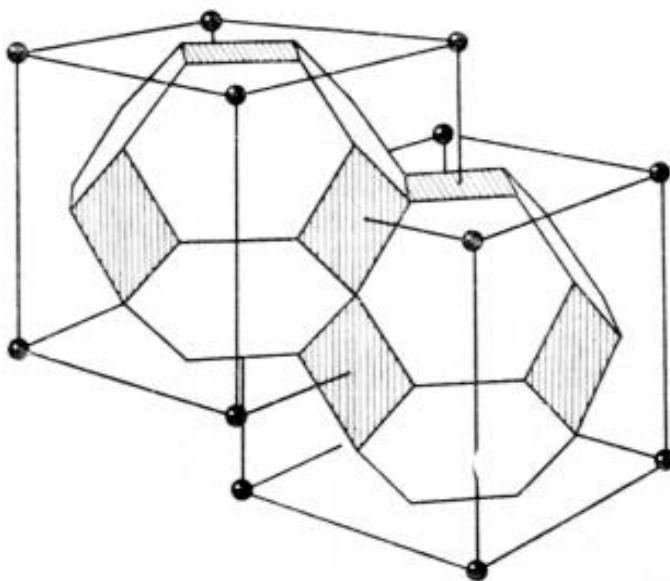


Федеральное агентство по образованию

Рязанский государственный радиотехнический университет

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания к практическим занятиям



УДК 539.2

Физика твердого тела: Методические указания к практическим занятиям / Рязан. гос. радиотехн. университет. Сост.: Т.А. Холомина. Рязань, 2006. 40 с.

Приведены задачи по основным разделам физики твердого тела, в ряде случаев содержащие методические указания по решению. Необходимые теоретические сведения содержатся в литературе, приведенной в библиографическом списке. Часть задач заимствована из сборников, указанных в библиографическом списке, остальные разработаны составителем.

Предназначены для аудиторной и самостоятельной работы студентов, изучающих дисциплину «Физика твердого тела».

Ил. 3. Библиогр.: 6 назв.

Кристаллическая решетка, уровень Ферми, собственные и примесные полупроводники, электроны, дырки, фононы, магнитные свойства, p-n-переход

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра биомедицинской и полупроводниковой электроники Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой С.П. Вихров)

Физика твердого тела

Составитель Х о л о м и н а Татьяна Андреевна

Редактор Н.А. Орлова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 06. Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,5.

Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.

1. СТРОЕНИЕ И СТРУКТУРА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1.1. Плоскость пересекает оси кубического кристалла в точках $3a$, $2a$, $2a$, где a - параметр элементарной ячейки. Найти индексы и символ Миллера этой плоскости.

1.2. Изобразить приблизительно плоскости (001) , (110) , $(1\bar{1}1)$, (111) в кристалле кубической сингонии.

1.3. Найти индексы и символы прямых AB , CD , KL , изображенных на рис. 1.1, а, б, в.

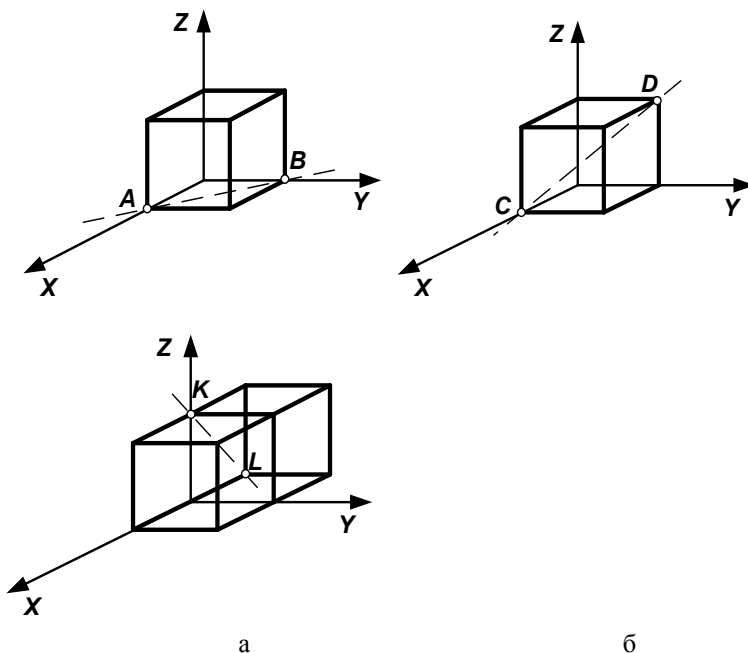


Рис. 1.1. К задаче 1.3

1.4. Написать индексы направления, проходящего через узлы $[[100]]$ и $[[001]]$ примитивной кубической решетки.

1.5. Написать индексы и символ направления, проходящего в кубической решетке через начало координат и узел с кристаллографическим символом, в двух случаях: 1) $[[242]]$; 2) $[[112]]$.

1.6. Написать индексы и символ направления, проходящего через два узла с кристаллографическими символами (в двух случаях): 1) $[[123]]$ и $[[321]]$; 2) $[[121]]$ и $[[201]]$.

1.7. Определить индексы и символ Миллера указанных на рис. 1.2 плоскостей.

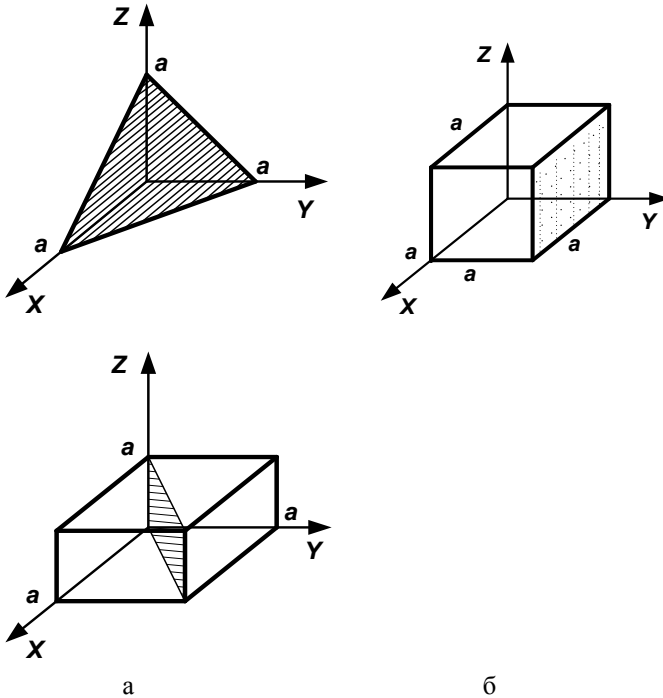


Рис.1.2. К задаче 1.7

1.8. Плоскость проходит через узлы $[[\bar{1}00]]$, $[[0\bar{1}0]]$ и $[[00\bar{1}]]$ кубической решетки. Написать индексы и символ Миллера для этой плоскости.

1.9. Определить индексы и символ Миллера указанных на рис. 1.3 плоскостей.

1.13. Найти символ грани кристалла $A'B'C'$, отсекающей на осях OX , OY и OZ отрезки, соответственно $1/4$, $\sqrt{3}/2$ и 2 см, если известно, что единичная грань ABC того же кристалла отсекает на тех же осях отрезки 1, $2\sqrt{3}$ и 4 см.

1.14. По известным символам Миллера следующих граней найти символы Миллера-Браве: (100) , $(0\bar{1}0)$, $(\bar{2}11)$, $(3\bar{2}1)$, $(\bar{1}\bar{2}0)$.

1.15. Даны отрезки, отсекаемые вертикальной гранью гексагонального кристалла на осях OX и OU , $OA=2$ и $OF=-3$. Определить символ грани.

1.16. Определить индексы и символы плоскостей, проходящих через две пространственных диагонали куба.

1.17. Определить символ оси зоны (ребра), образованной гранями додекаэдра (321) и (132) .

1.18. С помощью рентгеноструктурного анализа установлено, что кристалл шпинели $MgAlO_4$ имеет параметры: $a = b = c = 8,11 \text{ \AA}$. На кристалле наблюдаются грани (111) , $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(1\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}1)$ и грани, параллельные названным. Требуется:

- 1) изобразить общий вид кристалла (найти облик);
- 2) найти символ оси зоны, содержащей грани (111) и $(\bar{1}\bar{1}1)$;
- 3) найти условие принадлежности граней кристалла этой зоне;
- 4) определить, какие еще грани кристалла также принадлежат этой зоне;
- 5) изобразить проекцию решетки шпинели на плоскость (001) ;
- 6) провести след плоскости (110) и нормаль к этой плоскости, проходящую через начало координат; найти расстояние по нормали от начала координат до первой плоскости этого семейства, выраженное в ангстремах;
- 7) определить углы между соседними плоскостями.

1.19. У кристалла ромбической серы грань (hkl) лежит на пересечении осей зон $[\bar{2}30]$ и $[04\bar{1}]$. Были измерены следующие углы:

$51^{\circ}28'$ – между гранями (100) и (hkl) ;

$70^{\circ}18'$ – между гранями (010) и (hkl) .

Определить индексы и символ грани (hkl) , угол между (001) и (hkl) и осевые отрезки a и c , если $b = 12,94 \text{ \AA}$.

Указания к решению. Воспользовавшись законом Вейсса и тем, что сумма квадратов направляющих косинусов в системе ортогональных осей координат равна 1, т.е. $\cos^2\varphi + \cos^2\xi + \cos^2\chi = 1$, получим соотношение $h/a : k/b : l/c = \cos\varphi : \cos\xi : \cos\chi$.

1.20. Написать индексы и символ Миллера для плоскостей, содержащих узлы с кристаллографическими символами, в двух случаях: а) $[[111]]$, $[[1\bar{1}2]]$, $[[\bar{1}01]]$; б) $[[1\bar{1}1]]$, $[[010]]$, $[[\bar{1}\bar{1}1]]$. Найти отрезки, отсекаемые этими плоскостями на осях координат.

1.21. Определить, будут ли какие-либо из плоскостей семейства $\{111\}$ нормальны к каким-либо плоскостям семейства $\{011\}$. Привести примеры.

1.22. Вычислить угол ψ между двумя направлениями в кубической решетке кристалла, которые заданы кристаллографическими символами $[110]$ и $[111]$.

1.23. Система плоскостей примитивной кубической решетки задана символом $\{111\}$. Определить расстояние d между соседними плоскостями, если параметр (элементарная трансляция) a решетки равен $0,3 \text{ нм}$.

1.24. Определить параметр a примитивной кубической решетки, если межплоскостное расстояние d для системы плоскостей, заданных символом Миллера $\{212\}$, при рентгеноструктурном измерении оказалось равным $0,12 \text{ нм}$.

1.25. Три системы плоскостей в примитивной кубической решетке заданы символами Миллера: а) $\{111\}$; б) $\{110\}$; в) $\{100\}$. Указать, для какой системы межплоскостные расстояния d

минимальны и для какой системы – максимальны. Определить отношения межплоскостных расстояний.

1.26. Вычислить угол ψ между плоскостями в кубической решетке, заданными символами Миллера (111) и (111).

1.27. Две плоскости в кубической решетке заданы символами Миллера (010) и (011). Определить угол между плоскостями.

1.28. Направление прямой в кубической решетке задано символом Миллера [011]. Определить угол между этой прямой и плоскостью (111).

1.29. Определить угол между прямой [111] и плоскостью (111) в кубической решетке.

1.30. Плоскость в кубической решетке задана символом Миллера (011), а направление – символом [111]. Определить угол между прямой и плоскостью.

1.31. Найти угол между направлением [111] и плоскостью (111):

а) в кубическом кристалле;

б) в тетрагональном кристалле с трансляциями $a = 5,67 \text{ \AA}$, $c = 12,70 \text{ \AA}$.

1.32. В тетрагональном кристалле CuFeS_2 угол между плоскостями (111) и $(\bar{1} \bar{1} 1)$ равен $108^\circ 40'$. Вычислить: а) отношение трансляций a/c ; б) угол между осями зон [236] и [001].

1.33. Вычислить угол между плоскостями (100) и $(1 \bar{1} 0)$ в кремнии.

1.34. Вычислить минимальное расстояние между плоскостями $\{120\}$ в кремнии. Параметр элементарной ячейки равен $5,43 \text{ \AA}$.

1.35. Определить угол между плоскостями (110) и $(1 \bar{1} 2)$ в кремнии.

1.36. Вычислить для кубической решетки углы между направлением [123] и осями координат.

1.37. Определить угол между плоскостью (112) и направлением $[111]$ в кристалле тетрагональной сингонии, если $a = 2,5 \text{ \AA}$, $c = 3,6 \text{ \AA}$.

1.38. Найти угол между плоскостью (101) кристалла кубической сингонии и плоскостью, лежащей на пересечении осей зон $[101]$ и $[\bar{1}1\bar{1}]$.

1.39. Найти угол между плоскостью (320) кристалла кубической сингонии и плоскостью, лежащей на пересечении осей зон $[0\bar{1}2]$ и $[1\bar{1}0]$.

1.40. Вычислить угол между ребром, образованным при пересечении граней (210) и $(02\bar{1})$ кристалла кубической сингонии, и плоскостью (111).

1.41. Решетку типа алмаза можно рассматривать как комбинацию двух вставленных друг в друга и смещенных одна относительно другой на $1/4$ пространственной диагонали подрешеток со структурой ГЦК. У одной подрешетки начало координат лежит в точке с координатами 000, а у другой оно сдвинуто вдоль диагонали куба на четверть ее длины. Требуется: а) написать координаты всех атомов этой элементарной ячейки; б) определить число атомов, образующих эту элементарную ячейку.

1.42. Полиморфизмом называется свойство некоторых веществ существовать в нескольких кристаллических фазах, отличающихся по симметрии структуры и свойствам. Чистое железо при атмосферном давлении имеет следующие модификации:

$\alpha\text{-железо} \leftrightarrow \gamma\text{-железо} \leftrightarrow \delta\text{-железо}$

$\text{ОЦК} \leftrightarrow 910^\circ \text{C} \leftrightarrow \text{ГЦК} \leftrightarrow 1400^\circ \text{C} \leftrightarrow \text{ОЦК}$.

Рассчитать отношение плотностей железа в структурах α - и γ -железо при 910°C , исходя из равенства атомных радиусов обеих модификаций и свойства металлов иметь плотнейшую упаковку атомов.

1.43. Вывести математическое соотношение между параметром a и радиусом r несжимаемых шаров в следующих типах элементарных ячеек с плотнейшей упаковкой:

а) примитивная кубическая;

- б) объемно-центрированная кубическая (ОЦК);
- в) гранецентрированная кубическая (ГЦК);
- г) структура алмаза.

