+1]}$

Критерий останова

Критерии остановки процесса приближенного нахождения минимума могут быть основаны на различных соображениях. Некоторые из них:

1. $\|x^{[k+1]} - x^{[k]}\| \leq \epsilon$
2. $\|f(x^{[k+1]}) - f(x^{[k]})\| \leq \epsilon$

Здесь $x^{[k]} \in \mathbb{R}^n$ - значение, полученное после k -го шага оптимизации. ϵ- наперед заданное положительное число.

Сходимость градиентного спуска с постоянным шагом

Теорема 1 о сходимости метода градиентного спуска спуска с постоянным шагом.

Пусть $\lambda^{[k]} = \lambda = const$, функция f дифференцируема, ограничена снизу. Пусть выполняется условие Липшица для градиента $f'(x)$: $\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x-y\|$. Пусть $0 < \lambda < 2/L$.

Тогда $\lim_{k \to \infty} f'(x^{[k]}) = 0, \ f(x^{[k+1]}) < f(x^{[k]})$ при любом выборе начального приближения.

В условиях теоремы градиентный метод обеспечивает сходимость $\{x^{[k]}\}$ либо к точной нижней грани $\inf_x f(x)$ (если функция $f(x)$ не имеет минимума) либо к значению

$f(x^*)$: $\lim_{k\to\infty} x^{[k]} = x^*;\ f'(x^*) = 0.$ Существуют примеры, когда в точке x^* реализуется седло, а не минимум. Тем не менее, на практике методы градиентного спуска обычно обходят седловые точки и находят локальные минимумы целевой функции.

Определение. Дифференцируемая функция f называется сильно выпуклой (с константой $\Lambda > 0$), если для любых x и y из $\mathbb{R}^n$ справедливо

$$f(x+y) \geq f(x) + \langle f'(x), y\rangle + \Lambda \|y\|^2/2.$$

Теорема 2 о сходимости метода градиентного спуска спуска с постоянным шагом.

Пусть функция f дифференцируема, сильно выпукла с константой Λ. Пусть выполняется условие Липшица для градиента $f'(x)$: $\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x-y\|$. Пусть $0 < \lambda < 2/L$.

Тогда при любом выборе начального приближения.

Выбор оптимального шага

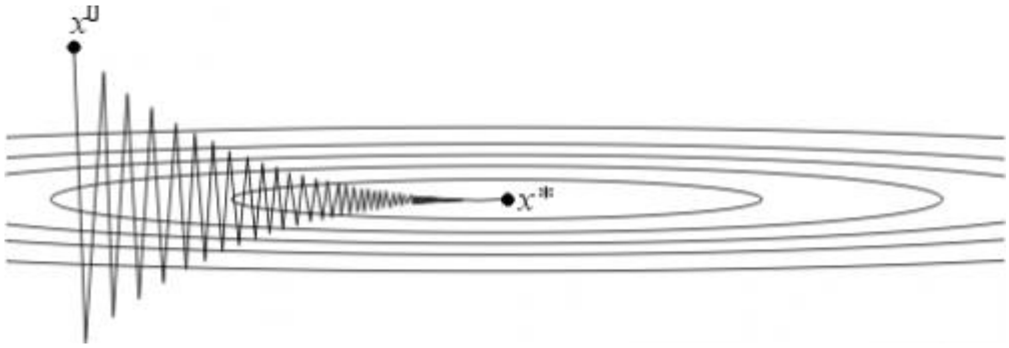

Рис.2 Ситуация, когда метод гардиентного спуска сходится плохо.

Константа q, фигурирующая в теореме 2 и характеризующая скорость сходимости метода, зависит от шага λ. Нетрудно видеть, что величина $q = q(\lambda) = \max\{|1-\lambda\Lambda|, |1-\lambda L|\}$ минимальна, если шаг λ выбирается из условия $|1-\lambda\Lambda| = |1-\lambda L|$, т. е. если $\lambda = \lambda^* = 2/(\Lambda + L)$.

При таком выборе шага оценка сходимости будет наилучшей и будет характеризоваться величиной:

$$q = q^* = \frac{L-\Lambda}{L+\Lambda}.$$

В качестве Λ и L могут выступать равномерные по x оценки сверху и снизу собственных значений оператора $f''(x)$. Если $\lambda << \Lambda$, то $q^* \approx 1$ и метод сходится очень медленно. Геометрически случай $\lambda << \Lambda$ соответствует функциям с сильно вытянутыми линиями уровня (см. рис. 2). Простейшим примером такой функции может служить функция на $\mathbb{R}^2$, задаваемая формулой:

$$f(x_1, x_2) = \Lambda x_1^2 + L x_2^2,\ \Lambda << L.$$

Поведение итераций градиентного метода для этой функции изображено на рис. 2 — они, быстро спустившись на "дно оврага", затем медленно "зигзагообразно" приближаются к точке минимума. Число $\mu = L/\lambda$ (характеризующее, грубо говоря, разброс собственных значений оператора $f''(x)$) называют числом обусловленности функции f. Если $\mu >> 1$, то функции называют плохо обусловленными или овражными. Для таких функций градиентный метод сходится медленно.

Но даже для хорошо обусловленных функций проблема выбора шага нетривиальна в силу отсутствия априорной информации о минимизируемой функции. Если шаг выбирается малым (чтобы гарантировать сходимость), то метод сходится медленно. Увеличение же шага (с целью ускорения сходимости) может привести к расходимости метода. Далее будут описаны два алгоритма автоматического выбора шага, позволяющие частично обойти указанные трудности.

Рекомендации программисту

При программировании методов градиентного спуска следует аккуратно относится к выбору параметров, а именно

- Метод градиентного спуска с постоянным шагом: шаг λ следует выбирать меньше 0.01, иначе метод расходится (метод может расходится и при таком шаге в зависимости от исследуемой функции).
- Градиентный метод с дроблением шага не очень чувствителен к выбору параметров. Один из вариантов выбора параметров: $\epsilon = 0.1,\ \delta = 0.95,\ \lambda^{[0]} = 1$
- Метод наискорейшего спуска: в качестве метода одномерной оптимизации можно использовать метод золотого сечения (когда он применим).

Заключение

Методы градиентного спуска являются достаточно мощным инструментом решения задач оптимизации. Главным недостатком методов является ограниченная область применимости.

Задания

Найти экстремумы функций

3.1 $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ $x = 6 - 6$

3.2 $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ $2x + y - 3 = 0$

3.3 $z = z = x^3 + y^3 - 15xy$ $x + 2y - 6 = 0$

3.4 $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ $2x + 4y - 12 = 0$

3.5 $z = (x-1)^2 + 2y^2$ $\qquad Z'_x = 2(x-1) \qquad x = 1$

3.6 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - yZ'_y = 4yy = 0$

3.7 $z = x^3 \cdot y^2(6 - x - y),\ (x > 0,\ y > 0)3x^2 - 15y = 0$

$$3y^2 - 15x = 0$$

$$y = \frac{3x^2}{15}$$

3.8 $z = \frac{1}{2}\,xy + (\,47 + x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$ $\qquad 3\frac{9x^4}{225} - \ 15x = 0$

3.9 $z = (x-1)^2 + 2y^2$

3.10 $z = x^2y(2 - x - y)\,; (x > 0, y > 0)$ $\qquad \frac{-8}{x^2} + 1 = 0$

$$x^2 - \ 8 = 2\sqrt{2}\,|-2\sqrt{2}$$

$$y = 1 \qquad y = \ -1$$

3.11 $z = y^2(1 - x - y)$

3.12 $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \qquad (x > 0, y > 0)$