1.44. У каких плоскостей в структурах ГЦК и ОЦК наиболее высокая плотность упаковки атомов? В каких направлениях указанных структур линейная плотность расположения атомов максимальна?

1.45. Параметр кубической элементарной ячейки металла, содержащей два атома, согласно данным рентгеноструктурного анализа, составляет 3.16 Å. Плотность металла – 19,35 г/см³. Вычислить атомную массу элемента.

1.46. Вычислить число Авогадро исходя из следующих данных: плотность золота равна 19,3 г/см³, золото кристаллизуется в гранецентрированную кубическую элементарную ячейку с параметром 0,4 нм.

1.47. Сколько атомов приходится на одну элементарную ячейку: 1) примитивной решетки кубической сингонии; 2) объемно-центрированной решетки ромбической сингонии; 3) гранецентрированной решетки кубической сингонии; 4) базоцентрированной решетки ромбической сингонии; 5) примитивной решетки гексагональной сингонии; 6) гексагональной структуры с плотной упаковкой.

1.48. Определить число элементарных ячеек кристалла объемом 1 м³: 1) хлористого цезия (решетка ОЦК); 2) меди (решетка ГЦК); 3) кобальта, имеющего гексагональную структуру с плотнейшей упаковкой.

1.49. Изучение кристалла хлорида натрия с помощью рентгеноструктурного анализа показало, что он представляет собой гранецентрированную кубическую решетку с расстоянием между ионами натрия и хлора, равным 0,2814 нм. Плотность кристалла составляет 2,165 г/см³. Вычислить число Авогадро.

1.50. Определить период идентичности l вдоль прямой $[111]$ в решетке кристалла NaCl. Плотность указана в задаче 1.49.

1.51. Рассчитать следующие параметры структуры кремния:

1) число атомов, содержащихся в элементарной ячейке; 2) атомный радиус элемента, полагая что длина ребра элементарной ячейки кристалла составляет 0,356 нм; 3) число атомов кремния в 1 см^3 ; 4) концентрацию валентных электронов в 1 см^3 .

1.52. Длина ребра куба в элементарной ячейке кристалла алмаза составляет 0,356 нм. Найти расстояние между двумя ближайшими соседними атомами и концентрацию атомов в 1 см^3 .

1.53. Найти зависимость расстояния между двумя ближайшими атомами от параметра a для ГЦК и ОЦК элементарных ячеек.

1.54. Вычислить плотность кристалла неона (при 20 К), полагая, что его решетка гранецентрированная кубической сингонии. Постоянная a при той же температуре равна 0,356 нм.

1.55. Найти плотность кристалла стронция, если известно, что его решетка гранецентрированная кубической сингонии, а расстояние d между ближайшими соседними атомами равно 0,356 нм.

1.56. Определить относительную атомную массу кристалла, если известно, что расстояние d между ближайшими соседними атомами составляет 0,356 нм. Решетка кристалла ОЦК, плотность – 534 кг/м^3 .

1.57. Найти постоянную решетки a и расстояние между ближайшими соседними атомами кристалла d : 1) алюминия (решетка ГЦК); 2) вольфрама (решетка ОЦК).

1.58. Определить постоянные a и c решетки кристалла магния, который представляет собой гексагональную структуру с плотнейшей упаковкой. Плотность кристаллического магния равна $1,74\text{ г/см}^3$.

1.59. Вычислить постоянную a решетки кристалла бериллия, который представляет собой гексагональную структуру с плотнейшей упаковкой атомов. Параметр c решетки равен 0,359 нм, плотность составляет $1,82\text{ г/см}^3$.

1.60. Найти плотность кристалла гелия (при 2 К), который представляет собой гексагональную структуру с плотнейшей упаковкой. Постоянная решетки, определенная при той же температуре, равна 0,357 нм.

1.61. Зная плотность меди $8,9 \text{ г/см}^3$, вычислить параметр a ее кристаллической решетки.

1.62. Параметр кристаллической решетки меди равен 0,361 нм. Написать символ Миллера для системы плоскостей, плотность расположения атомов в которых максимальна. Вычислить эту плотность, выразив ее в количестве атомов, приходящихся на 1 см^2 .

1.63. Рассчитать теоретическую плотность кристалла NaCl , если постоянная элементарной ячейки составляет 0,5628 нм. В элементарную ячейку входят четыре иона натрия и четыре иона хлора.

1.64. В орторомбической структуре все ребра элементарной ячейки взаимно перпендикулярны, но не равны между собой по длине. Начертить плоскость (321) и направление $[321]$. Найти угол между направлением $[321]$ и нормалью к плоскости (321), если длины ребер элементарной ячейки относятся как 1 : 1 : 2.

1.65. Рассчитать «угол между связями» в структуре твердого германия.

1.66. Рентгеновские лучи с медного анода имеют длину волны $\lambda = 1,537 \text{ \AA}$. Попадая на кристалл алюминия, они вызывают дифракцию от плоскостей (111) под углом Вульфа-Брегга $\theta = 41,13^\circ$. Алюминий имеет структуру ГЦК, плотность $2,699 \text{ г/см}^3$, атомную массу – $26,98 \text{ г·моль}^{-1}$. По этим экспериментальным данным рассчитать число Авогадро (число атомов в 1 моле вещества).

1.67. Получена рентгенограмма вращения с монокристалла тетрагональной сингонии. Длина волны рентгеновского излучения равна $1,542 \text{ \AA}$; пучок рентгеновских лучей перпендикулярен к оси вращения, которая является осью этого кристалла. Радиус камеры 3 см, длина 10 см. На нулевой слоевой линии наблюдаются рефлексy на расстояниях 0,54; 0,75; 1,08; 1,19; 1,52; 1,63; 1,71 и 1,97 см от места выхода прямого пучка, т.е. от центра пленки. Расстояние первой слоевой линии от нулевой линии составляет 0,66 см.

Проиндцировать наблюдаемые на нулевой слоевой линии рефлексы, вычислить параметры элементарной ячейки кристалла и расстояние каждой наблюдаемой слоевой линии от нулевой линии рентгенограммы вращения.

1.68. Рентгенограмма металлического порошка получена в рентгеновской камере Дебая-Шерера на излучении молибдена K_α ($\lambda = 0,7107 \text{ \AA}$). Для первых шести наблюдаемых линий дебаевские углы θ оказались равными $7,35; 7,82; 8,33; 10,70; 12,80$ и $13,90^\circ$.

Определить тип кристаллической решетки и проиндцировать (найти символы) наблюдаемые линии. Вычислить атомную массу вещества, если его плотность составляет $1,74 \text{ г/см}^3$. Единицу атомной массы принять за $1,660 \cdot 10^{-24} \text{ г}$.

1.69. На дебаеграмме некоторого кубического кристалла, полученной на излучении меди K_α ($\lambda = 1,542 \text{ \AA}$), наблюдаются линии под углами Брегга θ : $12,3; 14,1; 20,2; 24,0; 25,1; 29,3; 32,2$ и $33,1^\circ$.

Определить символы плоскостей, которые вызвали появление указанных линий на дебаеграмме. Найти число структурных единиц в одной элементарной ячейке, выяснить, является ли эта решетка примитивной, гранецентрированной или объемно-центрированной, вычислить длину ребра ячейки. Плотность вещества равна $8,31 \text{ г/см}^3$, атомная масса составляет 312. Единицу атомной массы принять за $1,660 \cdot 10^{-24} \text{ г}$.

1.70. Электроны, подобно рентгеновским лучам, могут быть использованы для наблюдения дифракции в кристаллах. При какой энергии электронов они будут отражаться от плоскостей (100) кристалла с параметром решетки $4 \text{ \AA}$, если угол Вульфа-Брегга равен 45° ?

1.71. Через площадь кристалла 1 см^2 проходят 10^6 прямолинейных краевых дислокаций. На какое расстояние переместится каждая дислокация, если нагреть кристалл от 0 до 1000 К ? Энергия активации дислокации составляет 1 эВ , а постоянная решетки – $2 \text{ \AA}$.

2. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2.1. Пользуясь распределением Ферми-Дирака, рассчитать при $T = 300$ К вероятность заполнения электроном энергетического уровня, расположенного: 1) выше уровня Ферми на а) $0,1$ эВ, б) $1,0$ эВ; 2) ниже уровня Ферми на $0,1$ эВ.

2.2. Как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электроном энергетического уровня в металле, если уровень расположен на $0,1$ эВ ниже уровня Ферми и температура повысится от 200 до 300 К?

2.3. Определить температуру идеального газа, средняя энергия частиц которого равна средней энергии свободных электронов в металле при $T = 0$ К с уровнем Ферми, равным 6 эВ.

2.4. Найти разницу энергий (в единицах kT) электрона, энергия которого соответствует уровню Ферми, и электронов, находящихся на уровнях, вероятности заполнения которых равны $0,2$ и $0,8$.

2.5. Определить долю свободных электронов в металле при $T = 0$ К, энергия которых отличается от максимальной менее чем на 50 %.

2.6. Металлический образец объемом 1 см^3 находится при $T = 0$ К. Уровень Ферми соответствует 5 эВ. Найти концентрацию свободных электронов, импульс которых отличается от максимального не более чем на 10 %.

2.7. Определить температуру, при которой в твердом проводнике вероятность найти электрон с энергией выше уровня Ферми на $0,5$ эВ составляет 2 %.

2.8. На грань кристалла под углом 40° к плоскости поверхности падает параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью. Определить скорость электронов, если они испытывают интерференционное отражение первого порядка. Расстояние между атомными плоскостями кристалла составляет $2 \text{ \AA}$.

2.9. Найти долю тяжелых дырок в полной концентрации дырок собственного германия, приняв эффективную массу тяжелых дырок, равной $0,34 m_0$, а легких – $0,04 m_0$.

2.10. На сколько надо повысить температуру по сравнению с 300 К, чтобы концентрация свободных электронов в собственном германии увеличилась в 2 раза? Температурной зависимостью эффективной плотности состояний в этой задаче пренебречь.

2.11. Показать, что вероятность того, что состояние с энергией, превышающей уровень Ферми на величину ΔE , будет занято, в точности совпадает с вероятностью иметь свободное состояние, энергия которого меньше значения энергии Ферми на эту же величину ΔE .

2.12. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет около 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

2.13. В германии часть атомов замещена атомами сурьмы. Рассматривая электрон примесного атома, не участвующий в ковалентной связи, по модели Бора, оценить энергию его связи и эффективный радиус орбиты.

2.14. Вычислить вероятность нахождения электрона на уровнях $E_F + 0,1$ эВ и $E_F - 0,1$ эВ при температурах 0, 150, 300 и 1000 К. Результаты представить в форме таблицы и в виде графика.

2.15. Вычислить эффективную плотность состояний в зоне проводимости и в валентной зоне кремния при комнатной температуре. Считать, что эффективные массы носителей выражаются через массу электрона следующим образом: $m_n^* = 1,1 m_0$; $m_p^* = 0,56 m_0$.

2.16. Рассчитать эффективную плотность состояний в зоне проводимости германия при температурах 10 и 100 К.

2.17. Какова будет ошибка, если заменить распределение Ферми-Дирака распределением Максвелла-Больцмана при расчете вероятности заполнения энергетического уровня, лежащего выше уровня Ферми на $4 kT$, ниже на $2 kT$?

2.18. Ширина запрещенной зоны чистого полупроводника составляет 1 эВ. Вычислить вероятность заполнения электроном уровня вблизи дна зоны проводимости при температурах 0 и 290 К.

2.19. Оценить величину неопределенности в измерении значения импульса частицы массой в 1 г, положение центра которой ограничено областью пространства диаметром 10^{-6} м. Чему равна минимальная энергия, которой могла бы обладать такая частица?

2.20. Рассматривая движение частицы в трехмерном потенциальном ящике, получить выражение для расчета числа состояний, энергии которых меньше некоторой заданной E^* . Указать n и e . Необходимо в k -пространстве построить сферу радиусом E^* и найти число возможных значений k внутри одного октанта этой сферы.

2.21. Вычислить значение энергии Ферми при температуре абсолютного нуля для валентных электронов натрия и лития. Почему значение энергии Ферми не зависит от размера образца металла? Эффективную массу электрона принять равной массе покоя.

2.22. Энергия электрона в валентной зоне гипотетического металла или с примитивной кубической решеткой имеет вид: $E = Ak^2 + B$, где $A = 10^{-38}$ Дж·м², $B = -12$ эВ, $k = 2\pi/\lambda$. Энергия ионизации свободного атома составляет 1 эВ, валентная зона является p -зоной и состояния вплоть до $ka = (2\pi^2)^{1/3}$ заполнены (a – параметр ребра кристалла, равный 2 Å). Вычислить: а) отношение m^*/m ; б) число валентных электронов, приходящихся на один атом металла.

3. РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В СОБСТВЕННЫХ И ПРИМЕСНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ. ЗАКОН ДЕЙСТВУЮЩИХ МАСС

3.1. Во сколько раз и как изменится концентрация электронов в беспримесном кремнии при его нагревании от 300 до 350 К?

3.2. Во сколько раз и как изменится концентрация дырок в собственном германии при охлаждении его от 300 до 200 К?

3.3. При температуре 300 К концентрация электронов в собственном полупроводнике составляла $2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, а при 350 К увеличилась до $6,4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Определить ширину запрещенной зоны материала без учета температурной зависимости эффективной плотности состояний в разрешенных зонах.

3.4. В германии *n*-типа концентрация донорной примеси составляет 10^{18} см^{-3} . Считая, что все атомы примеси ионизированы, найти концентрацию дырок при температуре 300 К.

3.5. Кристалл кремния содержит в качестве легирующей примеси 10^{-4} атомных процента мышьяка. Затем он равномерно легируется примесью фосфора с концентрацией $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и после этого равномерно легируется примесью бора с концентрацией 10^{18} см^{-3} . Последующий отжиг полностью активирует все примеси. Определить: а) какой тип проводимости будет иметь образец кремния; б) чему будет равна результирующая концентрация основных и неосновных носителей заряда. Концентрация атомов кремния составляет $5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

3.6. Определить концентрацию электронов и дырок в германии при 300 К для двух случаев: 1) полупроводник легирован примесью мышьяка с концентрацией 10^{17} см^{-3} ; 2) полупроводник легирован примесями мышьяка с концентрацией 10^{18} см^{-3} и индия с концентрацией $3,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Считать, что все атомы примесей ионизированы.

3.7. В кремнии содержится $2 \cdot 10^{-5}$ атомных процента примеси фосфора. Считая, что концентрация электронов определяется полностью ионизированными атомами донорной примеси, определить концентрацию электронов и дырок, а также удельное сопротивление полупроводника. Концентрация атомов в кристалле составляет $5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

3.8. Вычислить удельное сопротивление германия *p*-типа с концентрацией дырок, равной $3 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$. Сравнить полученное значение с удельным сопротивлением германия *n*-типа при той же концентрации электронов.

3.9. Найти удельное сопротивление собственного кремния при температуре 300 К. Вычислить удельное сопротивление того же полупроводника после введения донорной примеси с концентрацией $3,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

3.10. Вычислить концентрацию дырок в германии, содержащем 10^{15} см^{-3} примеси фосфора и $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ примеси бора при комнатной температуре.

3.11. Образец полупроводника *n*-типа находится в состоянии термодинамического равновесия при комнатной температуре и характеризуется следующими параметрами: удельное сопротивление равно $5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$; подвижность электронов $1600 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$; подвижность дырок $600 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$; собственная концентрация носителей заряда $1,4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$; эффективная плотность состояний в зоне проводимости 10^{19} см^{-3} . Определить: а) концентрации электронов и дырок; б) положение уровня Ферми; в) вероятность событий, состоящих в том, что донорный уровень занят и свободен, если $E_C - E_D = 0,05 \text{ эВ}$.

3.12. Определить вероятность занятости уровня с энергией на $0,063 \text{ эВ}$ превосходящей уровень Ферми в беспримесном кремнии при температуре 1000 К.

3.13. Подсчитать число электронов на единицу объема в зоне проводимости собственного кремния при температуре 300 К.

4. ЗАВИСИМОСТЬ КОНЦЕНТРАЦИИ СВОБОДНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА И ПОЛОЖЕНИЯ УРОВНЯ ФЕРМИ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

4.1. Рассчитать положение уровня Ферми в германии электронного типа проводимости при температуре 300 К и концентрации донорной примеси: а) 10^{15} ; б) 10^{17} см^{-3} . Изобразить зонные диаграммы.

4.2. Найти положение уровня Ферми в кремнии при температуре 500 К и следующих концентрациях примесей: 1) 10^{23} атомов бора в 1 м^3 ; 2) 10^{22} атомов сурьмы в 1 м^3 . Энергии ионизации примесей: $\Delta E_{In}=0,041 \text{ эВ}$; $\Delta E_{Sb}=0,039 \text{ эВ}$. Изобразить зонные диаграммы.

4.3. Найти равновесную концентрацию электронов и дырок, а также положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны и дна зоны проводимости в кремнии, содержащем $8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ атомов мышьяка и $2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ атомов бора. Энергии ионизации примесей: $\Delta E_{As}=0,054 \text{ эВ}$; $\Delta E_B=0,045 \text{ эВ}$. Изобразить зонную диаграмму полупроводника в масштабе.

4.4. Найти концентрации электронов и дырок, а также положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны в германии, находящемся в состоянии термодинамического равновесия, при следующих значениях температуры: 0, 100, 200, 300 и 400 К. Кристалл легирован акцепторными атомами с концентрацией 10^{15} см^{-3} . Считать, что при $T=100 \text{ К}$ ионизированы 50 %, а при более высоких температурах – 100 % примесных атомов. Изобразить зонные диаграммы.

4.5. Определить энергию ионизации донорной примеси в кремнии с удельным сопротивлением, равным $5000 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, полагая, что при температуре $T=200 \text{ К}$ ионизировано 60 % донорной примеси.

4.6. Концентрация атомов в кристалле германия равна $4,4 \cdot 10^{28} \text{ см}^{-3}$, $E_C-E_D=0,01 \text{ эВ}$. Определить положение уровня Ферми при температуре 300 К, если на 10^6 атомов германия приходится 1 атом примеси. Изобразить зонную диаграмму в масштабе.

4.7. Найти положение уровня Ферми в германии, содержащем 10^{23} атомов мышьяка и $5 \cdot 10^{22}$ атомов галлия в 1 м^3 при температурах 10 и 300 К. Донорный уровень мышьяка расположен на 0,013 эВ ниже дна зоны проводимости. Изобразить зонные диаграммы полупроводника при указанных температурах.

4.8. В кристалле кремния на каждые 10^8 атомов полупроводника приходится 1 атом акцепторной примеси. Найти положение уровня Ферми относительно потолка валентной зоны при

комнатной температуре. Решить задачу при условии, что на каждые 10^3 атомов кремния приходится 1 атом акцепторной примеси. При какой концентрации акцепторной примеси уровень Ферми совпадает с потолком валентной зоны?

4.9. Определить положение уровня Ферми при комнатной температуре для полупроводникового соединения $InSb$, если ширина его запрещенной зоны составляет 0,4 эВ, а отношение эффективной массы дырки к эффективной массе электрона равно 2. Изобразить зонную диаграмму собственного полупроводника.

4.10. Образец кремния электронного типа проводимости имеет при комнатной температуре удельное сопротивление, равное 5 Ом·см. Найти для состояния термодинамического равновесия концентрацию дырок при температурах 27, 100 и 500 °С.

4.11. Кристалл кремния электронного типа проводимости равномерно легирован примесью мышьяка с концентрацией 10^{16} см^{-3} , а кристалл кремния дырочного типа проводимости равномерно легирован примесью бора с концентрацией 10^{15} см^{-3} . Для каждого образца полупроводникового материала определить:

а) равновесную концентрацию неосновных носителей заряда при 300 К, предполагая, что все примеси полностью ионизированы;

б) положение уровня Ферми относительно края валентной зоны в каждом материале при 300 К; положение уровня Ферми при условии, что оба типа примесей имеются в одном образце;

в) температуру, при которой ионизирована половина примесных атомов;

г) температуру, при которой собственная концентрация превышает примесную в 10 раз. Для задания б) изобразить зонные диаграммы.

4.12. Рассчитать значения максимума уровня Ферми в запрещенной зоне полупроводника и соответствующей ему температуры при концентрации донорной примеси, равной 10^{16} см^{-3} ; энергии ионизации доноров, равной 0,02 эВ и $m_n^* = 0,3m_0$.

4.13. Определить критическую концентрацию донорной примеси, выше которой наступает вырождение полупроводника при $m_n^* = 0,2m_0$; $\Delta E_D = 0,01 \text{ эВ}$.

4.14. Найти концентрации электронов и дырок, а также положение уровня Ферми для германия, содержащего $5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ атомов мышьяка при 40 и 500 К. Энергия ионизации примеси составляет 0,013 эВ. Изобразить зонные диаграммы.

4.15. При температуре 300 К удельное сопротивление беспримесного полупроводника составляло 10 Ом·м, а при 400 К оказалось равным 0,3 Ом·м. Найти ширину запрещенной зоны материала.

4.16. Во сколько раз и как изменится концентрация дырок в собственном германии при его охлаждении от 300 до 200 К?

4.17. При комнатной температуре концентрация дырок в полупроводнике равна 10^{14} см^{-3} , а концентрация электронов - $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Во сколько раз и как изменится удельное сопротивление кристалла, если провести дополнительное легирование акцепторной примесью с концентрацией $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$? Считать примеси полностью ионизированными, подвижности электронов и дырок – равными. Изобразить зонные диаграммы полупроводника до и после дополнительного легирования.

4.18. Рассчитать положение уровня Ферми в собственном кремнии при 700 К, если эффективная масса электрона в 5 раз больше эффективной массы дырки. Изобразить зонную диаграмму.

4.19. Какова ширина запрещенной зоны беспримесного полупроводника, если после нагревания от 100 до 400 К его электропроводность увеличилась в 820 раз?

4.20. В вырожденном полупроводнике концентрация свободных электронов равна $8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Найти положение уровня Ферми, приняв $m_n^* = 0.33m_0$. Изобразить зонную диаграмму.

4.21. Найти температуру, при которой уровень Ферми занимает максимальное положение в полупроводнике электронного типа проводимости с концентрацией донорной примеси 10^{19} см^{-3} , если эффективная масса электрона составляет половину массы покоя.

4.22. Найти число атомов пятивалентной примеси на единицу объема кремния, необходимое для сдвига уровня Ферми к дну зоны проводимости при комнатной температуре.

4.23. При какой концентрации свободных электронов в кристалле температура вырождения электронного газа в нем равна 0 °С?

5. КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

5.1. Вычислить ширину запрещенной зоны теллура, если после нагревания от 300 до 400 К его электропроводность увеличилась в 5,2 раза.

5.2. Образец кремния находится при комнатной температуре. Вычислить: а) удельное сопротивление собственного полупроводника; б) удельное сопротивление примесного полупроводника, если концентрация донорных атомов составляет $3,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

5.3. К пластине длиной 5 см, изготовленной из чистого кремния, приложено напряжение 50 В. За какое время электрон пройдет через весь образец (осуществится перенос заряда, эквивалентного одному электрону)?

5.4. Вычислить скорость дрейфа электронов и дырок в германии при комнатной температуре в поле напряженностью 1000 В/м.

5.5. Кристалл кремния электронного типа проводимости при комнатной температуре имеет удельное сопротивление 10 Ом·см. Найти скорость дрейфа дырок и электронов при плотности тока 1 мА/см².

5.6. Вычислить отношение дрейфовых токов электронов и дырок при комнатной температуре: а) для собственного германия; б) собственного кремния; в) кремния n-типа с удельным сопротивлением 5 Ом·см; г) кремния p-типа с удельным сопротивлением 5 Ом·см.

5.7. Полупроводниковый кристалл прямоугольной формы размерами 0,2х0,2х0,05 см содержит 10^{21} свободных электронов в 1 м³

при комнатной температуре. К двум противоположным узким граням приложено напряжение 20 В. Вычислить величину тока, полагая подвижность носителей заряда, равной $0,03 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$.

5.8. В образце полупроводника действуют два механизма рассеяния носителей заряда. Если бы действовал только первый механизм, то подвижность была бы равна $800 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Если бы действовал только второй механизм, то подвижность была бы равна $200 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Какова подвижность носителей заряда с учетом обоих механизмов рассеяния?

5.9. Беспримесный кремний при комнатной температуре имеет удельное сопротивление, равное $2000 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Рассчитать концентрации носителей заряда. Найти, какую часть электропроводности составляет электронная.

5.10. Найти минимально возможную удельную электропроводность кремния при комнатной температуре. Рассчитать концентрации электронов и дырок для найденного значения удельной электропроводности.

5.11. Вычислить отношение полного тока электронной проводимости к полному току дырочной проводимости: а) в чистом германии; б) в германии *p*-типа с удельным сопротивлением $0,005 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

5.12. Удельное сопротивление образца кремния электронного типа проводимости составляет $7500 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ при температуре 50 К , а концентрация донорных атомов равна $5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Рассчитать энергию ионизации донорной примеси, если известно, что указанная температура соответствует участку примесной проводимости полупроводника.

5.13. Представим себе атомы в кристалле шариками, связанными между собой пружинами. Пусть атом меди на пружине, обладающей коэффициентом жесткости, эквивалентным частоте колебаний 10^{13} с^{-1} , находится в положении максимального удаления от связанного с ним другого атома меди. Найти значение «нулевой» амплитуды колебаний. Из условия задачи следует, что атомы в реальном кристалле никогда не находятся точно в узлах решетки даже

при нулевой температуре, а участвуют в случайных движениях, источником которых является действие принципа неопределенности.

5.14. Исходя из условия предыдущей задачи, найти соотношение между коэффициентом жесткости пружины и массой атома, такое, чтобы амплитуда «нулевых колебаний» была по порядку величины равна параметру кристаллической решетки $4\text{ \AA}$. Твердое тело такого рода не сможет сохранять свою решеточную структуру и даже при температуре абсолютного нуля останется в жидком состоянии. К числу таких веществ, по-видимому относится гелий. Атомы гелия обладают малой массой, сила химической связи между атомами слаба; даже при температурах, близких к абсолютному нулю, амплитуда «нулевых колебаний» близка по величине к расстоянию между атомами.

5.15. Для образца твердого тела длиной L фонон с наибольшей длиной волны $\lambda_{\text{макс}}$ определяется соотношением $\lambda_{\text{макс}} = 2L$. У фонона с самой короткой длиной волны ее значение определяется как $\lambda_{\text{мин}} = c/v$, где c – скорость звука в твердом теле, v – эйнштейновская частота колебаний кристаллической решетки. Рассчитать приближенное значение минимальной длины волны для типичного металла. Сравнить найденное значение со средним межатомным расстоянием в твердом теле, приблизительно равным $3\text{ \AA}$.

5.16. Оценить максимальные значения энергии и импульса фонона в образце меди с параметром элементарной ячейки $a = 30\text{ нм}$, при скорости распространения колебаний кристаллической решетки, равной 4 км/с .

5.17. Определить усредненную скорость звука в кристалле, характеристическая температура которого равна 300 К . Межатомное расстояние в кристалле равно 25 нм .

5.18. Определить приближенно скорость звука в кристалле алмаза, зная, что дебаевская температура алмаза равна 1860 К , а среднее расстояние между атомами составляет $1,54\text{ \AA}$.

5.19. Показать, что при высоких температурах квантовое выражение для средней энергии гармонического осциллятора переходит в классическое.

5.20. Найти и выразить в электрон-вольтах энергию фонона, соответствующую максимальной частоте Дебая, если характеристическая температура равна 250 К.

5.21. Определить квазиимпульс фонона, соответствующего частоте $\omega = 0,1\omega_{\max}$, где $\omega_{\max}$ – максимальная частота колебаний кристаллической решетки. Усредненная скорость звука в кристалле равна 1380 м/с, температура Дебая соответствует 100 К. Дисперсией звуковых волн в кристалле пренебречь.

5.22. Длина волны фонона, соответствующего $\omega = 0,01\omega_{\max}$, равна 52 нм. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить характеристическую температуру Дебая, если усредненная скорость звука в кристалле равна 4,8 км/с.

5.23. Вычислить усредненную скорость фононов (скорость звука) в серебре. Известны: модуль продольной упругости (модуль Юнга) $E = 74$ ГПа; модуль поперечной упругости (модуль сдвига) $G = 27$ ГПа; плотность серебра $\rho = 10,5$ г/см³.

5.24. Характеристическая температура золота равна 170 К, плотность – 19,3 г/см³, параметр кристаллической решетки – 30 нм. Определить модуль продольной упругости кристалла (модуль Юнга).

5.25. Среднее время жизни электрона в образце германия электронного типа проводимости составляет при комнатной температуре 10^{-12} с. Определить, насколько увеличится кинетическая энергия электрона за время свободного пролета в электрическом поле напряженностью 10^5 В/м. Какова напряженность электрического поля, необходимая для того, чтобы за время свободного пролета электрона в этом поле сообщить ему кинетическую энергию, достаточную, чтобы «выбить» электрон: а) с донорного уровня; б) из валентной зоны и «перебросить» его в зону проводимости. Для простоты принять эффективную массу электрона равной массе покоя.

5.26. Определить максимальную частоту собственных колебаний атомов в кристалле золота.

5.27. Оценить скорость распространения акустических колебаний в кристаллической решетке алюминия, характеристическая температура которого составляет 396 К.

5.28. Классическая теория дает значение удельной теплоемкости, равное 6 кал/моль·К. Используя это значение рассчитать тепловую энергию одного моля металла при 300 К.

5.29. Дебаевская температура для золота составляет примерно 170 К. Оценить значение тепловой энергии одного моля золота при 300 К и сравнить с результатом, полученным в предыдущей задаче. Какова величина ошибки при расчете по классической теории?

5.30. Определить характеристическую температуру кристалла, теплоемкость которого составляет 217 Дж/кмоль·град при температуре 14 К.

5.31. Удельные теплоемкости свинца и алюминия при постоянном объеме и температуре, равной 20 °С, составляют 126 и 896 Дж/кг·град соответственно. Выполняется ли для указанных твердых тел закон Дюлонга-Пти? Вычислить для каждого из металлов молярные теплоемкости и сравнить их со значениями, получаемыми по закону Дюлонга-Пти.

5.32. Найти частоту тепловых колебаний атомов серебра по модели Эйнштейна, если характеристическая температура кристалла составляет 165 К.

5.33. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если при вычислении молярной теплоемкости кристалла вместо значения, даваемого моделью Эйнштейна при характеристической температуре, воспользоваться значением, получаемым по закону Дюлонга-Пти.

5.34. Молярная теплоемкость кристалла с одномерной решеткой выражается формулой

$$C_M = 3R \left(2 \frac{T}{T_D} \int_0^{T_D/T} \frac{x dx}{e^x - 1} - \frac{T_D/T}{e^{T_D/T} - 1} \right).$$

Найти предельное выражение для C_M при низких температурах ($T \ll T_D$). Известно значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi}{6}.$$

5.35. Молярная теплоемкость кристалла с двумерной решеткой выражается формулой:

$$C_M = 3R \left(6 \left(\frac{T}{T_D} \right)^2 \int_0^{T_D/T} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} - \frac{2(T_D/T)}{e^{T_D/T} - 1} \right).$$

Найти предельное выражение молярной теплоемкости кристалла при низких температурах ($T \ll T_D$). Известно значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2,405.$$

5.36. Определить относительную погрешность, которая будет допущена при вычислении теплоемкости кристалла, если вместо значения, вычисленного в соответствии с моделью Дебая при характеристической температуре, воспользоваться значением, полученным по закону Дюлонга-Пти.

5.37. Теплоемкость серебра при 10 К составляет 199 Дж/моль·град. Определить характеристическую температуру.

5.38. Найти максимальную частоту собственных колебаний атомов в кристалле железа, если при температуре 20 К его удельная теплоемкость равна 2,7 мДж/г·град.

5.39. Вычислить электронную теплоемкость $C_{эл}$ для меди при 2 и 1000 К. Полученные значения сравнить с теплоемкостью кристаллической решетки при тех же температурах. Характеристическая температура меди равна 316 К.

Примечание. Электронная теплоемкость металла $C_{эл} = \gamma T$, где γ – коэффициент пропорциональности. Для меди $\gamma = 7,28$ Дж/моль·град².

5.40. Вычислить максимальную частоту колебаний кристаллической решетки твердого тела, если известно, что при температуре 20 К его молярная теплоемкость равна $1,7 \text{ Дж/моль}\cdot\text{град}$.

5.41. Рассматривая кристалл как сосуд, содержащий фононный газ, и используя приближения теории теплоемкости Дебая, показать, что для температур, значительно превышающих температуру Дебая, число акустических фононов в единице объема составляет $9NT/2T_D$ (где N – число атомов решетки в единице объема, T_D – температура Дебая).

5.42. Для твердых тел, в которых рассеяние на акустических фононах является основным механизмом рассеяния, показать, что при температурах, превышающих температуру Дебая, подвижность электронов (а значит, для постоянной концентрации носителей и электропроводность) должна быть пропорциональна T^{-1} в металлах и $T^{-3/2}$ в полупроводниках.

5.43. Полагая, что рассеяние происходит на акустических колебаниях кристаллической решетки, найти величину термо-э.д.с. в германии, содержащем $6 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ мелких акцепторов, при температуре 200 К. Энергия ионизации примеси составляет 0,01 эВ.

5.44. Коэффициент термо-э.д.с. пары хромель (90 % Ni + 10 % Cr) – копель (44 % Ni + 56 % Cu) равен 80 мкВ/К. Определить ЭДС термопары при разности температур горячего и холодного спаев, равной 400 К.

5.45. Коэффициент термо-э.д.с. пары железо- золото составляет 62 мкВ/К. Определить отношение концентраций свободных электронов в этих металлах.

5.46. Концентрация электронов проводимости в меди в 1,7 выше, чем в константане (60 % Cu + 40 % Ni). Определить коэффициент термо-э.д.с. пары медь-константан.

5.47. Оценить величину «фононной» термо-э.д.с. ЭДС в германии n -типа при температуре 20 К, полагая, что подвижность электронов в основном определяется рассеянием на акустических колебаниях кристаллической решетки и равна $4 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, а

рассеяние фононов происходит на стенках образца. Поперечный размер образца составляет 1 мм, а скорость звука $5 \cdot 10^5$ см/с.

5.48. Образец германия электронного типа проводимости толщиной 1 мм с концентрацией электронов 10^{20} м^{-3} помещен в магнитное поле с индукцией 0,1 Тл. Определить величину э.д.с. Холла при токе 1 мА, протекающем через образец.

5.49. Удельная электропроводность и коэффициент Холла арсенида индия соответственно равны $4 \cdot 10^2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ и $10^{-2} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Считая, что проводимость осуществляется зарядами одного знака, определить их концентрацию и подвижность.

5.50. Удельное сопротивление монокристалла кремния дырочного типа проводимости при комнатной температуре составляет $9 \cdot 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, подвижность дырок равна $0,04 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$. Найти значение коэффициента Холла.

5.51. К образцу полупроводникового материала приложено магнитное поле с индукцией 0,5 Тл. Коэффициент Холла и удельное сопротивление полупроводника соответственно равны $-3,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$ и $8,93 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Найти угол Холла.

5.52. Вычислить коэффициент Холла для кристалла германия, содержащего 10^{23} м^{-3} атомов индия и 10^{24} м^{-3} атомов сурьмы при комнатной температуре.

5.53. Имеется образец германия с поперечным сечением $0,1 \times 0,2 \text{ см}$ и концентрацией легирующей примеси, равной 10^{17} см^{-3} . Вдоль образца протекает ток 0,6 А. Перпендикулярно к направлению тока действует магнитное поле с индукцией 0,5 Тл. Вычислить напряжение Холла между контактами к узким сторонам боковой поверхности образца.

5.54. В эксперименте по изучению эффекта Холла кремниевый образец имеет длину 1,0 см, толщину 0,1 см, расстояние между холловскими электродами 0,2 см. Вдоль образца приложено напряжение 0,245 В, значение протекающего тока – 5 мА, индукция магнитного поля – 1 Тл. Величина напряжения Холла оказалась равной 2 мВ. Полагая, что рассеяние носителей заряда осуществляется тепловыми колебаниями кристаллической решетки, определить: а) тип

проводимости полупроводника, из которого выполнен образец; б) концентрацию основных носителей заряда; в) холловскую подвижность носителей заряда; г) подвижность носителей, связанную с протеканием основного тока; д) коэффициент диффузии носителей заряда.

5.55. В образце германия, помещенном во взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля, эффект Холла не наблюдается. Какую часть общей электропроводности составляет дырочная?

5.56. Образец кремния электронного типа проводимости при 100 К имеет коэффициент Холла, равный $0,28 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Энергия ионизации донорной примеси составляет 0,04 эВ. Определить концентрации донорной примеси, электронов и дырок, пренебрегая вкладом собственной проводимости.

5.57. Вычислить относительное изменение сопротивления кристалла германия, содержащего 10^{23} атомов мышьяка и $5 \cdot 10^{22}$ атомов галлия, при помещении в магнитное поле с индукцией 0,5 Тл.

5.58. При изучении эффекта Холла в магнитном поле с индукцией, равной 0,5 Тл, поперечная напряженность электрического поля в беспримесном германии оказалась в 10 раз меньше продольной напряженности электрического поля. Найти разность подвижностей электронов и дырок в исследованном полупроводнике.

5.59. В образце полупроводникового материала, у которого подвижность свободных электронов в 2 раза больше подвижности дырок, эффект Холла не наблюдается. Найти отношение концентраций свободных электронов и дырок в таком полупроводнике.

5.60. Найти концентрацию основных носителей заряда в германии дырочного типа проводимости при 300 К, если известно, что при этой температуре наступает инверсия знака коэффициента Холла.

5.61. Вычислить коэффициент Холла для кремния, содержащего 10^{22} м^{-3} примеси мышьяка при 20 и 500 К. Значение энергии ионизации примеси составляет 0,04 эВ. Температурной зависимостью подвижности свободных носителей заряда пренебречь.

5.62. Вычислить отношение продольной напряженности электрического поля к поперечной для пластины чистого кремния, помещенной в магнитное поле напряженностью $H = 8 \cdot 10^5$ А/м, полагая, что кремний является парамагнетиком.

5.63. Определить при комнатной температуре коэффициент Холла в антимоноиде индия, содержащем акцепторы с концентрацией $5 \cdot 10^{16}$ см⁻³, если отношение холловских подвижностей электронов и дырок к дрейфовым равно 1,18. Известно также, что подвижность электронов превышает подвижность дырок в 80 раз, магнитное поле является слабым.

5.64. При определенной температуре, превышающей температуру инверсии знака коэффициента Холла, этот параметр оказался равным $3,66 \cdot 10^{-4}$ м³/Кл. Удельное сопротивление полупроводника составило $8,93 \cdot 10^{-3}$ Ом·м, индукция магнитного поля – 0,5 Тл. Полагая, что проводимость осуществляется носителями одного знака, найти их концентрацию и подвижность, а также угол Холла.

5.65. Вычислить коэффициент Холла для собственного кремния при температурах 20 и 200 К. Температурной зависимостью подвижности пренебречь.

6. НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

6.1. Найти, на какую величину и как изменится время релаксации основных носителей заряда в германии электронного типа проводимости после проведения дополнительного легирования образца примесью бора, в результате которого проводимость уменьшилась с 10^{-2} до $2 \cdot 10^{-4}$ Ом⁻¹·м⁻¹.

6.2. Подвижности электронов и дырок в монокристалле кремния при комнатной температуре соответственно равны 0,16 и 0,04 м²/В·с. Найти коэффициенты диффузии электронов и дырок.

6.3. Время жизни носителей заряда в полупроводниках сильно зависит от качества поверхности. При исследовании монокристалла германия электронного типа проводимости с необработанной поверхностью было найдено, что время жизни основных носителей

заряда составляет 78 мкс, а у образца, поверхность которого подверглась ионному травлению, - 340 мкс. Полагая, что подвижность электронов равна $0,36 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, найти диффузионную длину электрона при комнатной температуре в обоих образцах.

6.4. Найти подвижность дырок в полупроводнике электронного типа проводимости, если диффузионная длина дырки при комнатной температуре составляет 0,1 см, а время жизни равно 100 мкс.

6.5. Имеется однородная пластина монокристаллического кремния электронного типа проводимости при комнатной температуре с концентрацией донорной примеси, равной $2,25 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Первоначально пластина находилась в состоянии термодинамического равновесия, затем подверглась действию потока монохроматического света, после чего состояние термодинамического равновесия восстановилось. Определить: а) равновесные концентрации электронов и дырок; б) неравновесные концентрации электронов и дырок для следующих значений концентрации избыточных носителей заряда: 1) $\Delta n_0 = \Delta p_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$; 2) $\Delta n_0 = \Delta p_0 = 10^{16} \text{ см}^{-3}$; в) какой уровень возбуждения (низкий или высокий) будет реализован в каждом случае.

6.6. В полупроводнике электронного типа проводимости скорость рекомбинации дырок равна $10^{18} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$, а избыточная концентрация дырок составляет 10^{13} см^{-3} . Найти среднее время жизни неосновных неравновесных носителей заряда.

6.7. Образец монокристаллического германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному действию фотонов. Это внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесных ионов $N_D = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и обуславливает постоянную генерацию 10^{18} электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитать избыточную концентрацию носителей, а также относительное изменение концентрации носителей заряда вследствие действия фотонов, если $\tau_n = \tau_p = 2 \text{ мс}$.

Пусть время действия потока фотонов прекращается в момент времени $t = t_0$. Как изменится во времени избыточная концентрация дырок при $t > t_0$? За какое время избыточная концентрация снизится до 5 % начального значения?

6.8. В плоскость $x=0$ кремниевого образца дырочного типа проводимости при комнатной температуре постоянно инжектируются электроны, время жизни которых составляет 10 мкс. Определить расстояние, на котором концентрация неосновных неравновесных носителей заряда уменьшится на порядок.

6.9. В кристалл германия электронного типа проводимости с концентрацией донорной примеси 10^{15} см^{-3} при $t=0$ инжектированы дырки с концентрацией 10^{17} см^{-3} . Полагая, что все доноры ионизированы, а время жизни дырок постоянно и равно 100 мкс, рассчитать время t_1 , по истечении которого проводимость полупроводникового кристалла уменьшится до значения $3,51 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Температура образца постоянна и равна 300 К.

6.10. Проводимость беспримесного полупроводника в исходном состоянии $\sigma_0 = 2,0 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, а в момент облучения источником генерации носителей составляет $\sigma_1 = 2,4 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Спустя $t_2 = 10$ мкс после выключения источника генерации, проводимость образца упала до $\sigma_2 = 2,3 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Найти среднее время жизни избыточных носителей заряда, если температура равна 300 К и образец при облучении не нагревается.

6.11. Удельное сопротивление беспримесного полупроводникового монокристалла при комнатной температуре составляет $50 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. После включения источника электромагнитного излучения оно стало равным $40 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, а спустя 8 мс после выключения источника электромагнитного излучения удельное сопротивление оказалось равным $45 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Найти среднее время жизни свободных носителей заряда.

6.12. В момент времени t_0 в полупроводник было введено небольшое количество избыточных дырок. Найти концентрацию дырок, которая осталась несвязанной к моменту времени t_1 .

6.13. Найти исходную концентрацию избыточных носителей заряда в полупроводнике, если после прекращения возбуждения в момент времени $t_0 = 0$ за любой интервал времени $\Delta t = 10^{-3} \text{ с}$ концентрация избыточных носителей заряда уменьшается на два порядка и в момент времени $t_1 = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ составляет 10^{16} см^{-3} .

6.14. К моменту прекращения возбуждения концентрация избыточных электронов в германии дырочного типа проводимости составляла 10^{19} см^{-3} при комнатной температуре. Спустя время, равное 1 мкс, концентрация избыточных носителей упала до 10^{14} см^{-3} . Исходя из приведенных данных, вычислить сечение захвата электронов.

6.15. Найти концентрацию ловушек в собственном полупроводнике при комнатной температуре, если сечения захвата электронов и дырок равны и составляют 10^{-16} см^2 , время жизни избыточных носителей заряда равно 30 мкс. Считать, что уровень возбуждения невелик, а рекомбинация протекает через центры, локализованные посередине запрещенной зоны.

6.16. В германии электронного типа проводимости с удельным сопротивлением, равным $5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, при комнатной температуре концентрация ловушечных центров составляет $5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, а их энергетический уровень совпадает с серединой запрещенной зоны. Время жизни неосновных неравновесных носителей заряда составляет 10^4 с . Найти сечение захвата ловушечных центров.

6.17. В момент времени $t_1 = 10^{-4} \text{ с}$ после выключения равномерной по объему генерации электронно-дырочных пар неравновесная концентрация носителей заряда оказалась в 10 раз больше, чем в момент $t_2 = 10^{-3} \text{ с}$. Определить время жизни неравновесных носителей заряда, если уровень возбуждения невелик и рекомбинация идет через простые дефекты.

6.18. Определить закон изменения со временем концентрации избыточных носителей заряда в полупроводнике электронного типа проводимости, если после выключения источника генерации в момент времени $t = 0$ темп рекомбинации $R = a (np - n_i^2)$, где a – постоянный коэффициент.

6.19. В германии электронного типа проводимости с концентрацией основных носителей заряда, равной 10^{15} см^{-3} , стационарным источником равномерно по всему объему генерируются электронно-дырочные пары носителей. При низком уровне возбуждения время жизни составляет 2 мкс, а при $\Delta n/n_0 = 0.1$ рекомбинация происходит с постоянной времени, равной 4,7 мкс. Считая, что рекомбинация происходит на простых центрах с $E_t = E_c -$

0,20 эВ, определить отношение сечений захвата дырок и электронов при 300 К.

6.20. Вычислить положение квазиуровня Ферми относительно середины запрещенной зоны кремния с концентрацией донорных атомов 10^{15} см^{-3} при температуре 350 К и концентрации избыточных дырок $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Изобразить зонную диаграмму.

6.21. Рассчитать положение квазиуровня Ферми и построить зонную диаграмму германия, содержащего 10^{16} см^{-3} акцепторной примеси, если при температуре, равной 35 К, в монокристалл инжектированы избыточные электроны с концентрацией $3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Энергия ионизации акцепторной примеси составляет 0,001 эВ.

6.22. Определить положение квазиуровней Ферми относительно середины запрещенной зоны в полупроводнике, легированном акцепторной примесью с концентрацией 10^{16} см^{-3} при комнатной температуре. Известно, что скорость генерации неравновесных носителей заряда равна 10^{18} см^{-3} , время жизни электронов составляет 10 мкс, собственная концентрация носителей – 10^{10} см^{-3} .

7. ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

7.1. Известны значения длины волны фотона, соответствующие порогу фундаментального поглощения в полупроводниках: 3,00; 1,65; 1,05; 0,82 и 0,47 мкм. Определить, какие полупроводниковые материалы исследованы.

7.2. Ширина запрещенной зоны кремния равна примерно 1,2 эВ, а германия 0,75 эВ при температуре абсолютного нуля. Для каких длин волн эти кристаллы непрозрачны?

7.3. Чистые кристаллы галогенидов щелочных металлов прозрачны в видимой области спектра. Значения ширины запрещенной зоны для трех таких кристаллов приводятся ниже.

Кристалл	<i>KCl</i>	<i>KBr</i>	<i>KI</i>
----------	------------	------------	-----------

Вычислить для каждого из кристаллов длину

$\Delta E_0, \text{эВ}$	7,6	6,5	5,6	волны, начиная с которой кристалл становится непрозрачным.
-------------------------	-----	-----	-----	--

7.4. Какова частота электромагнитного излучения, необходимого:

а) для перевода электрона в атоме водорода из основного в первое возбужденное состояние; б) полной ионизации атома? К какой области спектра относится это электромагнитное излучение?

7.5. Вычислить относительное изменение проводимости полупроводника с концентрацией основных носителей заряда (электронов), равной 10^{14} см^{-3} , при стационарном облучении электромагнитным излучением с интенсивностью

$5 \cdot 10^{15}$ квантов на 1 см^2 поверхности в секунду. Коэффициент поглощения α равен 100 см^{-1} , толщина образца мала по сравнению с α^{-1} , рекомбинация происходит на простых дефектах с постоянной времени $\tau = 200 \text{ мкс}$.

7.6. Из двух полупроводниковых материалов, ширина запрещенной зоны одного из которых равна 1,5 эВ, а другого – 1,6 эВ в едином монокристалле создан *p-n*-гетеропереход. Излучение падает на гетеропереход со стороны полупроводника с большей шириной запрещенной зоны. Найти спектральную полосу чувствительности такого фотоприемника.

7.7. При отражении света с длиной волны $\lambda = 100 \text{ мкм}$ полупроводниковым образцом большой толщины коэффициент отражения $R = 0,36$. Коэффициент пропускания пленки из того же материала толщиной 1 мм равен $T = 0,17$. Найти коэффициент поглощения α .

7.8. Найти величины квазиволновых векторов электрона и дырки, генерируемых при поглощении кванта света в прямозонном полупроводнике с параболическими изотропными законами дисперсии. Принять ширину запрещенной зоны, равной 0,3 эВ,

энергию кванта – $0,31 \text{ эВ}$, показатель преломления $n = 4$, эффективные массы $m_n^* = m_p^*$.

8. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

8.1. Молекула кислорода обладает магнитным моментом, равным $2,8$ магнетона Бора. Вычислить: а) магнитную восприимчивость 1 м^3 кислорода при комнатной температуре и давлении 140 атм (обычное давление в баллоне с газообразным кислородом); б) намагничённость 1 м^3 кислорода при указанных выше условиях в магнитном поле Земли.

8.2. Найти магнитный момент $\overline{M}$ и магнитную индукцию $\overline{B}$ для образца металлического ниобия, помещенного в поле напряженностью 10^6 А/м . Как изменится величина магнитной индукции в присутствии ниобия по сравнению со значением магнитной индукции в вакууме при указанном значении напряженности магнитного поля, если магнитная восприимчивость ниобия составляет приблизительно $2,3 \cdot 10^{-6}$.

8.3. Решить предыдущую задачу для германия, у которого магнитная восприимчивость приблизительно равна -10^{-6} .

8.4. Вычислить значение магнитной индукции для германия, находящегося в магнитном поле напряженностью 10^5 А/м .

8.5. Оценить намагничённость ферромагнетика при $T \rightarrow 0$ и при $T \rightarrow \theta$, где θ – температура Кюри-Вейсса.

8.6. Известно, что энергия обменного взаимодействия сильно убывает при увеличении расстояния между атомами. Оценить энергию обменного взаимодействия для железа, никеля, кобальта, гадолиния, если известно, что $\theta_{Fe} = 1043$; $\theta_{Ni} = 631$; $\theta_{Co} = 1400$; $\theta_{Gd} = 289 \text{ К}$.

8.7. Оценить энергию взаимодействия двух магнитных диполей, удаленных друг от друга на расстояние порядка эффективного диаметра атомов ($\approx 1 \text{ \AA}$). Сравнить полученное значение с величиной обменной энергии. Какое из этих взаимодействий определяет природу ферромагнетизма твердых тел?

8.8. Сравнить имеющиеся в ферромагнетиках значения энергий обменного, магнитостатического и электростатического взаимодействий с величиной тепловой энергии при температурах $T_1 = 1$ К и $T_2 = 300$ К при расстоянии между взаимодействующими атомами порядка $1 \text{ \AA}$. Определить, какое из взаимодействий – электростатическое или магнитостатическое способствует установлению обменного взаимодействия.

8.9. Энергия доменных стенок в железе составляет около 10^{-3} Дж/м². Вычислить: а) общую площадь доменных стенок образца железа массой 0,5 кг; б) полную энергию всех доменных стенок. Для простоты расчетов считать, что в типичном образце размагниченного поликристаллического железа домены имеют форму параллелепипедов с размерами $0,1 \times 0,01 \times 0,01$ см.

8.10. Найти намагниченность длинного тонкого стержня, изготовленного из технически чистого железа, длинная ось которого расположена вдоль оси земного магнитного поля, если относительная магнитная проницаемость материала составляет $5 \cdot 10^3$.

8.11. Показать, что магнитоупругая энергия замыкающих доменов имеет величину порядка 50 Дж/м³.

8.12. Ферромагнитное железо обладает кубической объемно-центрированной решеткой с периодом идентичности $2,86 \text{ \AA}$ и намагниченностью $1,75 \cdot 10^6$ Гс. Вычислить магнитный момент, приходящийся на один атом железа, в магнетонах Бора.

8.13. Магнитный момент атома гадолиния составляет $7,95$ магнетона Бора. Определить намагниченность насыщения кристалла гадолиния, если он обладает гранецентрированной кубической решеткой с периодом идентичности, равным $3,2 \text{ \AA}$.

8.14. Средний магнитный момент атома ферромагнетика составляет $0,6$ магнетона Бора, намагниченность насыщения $5,1 \cdot 10^5$ Гс. Вычислить период идентичности гранецентрированной кубической решетки.

8.15. Допуская, что железо является парамагнетиком в широкой области температур, оценить напряженность магнитного

поля, необходимую для создания при комнатной температуре спонтанной намагниченности, равной 0,12 Тл.

8.16. В опытах по изучению методом ЯМР магнитных свойств атомов ^{25}Mg в основном состоянии обнаружено резонансное поглощение энергии при индукции магнитного поля 0,54 Тл и частоте 1,4 МГц. Определить ядерный фактор Ланде.

8.17. Свободный протон находится в постоянном магнитном поле с индукцией 1 Тл. Определить частоту переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергии внешнего поля протоном.

8.18. Методом магнитного резонанса определяют магнитный момент нейтрона. Резонансное поглощение энергии наблюдается при значении магнитной индукции постоянного поля 0,682 Тл и частоте переменного поля, равной 19,9 МГц. Вычислить ядерный фактор Ланде.

8.19. Вычислить величину магнитного поля, в котором резонансная частота для протона будет равна: а) 1 МГц; б) 100 МГц. Являются ли такие поля экспериментально осуществимыми?

8.20. Найти поле, при котором имеет место электронный резонанс на частоте 10^{11} Гц, полагая, что ядерный фактор Ланде равен 2.

9. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

9.1. Два одновалентных металла приведены в контакт, т.е. по всей поверхности соприкосновения они отстоят друг от друга лишь на величину одного параметра кристаллической решетки, равного 2 Å. Контактная разность потенциалов составляет 1 В, площадь контакта 1 м², каждый из образцов металлов представляет собой куб с ребром 1 м. Чему равен поток зарядов из одного металла в другой? Найти процентное изменение концентрации электронов одного из кубов, обусловленное перетеканием зарядов в другой образец.

9.2. На поверхности кремния дырочного типа проводимости существует обедненный слой с пренебрежимо малой концентрацией носителей заряда. Найти толщину области объемного заряда при 300 К, если поверхностный потенциал равен 0,25 В, а концентрация мелких полностью ионизированных акцепторов в объеме составляет 10^{15} см^{-3} .

9.3. В условиях предыдущей задачи оценить напряженность поля на поверхности полупроводника.

9.4. На поверхности кремния электронного типа проводимости при комнатной температуре существует обедненный слой. При каком значении потенциала в приповерхностной области концентрация дырок сравняется с концентрацией электронов? Оценить толщину приповерхностного слоя, в котором $p(x) > n(x)$, если поверхностный потенциал равен 0,5 В, концентрация электронов в объеме 10^{15} см^{-3} , а подвижность электронов в 2,9 раза превышает подвижность дырок.

9.5. Найти поверхностный потенциал для собственного германия при комнатной температуре, если концентрация адсорбированной на его поверхности полностью ионизированной донорной примеси составляет 10^9 см^{-2} .

9.6. Рассчитать необходимые параметры и изобразить зонную диаграмму равновесного состояния контакта Шоттки при комнатной температуре, если концентрация донорной примеси в кремнии равна 10^{16} см^{-3} , контактная разность потенциалов 0,6 В, площадь контакта 1 мм^2 , емкость – 840 пФ.

9.7. Рассчитать необходимые параметры и построить зонные диаграммы диода с барьером Шоттки на основе кремния электронного типа проводимости при комнатной температуре в равновесном состоянии, а также при прямом смещении 1 В и обратном смещении 20 В при следующих параметрах: работа выхода электрона из металла составляет 1 эВ, концентрация донорной примеси - 10^{15} см^{-3} .

9.8. Рассчитать необходимые параметры и построить зонные диаграммы диода с барьером Шоттки на основе германия электронного типа проводимости при температуре 200 К в равновесном состоянии, а также при прямом смещении 0,5 В и

обратном смещении 10 В при следующих параметрах: работа выхода электрона из металла составляет 0,9 эВ, концентрация донорной примеси – 10^{13} см^{-3} .

9.9. Рассчитать и построить вольт-амперные характеристики диода с барьером Шоттки при комнатной температуре полагая, что контактная разность потенциалов составляет 0,6 В, концентрация донорной примеси – 10^{15} см^{-3} . Изменение прямого смещения на диоде – от 0 до 1 В через 0,2 В, обратного – от 0 до 50 В через 10 В.

9.10. Определить контактную разность потенциалов, возникающую в электронно-дырочном переходе при комнатной температуре и концентрациях основных носителей заряда в *n*- и *p*-областях соответственно $1,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Изобразить зонную диаграмму.

9.11. Найти контактную разность потенциалов, возникающую при комнатной температуре в электронно-дырочном переходе, полученном в германии при концентрациях донорной и акцепторной примесей, равных 10^{15} см^{-3} . Изобразить зонную диаграмму.

9.12. Определить величину контактной разности потенциалов в электронно-дырочном переходе в германии при температуре 200 К и следующих концентрациях основных носителей заряда: $n_n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $p_p = 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Изобразить зонную диаграмму.

9.13. Как изменится величина контактной разности потенциалов в электронно-дырочном переходе, созданном в кремнии, при изменении температуры от 300 до 400 К, если концентрации основных носителей заряда в *n*- и *p*-областях равны соответственно 10^{12} и 10^{15} см^{-3} .

9.14. Выразить зависимость контактной разности потенциалов электронно-дырочного перехода от удельных сопротивлений электронной и дырочной областей.

9.15. Определить контактную разность потенциалов электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре, если удельные сопротивления электронной и дырочной областей равны соответственно 0,01 и 1 Ом·см.

9.16. Контактная разность потенциалов электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре равна 0,072 В. Концентрация основных носителей заряда в n -области составляет 10^{21} м^{-3} . Найти концентрацию неосновных носителей заряда в p -области.

9.17. Найти величину контактной разности потенциалов электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре, зная удельные электропроводности электронной и дырочной областей σ_n и σ_p .

9.18. Рассчитать равновесную ширину симметричного электронно-дырочного перехода в германии, если контактная разность потенциалов равна 0,43 В, а концентрация примесей 10^{17} см^{-3} .

9.19. Построить зонную диаграмму симметричного электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре и концентрации примесей 10^{15} см^{-3} .

9.20. Построить зонную диаграмму электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре, если концентрация донорной примеси составляет 10^{17} см^{-3} , акцепторной – 10^{15} см^{-3} .

9.21. Определить равновесную ширину электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре, если контактная разность потенциалов равна 0,42 В, а удельные сопротивления электронной и дырочной областей соответственно равны 0,01 и 1 Ом·см.

9.22. Найти толщину области пространственного заряда в германиевом электронно-дырочном переходе при комнатной температуре и концентрациях электронов в n -области $n_n = 10^{21} \text{ м}^{-3}$, а в p -области $n_p = 5 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$.

9.23. Равновесная ширина несимметричного электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре равна $7,65 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, а контактная разность потенциалов 0,68 В. Определить концентрацию донорной примеси при условии, что p -область легирована значительно сильнее.

9.24. Несимметричный электронно-дырочный переход в кремнии имеет низкоомную p -область и относительно высокоомную n -область. Вычислить равновесную толщину области пространственного заряда, если контактная разность потенциалов составляет 0,75 В, а удельное сопротивление n -области равно 1 Ом·см.

9.25. Найти значения толщины области пространственного заряда симметричного электронно-дырочного перехода в кремнии при приложении электрического смещения: а) прямого $U_{пр} = 0,3$ В; б) обратного $U_{обр} = -50$ В при комнатной температуре. Концентрация примеси в каждой области составляет 10^{15} см⁻³. Изобразить зонные диаграммы для равновесного состояния, а также после приложения прямого и обратного смещения.

9.26. Определить ширину области пространственного заряда электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре и подаче обратного электрического смещения, равного -10 В, если удельное сопротивление электронной области $\rho_n = 0,01$ Ом·см, а дырочной $\rho_p = 0,5$ Ом·см. Считать примеси полностью ионизированными.

9.27. Какова ширина области пространственного заряда электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре и обратном напряжении, равном -50 В, если равновесная ширина составляет $1,2 \cdot 10^{-4}$ см, а контактная разность потенциалов 0,58 В.

9.28. Ширина электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре после приложения обратного смещения, равного -20 В, имеет величину $1,9 \cdot 10^{-4}$ см. Определить равновесную ширину перехода, если контактная разность потенциалов равна 0,4 В.

9.29. Рассчитать необходимые параметры и построить зонные диаграммы электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре в равновесном состоянии, а также при прямом и обратном смещении для следующих условий: 1) концентрация примеси в обеих областях одинакова и равна 10^{15} см⁻³; 2) $N_D = 1,5 \cdot 10^{14}$ см⁻³, $N_A = 3 \cdot 10^{16}$ см⁻³; 3) $N_D = 10^{18}$ см⁻³, $N_A = 10^{17}$ см⁻³, температура равна 150 К.

9.30. В несимметричном электронно-дырочном переходе в германии дебаевская длина экранирования в высокоомной области

составляет 0,1 мкм, а контактная разность потенциалов равна 0,5 В. Найти равновесную ширину электронно-дырочного перехода при комнатной температуре.

9.31. Найти отношение равновесной ширины несимметричного электронно-дырочного перехода в германии к дебаевской длине экранирования в его высокоомной области, если $\rho_p = 0.01$ Ом·см, $\rho_n = 1$ Ом·см, $T = 300$ К.

9.32. В кремниевом электронно-дырочном переходе площадью 10^{-8} м² при комнатной температуре концентрация акцепторной примеси в p -области равна 10^{15} см⁻³, а донорной в n -области – 10^{14} см⁻³, величина приложенного обратного смещения составляет -10 В. Определить: а) высоту потенциального барьера; б) координаты границ области пространственного заряда p - n -перехода; в) барьерную емкость. Построить зонную энергетическую диаграмму, найдя положение уровней Ферми в n - и p -областях.

9.33. Найти значения зарядной емкости, приходящейся на 1 см² поверхности симметричного электронно-дырочного перехода в кремнии, при прямом напряжении, равном 0,3 В, и обратном, равном -50 В, если температура комнатная, а концентрация доноров и акцепторов составляет 10^{15} см⁻³.

9.34. Какие изменения претерпевает емкость симметричного электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре при изменении напряжения от $U_{np} = 0,1$ В до $U_{обр} = -10$ В, если концентрации донорной и акцепторной примесей равны 10^{17} см⁻³, а контактная разность потенциалов – 0,4 В.

9.35. Какова величина барьерной емкости, приходящейся на 1 см² поверхности несимметричного электронно-дырочного перехода в германии при обратном смещении, равном -20 В, и комнатной температуре? Концентрация доноров в n -области значительно превышает концентрацию акцепторов в p -области, равную 10^{16} см⁻³, контактная разность потенциалов составляет 0,43 В.

9.36. Определить диффузионную емкость электронно-дырочного перехода в кремнии площадью 0,01 см² при комнатной

температуре после приложения прямого смещения, равного 0,2 В, если известно, что равновесная ширина перехода составляет $7,6 \cdot 10^{-5}$ см, а контактная разность потенциалов 0,68 В.

9.37. Какова ширина области пространственного заряда электронно-дырочного перехода в кремнии площадью $0,5 \text{ см}^2$ при комнатной температуре, если известно, что его зарядная емкость равна 25,8 пФ.

9.38. При приложении к электронно-дырочному переходу в германии площадью $0,01 \text{ см}^2$ напряжения обратного смещения, равного -5 В , барьерная емкость достигает величины 46 пФ. Определить равновесную ширину перехода, если контактная разность потенциалов составляет 0,37 В.

9.39. Определить диффузионную емкость электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре и значении прямого тока 10 мА. Время жизни неосновных носителей заряда в базе принять равным 50 мкс.

9.40. Найти значение диффузионной емкости электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре, если ток насыщения равен 30 мкА, величина напряжения прямого смещения 0,2 В, а время жизни неосновных носителей заряда – 15 мкс.

9.41. Вычислить удельную емкость электронно-дырочного перехода, созданного в германиевом образце, при обратном смещении, равном -1 В . Контактная разность потенциалов составляет 0,35 В, равновесная ширина области пространственного заряда – 0,6 мкм.

9.42. Найти диффузионную емкость несимметричного электронно-дырочного перехода при комнатной температуре и токе 2 мА для случая, когда толщина базы значительно больше диффузионной длины, а время жизни неосновных носителей заряда в базе составляет 5 мкс.

9.43. Определить плотность тока насыщения германиевого симметричного электронно-дырочного перехода при комнатной температуре, если концентрации неосновных носителей заряда в обеих областях равны 10^{12} см^{-3} .

9.44. Определить плотность тока насыщения электронно-дырочного перехода в германии площадью $0,05 \text{ см}^2$ при комнатной температуре и следующих параметрах: $n_n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$; $p_p = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$; $L_n = \quad = \quad 0,15 \quad \text{см}$; $L_p = 0,1 \text{ см}$.

9.45. Какова плотность тока насыщения электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре, если $\rho_n = 50 \quad \text{Ом}\cdot\text{см}$; $\rho_p = 10 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; $L_n = 0,05 \text{ см}$; $L_p = 0,03 \text{ см}$.

9.46. Найти ток насыщения для симметричного кремниевого электронно-дырочного перехода при комнатной температуре, если проводимости n - и p -областей равны $1 \text{ См}\cdot\text{см}^{-1}$; диффузионные длины – $0,1 \text{ см}$; площадь p - n -перехода – 10 мм^2 ; удельное сопротивление собственного кремния – $2 \cdot 10^3 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

9.47. В полупроводнике создан резкий несимметричный электронно-дырочный переход. Удельные сопротивления n - и p -областей соответственно равны $\rho_n = 1 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; $\rho_p = 0,1 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; диффузионные длины неосновных носителей заряда для электронов и дырок составляют $L_n = 0,1 \text{ см}$, $L_p = 0,2 \text{ см}$. Найти отношение дырочного тока к электронному в центре электронно-дырочного перехода.

9.48. Найти плотность тока насыщения электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре. Концентрация неосновных носителей заряда в обеих областях равна 10^6 см^{-3} , диффузионная длина электронов составляет $0,04 \text{ см}$, а дырок – $0,02 \text{ см}$.

9.49. Обратный ток насыщения кремниевого электронно-дырочного перехода равен $0,5 \text{ мкА}$, а прямой ток при напряжении U и комнатной температуре составляет 10 мА . Найти напряжение U на p - n -переходе.

9.50. Обратный ток насыщения кремниевого диода при комнатной температуре составляет $0,1 \text{ мкА}$. Найти дифференциальное сопротивление диода и сопротивление постоянному току при внешнем напряжении $0,3 \text{ В}$, приложенном в прямом направлении.

9.51. Вычислить прямой ток через электронно-дырочный переход при напряжениях 0,3 и 0,4 В при комнатной температуре, если известно, что обратный ток насыщения составляет 0,1 мкА.

9.52. Найти обратный ток насыщения несимметричного кремниевое электронно-дырочного перехода площадью $0,1 \text{ см}^2$ при комнатной температуре, если удельное сопротивление базы p -типа составляет $1 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, а время жизни носителей в базе равно 5 мкс.

9.53. Определить среднюю напряженность электрического поля в резком симметричном электронно-дырочном переходе, полученном в кремнии, для случая его равновесного состояния. Концентрации примеси равны 10^{15} см^{-3} .

9.54. Найти максимальную напряженность электрического поля в германиевом электронно-дырочном переходе при внешнем напряжении 4 В, приложенном в обратном направлении, если известно, что концентрация примеси в базе составляет 10^{20} м^{-3} .

ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ

Постоянная Планка	$h = 6,623 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Планка	$\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$
Дж·с	
Постоянная Больцмана	$k = 1,380 \cdot 10^{-23}$
Дж/град = $8,63 \cdot 10^{-5}$ эВ/град	
Тепловая энергия при $T = 300$ К	$kT = 0,0256$ эВ
Газовая постоянная	$R = 8,31$
Дж/моль·град	
Скорость света	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Число Авогадро	$N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$
молекул/моль	
Масса покоя электрона	$m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Заряд электрона	$e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Магнетон Бора	$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ А/м
Ядерный магнетон	$\mu_p = 5,05 \cdot 10^{-27}$ А/м

СВОЙСТВА КРЕМНИЯ И ГЕРМАНИЯ ПРИ 300 К

Параметр	Кремний	Германий
Кристаллическая структура	Типа алмаза	Типа алмаза
Число атомов на элементарную ячейку	8	8
Атомный номер	14	32
Постоянная решетки a , нм	0,543	0,566
Ширина запрещенной зоны ΔE_0 , эВ	1,124	0,670
Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ	11,7	16,0
Собственная концентрация носителей n_i , см ⁻³	$1,45 \cdot 10^{10}$	$2,4 \cdot 10^{13}$
Решеточная подвижность электронов μ_n , см ² /(В·с)	1417	3900
дырок μ_p , см ² /(В·с)	471	1900
Эффективная плотность состояний, см ⁻³		
в зоне проводимости N_c	$2.80 \cdot 10^{19}$	$1.04 \cdot 10^{19}$
в валентной зоне N_v	$1.04 \cdot 10^{19}$	$6.04 \cdot 10^{18}$
Коэффициент диффузии электронов D_n , см ² /с	34,6	98,0
дырок, D_p , см ² /с	12,3	47,0

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Орешкин П.Т. Физика полупроводников и диэлектриков. М.: Высшая школа, 1977. 448 с.
2. Павлов П.В., Хохлов А.Ф. Физика твердого тела. М.: Высшая школа, 2000. 494 с.
3. Маллер Р., Кейминс Т. Элементы интегральных схем: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 630 с.
4. Уэрт Ч., Томсон Р. Физика твердого тела: Пер. с англ. М.: Мир, 1969. 558 с.
5. Бонч-Бруевич В.Л., Звягин И.П., Карпенко И.В., Миронов А.Г. Сборник задач по физике полупроводников. М.: Наука, 1987. 144 с.
6. Задачи по физике твердого тела / Под ред. Г.Дж. Голдсмида. М.: Наука, 1976. 432 с.

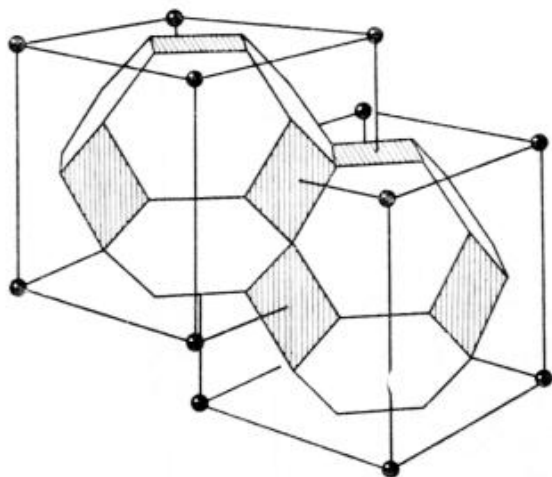
ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	Строение и структура твердых тел.....
2.	Основы квантовой механики и статистической физики.....
3.	Расчет концентрации носителей заряда в собственных и примесных полупроводниках. закон действующих масс.....
4.	Зависимость концентрации свободных носителей заряда и положения уровня ферми в полупроводниках от температуры.....
5.	Кинетические явления в твердых телах.....
6.	Неравновесные процессы в твердых телах.....
7.	Оптические явления в твердых телах.....
8.	Магнитные свойства твердых тел
9.	Контактные явления в твердых телах
	Значения некоторых физических постоянных
	Свойства кремния и германия при 300 К.....

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.А.ХОЛОМИНА

ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ



Рязань 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет

Т.А.ХОЛОМИНА

ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Учебное пособие

Рязань 2017

УДК 539.2

Электронные процессы в твердом теле: учеб. пособие/ Т.А. Холомина; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. - Рязань, 2017. - 68 с.

Основная цель - краткое и доступное по форме изложение учебного материала, предусмотренного программами и действующими образовательными стандартами.

Предназначено для проведения практических аудиторных занятий и самостоятельной работы обучающихся: содержит краткие теоретические сведения, методические рекомендации, а также задачи разной степени сложности по каждому разделу программы. Рассмотрены особенности равновесных и неравновесных электронных процессов, оптические, фотоэлектрические и контактные явления, а также магнитные свойства твердых тел.

Предназначено для студентов и магистрантов, обучающихся по направлениям 11.03.04, 11.04.04 «Электроника и наноэлектроника»; аспирантов, обучающихся по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия» очной, очно-заочной и заочной форм обучения.

Ил. 7. Библиогр.: 7 назв.

Твердое тело, полупроводники, электропроводность, термоэлектрические явления, эффект Холла, оптические, магнитные свойства, контактные явления

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра микро- и наноэлектроники [директор Регионального центра зондовой микроскопии (коллективного пользования) канд. техн. наук доц. Н.В. Вишняков]

1. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

Микрочастицам, как известно, присущ корпускулярно-волновой дуализм. В соответствии с соотношениями де Бройля для микрочастицы массой m , обладающей энергией E , характерен волновой процесс с частотой

$$\nu = \frac{E}{h} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{E}{\hbar}, \quad (1.1)$$

где h – постоянная Планка, $\hbar = h/2\pi$, а также длиной волны λ

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (1.2)$$

где $p = mv$ – импульс микрочастицы, имеющей скорость v .

Своеобразие микрочастиц отражено также соотношениями неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar; \Delta y \Delta p_y \geq \hbar; \Delta z \Delta p_z \geq \hbar; \Delta E \Delta t \geq \hbar; \Delta x \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m}. \quad (1.3)$$

Здесь Δx – неопределенность в значении координаты микрочастицы, движущейся со скоростью v_x в направлении оси x ; Δp_x – неопределенность в значении проекции импульса на ось x ; ΔE – неопределенность в значении энергии; Δt – неопределенность в значении времени, в течение которого микрочастица обладает энергией от E до $E+dE$.

Обобщенная функция распределения микрочастиц по энергии

$$dn(E) = 2N(E)f(E)dE \quad (1.4)$$

показывает, какова концентрация свободных носителей заряда $dn(E)$ в интервале энергий от E до $E+dE$ зоны проводимости полупроводника при эффективной плотности разрешенных состояний $N(E)$ и вероятности их заполнения $f_n(E)$. При этом для электронов зоны проводимости

$$N_n(E) = \frac{2\pi(2m_n^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} (E - E_c)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.5)$$

$$f_n = \frac{1}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1}, \quad (1.6)$$

где E – текущее значение энергии, E_c – энергия, соответствующая дну зоны проводимости, m_n^* – эффективная масса электрона, h – постоянная Планка, T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана, E_F – положение уровня Ферми. При совпадении значений энергии E и E_F (пересечении уровня Ферми с каким-либо энергетическим уровнем в запрещенной зоне полупроводника)

вероятность заполнения состояния с энергией E составляет $\frac{1}{2}$. Для свободных дырок валентной зоны соотношения выглядят аналогично:

$$N_p(E) = \frac{2\pi(2m_p^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} (E_V - E)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

$$f_p = \frac{1}{e^{\frac{E_F - E}{kT}} + 1}, \quad (1.8)$$

где m_p^* - эффективная масса дырки.

Функции $f_n(E)$ или $f_p(E)$ называются функциями распределения Ферми – Дирака ($f_{Ф-Д}$) и характеризуют вероятность заполнения элементарной ячейки шестимерного фазового пространства координат-импульсов. Коллектив микрочастиц, подчиняющийся статистике Ферми – Дирака, называют квантовым или вырожденным.

Если $e^{\frac{E - E_F}{kT}} \gg 1$, то функция распределения Ферми – Дирака переходит в функцию распределения Максвелла – Больцмана

$$f_{М-Б}(E) = e^{-\frac{E - E_F}{kT}}. \quad (1.9)$$

Коллектив микрочастиц, подчиняющийся статистике Максвелла – Больцмана, называют невырожденным. Характерными признаками такого коллектива являются: концентрация свободных микрочастиц много меньше плотности разрешенных энергетических состояний и зависит от температуры, уровень Ферми локализован в запрещенной зоне полупроводника. Свойства невырожденного коллектива микрочастиц можно описывать и статистикой Ферми – Дирака.

При температуре абсолютного нуля концентрация свободных электронов в проводнике определяется как

$$n_0 = \frac{8\pi(2m^*)^{\frac{3}{2}}}{3h^3} E_{F0}^{\frac{2}{3}}, \quad E_{F0} = \frac{h^2}{8m^*} \left(\frac{3n_0}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (1.10)$$

где E_{F0} – значение энергии уровня Ферми при $T = 0$ К.

Волновые свойства микрочастиц обуславливают возможность их дифракции и интерференции, которые используются в разнообразных методах изучения структуры твердого тела. Как и для других видов излучений, длина волны которых λ соизмерима с межатомным расстоянием твердых тел, для микрочастиц справедливо соотношение Вульфа – Брегга:

$$2d \sin \Theta = n \lambda, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.11)$$

где d - постоянная кристаллической решетки, Θ – угол падения фронта излучения, n – порядок дифракции.

1.1. Пользуясь распределением Ферми – Дирака, рассчитать при $T = 300$ К вероятность заполнения электроном энергетического уровня, расположенного: 1) выше уровня Ферми на а) $0,1\text{ эВ}$, б) $1,0\text{ эВ}$; 2) ниже уровня Ферми на $0,1\text{ эВ}$.

1.2. Как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электроном энергетического уровня в металле, если уровень расположен на $0,1\text{ эВ}$ ниже уровня Ферми и температура повысится от 200 до 300 К ?

1.3. Определить температуру идеального газа, средняя энергия частиц которого равна средней энергии свободных электронов в металле при $T = 0\text{ К}$ с уровнем Ферми, равным 6 эВ .

1.4. Найти разницу энергий (в единицах kT) электрона, энергия которого соответствует уровню Ферми, и электронов, находящихся на уровнях, вероятности заполнения которых равны $0,2$ и $0,8$.

1.5. Определить долю свободных электронов в металле при $T = 0\text{ К}$, энергия которых отличается от максимальной менее чем на 50% .

1.6. Металлический образец объемом 1 см^3 находится при $T = 0\text{ К}$. Уровень Ферми соответствует 5 эВ . Найти концентрацию свободных электронов, импульс которых отличается от максимального не более чем на 10% .

1.7. Определить температуру, при которой в твердом проводнике вероятность найти электрон с энергией выше уровня Ферми на $0,5\text{ эВ}$, составляет 2% .

1.8. На грань кристалла под углом 40° к плоскости поверхности падает параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью. Определить скорость электронов, если они испытывают интерференционное отражение первого порядка. Расстояние между атомными плоскостями кристалла составляет $2\text{ \AA}$.

1.9. Рентгеновские лучи с медного анода имеют длину волны $\lambda = 1,537\text{ \AA}$. Попадая на кристалл алюминия, они вызывают

дифракцию от плоскостей (111) под углом Вульфа – Брега $\theta = 41,13^\circ$. Алюминий имеет структуру ГЦК, плотность $2,699 \text{ г/см}^3$, атомную массу – $26,98 \text{ г·моль}^{-1}$. По этим экспериментальным данным рассчитать число Авогадро (число атомов в 1 моле вещества).

1.10. Получена рентгенограмма вращения с монокристалла тетрагональной сингонии. Длина волны рентгеновского излучения равна $1,542 \text{ \AA}$; пучок рентгеновских лучей перпендикулярен к оси вращения, которая является осью этого кристалла. Радиус камеры 3 см, длина 10 см. На нулевой слоевой линии наблюдаются рефлексы на расстояниях 0,54; 0,75; 1,08; 1,19; 1,52; 1,63; 1,71 и 1,97 см от места выхода прямого пучка, т.е. от центра пленки. Расстояние первой слоевой линии от нулевой линии составляет 0,66 см.

Проиндцировать наблюдаемые на нулевой слоевой линии рефлексы, вычислить параметры элементарной ячейки кристалла и расстояние каждой наблюдаемой слоевой линии от нулевой линии рентгенограммы вращения.

1.11. Рентгенограмма металлического порошка получена в рентгеновской камере Дебая – Шерера на излучении молибдена K_α ($\lambda = 0,7107 \text{ \AA}$). Для первых шести наблюдаемых линий дебаевские углы θ оказались равными $7,35; 7,82; 8,33; 10,70; 12,80$ и $13,90^\circ$.

Определить тип кристаллической решетки и проиндцировать наблюдаемые линии - найти символы плоскостей. Вычислить атомную массу вещества, если его плотность составляет $1,74 \text{ г/см}^3$. Единицу атомной массы принять за $1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$.

1.12. На дебаеграмме некоторого кубического кристалла, полученной на излучении меди K_α ($\lambda = 1,542 \text{ \AA}$), наблюдаются линии под углами Брега θ : $12,3; 14,1; 20,2; 24,0; 25,1; 29,3; 32,2$ и $33,1^\circ$.

Определить символы плоскостей, которые вызвали появление указанных линий на дебаеграмме. Найти число структурных единиц в одной элементарной ячейке, выяснить, является ли эта решетка примитивной, гранецентрированной или объемноцентрированной, вычислить длину ребра ячейки. Плотность вещества равна $8,31 \text{ г/см}^3$, атомная масса составляет 312. Единицу атомной массы принять за $1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$.

1.13. Электроны, подобно рентгеновским лучам, могут быть использованы для наблюдения дифракции в кристаллах. При какой энергии электронов они будут отражаться от плоскостей (100)

кристалла с параметром решетки $4 \text{ \AA}$, если угол Вульфа – Брегга равен 45° ?

1.14. Найти долю тяжелых дырок в полной концентрации дырок собственного германия, приняв эффективную массу тяжелых дырок равной $0,34 m_0$, а легких – $0,04 m_0$.

1.15. Показать, что вероятность того, что состояние с энергией, превышающей уровень Ферми на величину ΔE , будет занято, в точности совпадает с вероятностью иметь свободное состояние, энергия которого меньше значения энергии Ферми на эту же величину ΔE .

1.16. Определить вероятность занятости уровня с энергией, на $0,063 \text{ эВ}$ превосходящей уровень Ферми в беспримесном кремнии при температуре 1000 K .

1.17. Вычислить вероятность нахождения электрона на уровнях $E_F + 0,1 \text{ эВ}$ и $E_F - 0,1 \text{ эВ}$ при температурах $0, 150, 300$ и 1000 K . Результаты представить в форме таблицы и в виде графика.

1.18. Какова будет ошибка, если заменить распределение Ферми – Дирака распределением Максвелла – Больцмана при расчете вероятности заполнения энергетического уровня, лежащего выше уровня Ферми на $4 kT$, ниже на $2 kT$?

1.19. Ширина запрещенной зоны беспримесного полупроводника составляет 1 эВ . Вычислить вероятность заполнения электроном уровня вблизи дна зоны проводимости при температурах 0 и 290 K . Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет около 10 эВ . Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

1.20. В германии часть атомов замещена атомами сурьмы. Рассматривая электрон примесного атома, не участвующий в ковалентной связи, по модели Бора, оценить энергию его связи и эффективный радиус орбиты при $m_n^* = 0,25 m_0$.

1.21. Оценить величину неопределенности в измерении значения импульса частицы массой в 1 г , положение центра которой ограничено областью пространства диаметром 10^{-6} м . Чему равна минимальная энергия, которой могла бы обладать такая частица?

1.22. Вычислить эффективную плотность состояний в зоне проводимости и в валентной зоне кремния при комнатной температуре. Считать, что эффективные массы носителей выражаются через массу электрона следующим образом: $m_n^* = 1,1 m_0$; $m_p^* = 0,56 m_0$.

1.23. Рассчитать эффективную плотность состояний в зоне проводимости германия при температурах 10 и 100 К.

1.24. Рассматривая движение частицы в трехмерном потенциальном ящике, получить выражение для расчета числа состояний, энергии которых меньше некоторой заданной E^* . Указать n и e . Необходимо в k -пространстве построить сферу радиусом E^* и найти число возможных значений k внутри одного октанта этой сферы.

1.25. Вычислить значение энергии Ферми при температуре абсолютного нуля для валентных электронов натрия и лития. Почему значение энергии Ферми не зависит от размера образца металла? Эффективную массу электрона принять равной массе покоя.

1.26. Энергия электрона в валентной зоне гипотетического металла иллия с примитивной кубической решеткой имеет вид: $E = Ak^2 + B$, где $A = 10^{-38}$ Дж·м², $B = -12$ эВ, $k = 2\pi/\lambda$. Энергия ионизации свободного атома составляет 1 эВ, валентная зона является p -зоной, и состояния вплоть до $ka = (2\pi^2)^{1/3}$ заполнены (a – параметр ребра кристалла, равный 2Å). Вычислить: а) отношение m^*/m ; б) число валентных электронов, приходящихся на один атом металла.

1.27. Вычислить интервал энергии между соседними энергетическими уровнями свободных электронов в металле при температуре абсолютного нуля, приняв концентрацию свободных электронов вблизи уровня Ферми $n = 2 \cdot 10^{22}$ см⁻³.

2. РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В СОБСТВЕННЫХ И ПРИМЕСНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ. УСЛОВИЕ ЭЛЕКТРОНЕЙТРАЛЬНОСТИ. ЗАКОН ДЕЙСТВУЮЩИХ МАСС

Концентрации свободных равновесных носителей заряда в полупроводнике (электронов в зоне проводимости и дырок в

валентной зоне) определяются эффективной плотностью энергетических состояний в разрешенных зонах и их фактическим заполнением. Как указано ранее, значение эффективной плотности разрешенных состояний определяется с позиций квантовой механики соотношениями неопределенностей Гейзенберга, а вероятность их заполнения – статистической вероятностной функцией Ферми – Дирака.

Теория показывает, что в общем виде равновесная концентрация свободных электронов в зоне проводимости невырожденного полупроводника при любой температуре

$$n_0 = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right), \quad (2.1)$$

а равновесная концентрация свободных дырок в валентной зоне

$$p_0 = N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{kT}\right), \quad (2.2)$$

где N_c и N_v – эффективные плотности разрешенных состояний в зоне проводимости и валентной зоне соответственно; E_F – уровень (энергия) Ферми полупроводника (вероятностная характеристика материала); k – постоянная Больцмана; T – температура.

Для собственного полупроводника $n_0 = p_0 = n_i$. С учетом закона действующих масс

$$n_0 p_0 = n_i^2, \quad (2.3)$$

концентрация собственных носителей заряда определяется как квадратный корень из произведения (2.1) и (2.2):

$$n_i = (N_c N_v)^{1/2} \exp\left(-\frac{E_c - E_v}{2kT}\right) = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{\Delta E_0}{2kT}\right). \quad (2.4)$$

Из (2.1) – (2.3) следует, что концентрация свободных носителей заряда как собственных, обусловленных нарушением ковалентных связей, так и примесных, возникших в результате ионизации атомов примеси, возрастает при увеличении температуры по экспоненциальному закону. Предэкспоненциальные множители N_c и N_v – также зависят от температуры, но зависимость эта более слабая – степенная:

$$\begin{aligned} N_c &\sim T^{3/2} \\ N_v &\sim T^{3/2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Однако при решении задач эту зависимость следует учитывать.

Задачи

2.1. В германии n -типа концентрация донорной примеси составляет 10^{18} см^{-3} . Считая, что все атомы примеси ионизированы, найти концентрацию дырок при температуре 300 К.

2.2. Кристалл кремния содержит в качестве легирующей примеси 10^{-4} атомных процента мышьяка. Затем он равномерно легируется примесью фосфора с концентрацией $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и после этого равномерно легируется примесью бора с концентрацией 10^{18} см^{-3} . Последующий отжиг полностью активирует все примеси. Определить: а) какой тип проводимости будет иметь образец кремния; б) чему будет равна результирующая концентрация основных и неосновных носителей заряда. Концентрация атомов кремния составляет $5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

2.3. Определить концентрацию электронов и дырок в германии при 300 К для двух случаев: 1) полупроводник легирован примесью мышьяка с концентрацией 10^{17} см^{-3} ; 2) полупроводник легирован примесями мышьяка с концентрацией 10^{18} см^{-3} и индия с концентрацией $3,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Считать, что все атомы примесей ионизированы.

2.4. В кремнии содержится $2 \cdot 10^{-5}$ атомных процента примеси фосфора. Считая, что концентрация электронов определяется полностью ионизированными атомами донорной примеси, определить концентрацию электронов и дырок, а также удельное сопротивление полупроводника. Концентрация атомов в кристалле составляет $5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

2.5. Вычислить концентрацию дырок в германии, содержащем 10^{15} см^{-3} примеси фосфора и $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ примеси бора при комнатной температуре.

2.6. Образец полупроводника n -типа находится в состоянии термодинамического равновесия при комнатной температуре и характеризуется следующими параметрами: удельное сопротивление равно $5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$; подвижность электронов $1600 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$; подвижность дырок $600 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$; собственная концентрация носителей заряда $1,4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$; эффективная плотность состояний в зоне проводимости 10^{19} см^{-3} . Определить: а) концентрации электронов и дырок;

б) положение уровня Ферми; в) вероятность событий, состоящих в том, что донорный уровень занят и свободен, если $E_c - E_D = 0,05$ эВ.

2.7. Во сколько раз и как изменится концентрация электронов в беспримесном кремнии при его нагревании от 300 до 350 К?

2.8. Во сколько раз и как изменится концентрация дырок в собственном германии при охлаждении его от 300 до 200 К?

2.9. На сколько надо повысить температуру по сравнению с 300 К, чтобы концентрация свободных электронов в собственном германии увеличилась в 2 раза?

2.10. При температуре 300 К концентрация электронов в собственном полупроводнике составляла $2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, а при 350 К увеличилась до $6,4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Определить ширину запрещенной зоны материала.

2.11. Подсчитать число электронов на единицу объема в зоне проводимости собственного кремния при температуре 300 К.

3. ЗАВИСИМОСТЬ КОНЦЕНТРАЦИИ СВОБОДНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА И ПОЛОЖЕНИЯ УРОВНЯ ФЕРМИ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Температурную зависимость концентрации свободных носителей заряда, изображенную на рис.1, рассмотрим на примере полупроводника *n*-типа. Зависимость в общем виде имеет три участка: 1– примесной проводимости; 2– истощения примеси; 3 – собственной проводимости.

При температуре абсолютного нуля валентная зона полупроводника полностью заполнена, донорные примеси не ионизированы (донорные уровни заняты электронами), зона проводимости пуста. При повышении температуры начинается ионизация донорных атомов и электроны с донорных уровней переходят в зону проводимости (участок 1, рис.1). Чем выше температура, тем больше концентрация свободных электронов в зоне проводимости. Область примесной проводимости соответствует температуре, при которой $\Delta E_D > kT$ или $\Delta E_A > kT$ для полупроводников *n*- и *p*- типов проводимости соответственно.

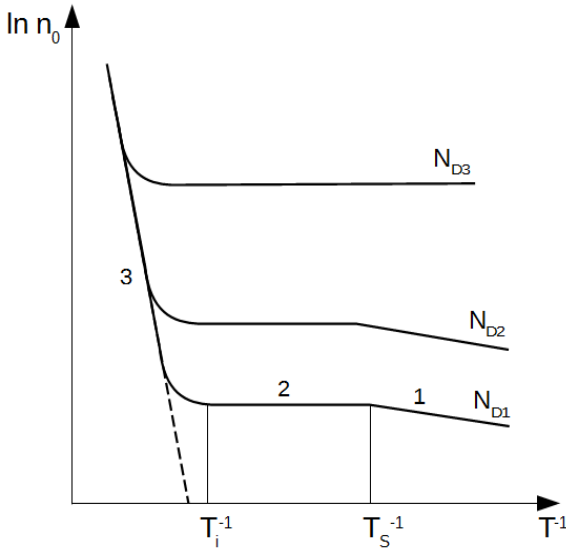


Рис. 1. Температурная зависимость концентрации свободных носителей заряда в полупроводнике n -типа: $N_{D1} < N_{D2} < N_{D3}$

При температуре T_S все донорные атомы оказываются ионизированными. Второй участок соответствует истощению примеси. Повышение температуры от T_S до T_i на участке 2 (рис. 1) не приводит к росту концентрации свободных носителей, поскольку тепловая энергия $kT > \Delta E_D$ (ΔE_D – энергия ионизации донорного атома), но еще недостаточна для возбуждения значительной собственной проводимости – нарушения ковалентных связей полупроводника и перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости.

При температуре T_i на участке 3 (рис.1) концентрация электронов, приобретающих энергию, достаточную для перехода из валентной зоны в зону проводимости, превышает концентрацию имеющихся в ней электронов, обусловленных ионизацией донорной примеси. При температурах, больших T_i , в полупроводнике наблюдается собственная проводимость. Критерием перехода участка истощения примеси к участку собственной проводимости при температуре T_i , являются соотношения $2n_i > N_D$ и $2n_i > N_A$ для полупроводников n - и p - типов проводимости соответственно.

Из рис.1 видно, что чем выше концентрация примеси, тем выше концентрация электронов на участках 1 и 2 и тем больше значения температур, соответствующих началу истощения примеси и

собственной проводимости. Кривая, изображенная на рис.1 для наибольшей концентрации примеси N_{D3} , характерна для вырожденных полупроводников. У таких полупроводников концентрация свободных носителей заряда вплоть до перехода к собственной проводимости не зависит от температуры, а уровень Ферми находится не в запрещенной зоне, а в зоне проводимости для полупроводника n -типа.

Установлено, что в области примесной проводимости (на участке 1 (рис. 1) от температуры абсолютного нуля до T_S температурная зависимость концентрации свободных электронов имеет следующий вид:

$$n_0 = \left(\frac{N_C N_D}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{E_C - E_D}{2kT} \right) = A \exp \left(-\frac{\Delta E_D}{2kT} \right), \quad (3.1)$$

где N_D – концентрация донорной примеси; $\Delta E_D = E_C - E_D$ – энергия ионизации донорной примеси; $A = \sqrt{\frac{N_C N_D}{2}}$.

Логарифмируя (2.1), получаем:

$$\ln n_0 = \ln A - \frac{\Delta E_D}{2kT}. \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) является уравнением прямой с отрицательным угловым коэффициентом, пропорциональным ΔE_D , наклон которой позволяет определить энергию ионизации примеси.

Температурная зависимость положения уровня Ферми на участке 1 выражается соотношением

$$E_F = \frac{E_C + E_D}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_D}{2N_C} \quad (3.3)$$

для полупроводника n -типа и

$$E_F = \frac{E_V + E_A}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{N_A}{2N_V} \quad (3.4)$$

для полупроводника p -типа.

На участке 2 (истощения примеси) концентрация свободных носителей заряда (электронов) в зоне проводимости постоянна и равна концентрации атомов донорной примеси $n_0 = N_D$. Для полупроводника p -типа концентрация свободных носителей заряда (дырок) в валентной зоне постоянна и равна концентрации атомов акцепторной примеси $p_0 = N_A$.

Температурная зависимость положения уровня Ферми на участке 2 выражается соотношением

$$E_F = E_C + kT \ln \frac{N_D}{N_C} \quad (3.5)$$

для полупроводника n -типа и

$$E_F = E_V - kT \ln \frac{N_A}{N_V} \quad (3.6)$$

для полупроводника p -типа.

На участке 3 при температурах, больших T_i (рис.1), в области собственной проводимости справедливо соотношение (2.4). Если обозначить $\sqrt{N_C N_V} = B$, после логарифмирования (2.4) получим

$$\ln n_i = \ln B - \frac{\Delta E_0}{2kT}. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) так же, как (3.2), является уравнением прямой с отрицательным угловым коэффициентом. Тангенс угла наклона прямой пропорционален ширине запрещенной зоны полупроводника ΔE_0 .

Температурная зависимость концентрации свободных носителей заряда в полупроводниках, построенная в координатах $\ln n_0 = f(T^{-1})$, наглядно показывает характер физических процессов, происходящих при изменении температуры, и позволяет рассчитать параметры полупроводникового материала: энергию ионизации донорной примеси ΔE_D и энергию, необходимую для разрыва ковалентных связей, – ширину запрещенной зоны ΔE_0 .

Температурная зависимость положения уровня Ферми на участке 3 выражается следующим соотношением:

$$E_F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_V}{N_C}. \quad (3.8)$$

Отметим, что температурная зависимость концентрации свободных носителей заряда – дырок для полупроводника p -типа выглядит аналогично изображенной на рис.1. Интерпретация зависимости на участке примесной проводимости проводится на основе представлений о захвате акцепторными атомами электронов из валентной зоны и об образовании в ней свободных дырок.

Расчет концентрации свободных равновесных электронов или дырок можно провести, зная собственную концентрацию и положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны, на основе следующих соотношений:

$$n_0 = n_i e^{\frac{E_F - E_i}{kT}}; \quad (3.9)$$

$$p_0 = n_i e^{-\frac{E_F - E_i}{kT}}. \quad (3.10)$$

Экспоненциальный закон изменения концентрации свободных носителей заряда при изменении температуры обуславливает принципиальное различие между температурной зависимостью проводимости невырожденных полупроводников и металлов. У последних концентрация свободных носителей от температуры практически не зависит.

Задачи

3.1. Рассчитать положение уровня Ферми в германии электронного типа проводимости при температуре 300 К и концентрации донорной примеси: а) 10^{15} ; б) 10^{17} см⁻³. Изобразить энергетические зонные диаграммы полупроводника.

3.2. Найти положение уровня Ферми в кремнии при температурах 50 и 500 К и следующих концентрациях примесей: 1) 10^{23} атомов бора в 1 м³; 2) 10^{22} атомов сурьмы в 1 м³. Энергии ионизации примесей: $\Delta E_{In}=0,041$ эВ; $\Delta E_{sb}=0,039$ эВ. Изобразить энергетические зонные диаграммы полупроводника.

3.3. Найти равновесную концентрацию электронов и дырок, а также положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны и дна зоны проводимости в кремнии, содержащем $8 \cdot 10^{16}$ см⁻³ атомов мышьяка и $2 \cdot 10^{16}$ см⁻³ атомов бора, при комнатной температуре. Изобразить энергетическую зонную диаграмму полупроводника в масштабе.

3.4. Найти концентрации электронов и дырок, а также положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны в германии, находящемся в состоянии термодинамического равновесия, при следующих значениях температуры: 0, 100, 200, 300 400 и 600 К. Кристалл легирован акцепторной примесью с концентрацией 10^{15} см⁻³, $\Delta E_A=0,02$ эВ. Считать, что при $T=100$ К ионизированы 50 %, а при более высоких температурах – 100 % примесных атомов. Изобразить энергетические зонные диаграммы полупроводника при разных значениях температуры.

3.5. Определить энергию ионизации донорной примеси в кремнии с удельным сопротивлением, равным $5000 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, полагая, что при температуре $T=200 \text{ К}$ ионизировано 60 % донорной примеси.

3.6. Концентрация атомов в кристалле германия равна $4,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, $E_C - E_D = 0,01 \text{ эВ}$. Определить положение уровня Ферми при температуре 300 К, если на 10^6 атомов германия приходится 1 атом примеси. Изобразить энергетическую зонную диаграмму полупроводника в масштабе.

3.7. Найти положение уровня Ферми в германии, содержащем 10^{23} атомов мышьяка и $5 \cdot 10^{22}$ атомов галлия в 1 м^3 при температурах 10 и 300 К. Донорный уровень мышьяка расположен на 0,013 эВ ниже дна зоны проводимости. Изобразить энергетические зонные диаграммы полупроводника при указанных температурах.

3.8. В кристалле кремния на каждые 10^8 атомов полупроводника приходится 1 атом акцепторной примеси. Найти положение уровня Ферми относительно потолка валентной зоны при комнатной температуре. Решить задачу при условии, что на каждые 10^3 атомов кремния приходится 1 атом акцепторной примеси. При какой концентрации акцепторной примеси положение уровня Ферми совпадает с потолком валентной зоны?

3.9. Определить положение уровня Ферми при комнатной температуре для полупроводникового соединения InSb , если ширина запрещенной зоны собственного полупроводника составляет 0,4 эВ, а отношение эффективной массы дырки к эффективной массе электрона равно 2. Изобразить энергетическую зонную диаграмму.

3.10. Образец кремния электронного типа проводимости имеет при комнатной температуре удельное сопротивление, равное $5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$. Найти концентрацию дырок для состояния термодинамического равновесия при температурах 27, 100 и 500 °С.

3.11. Вычислить положение уровня Ферми и удельную электропроводность кристалла кремния с концентрацией донорной примеси, равной 10^{16} см^{-3} и $\Delta E_D = 0,012 \text{ эВ}$, при температурах 10, 300 и 800 К. Изобразить зонные диаграммы полупроводника при указанных температурах.

3.12. Кристалл кремния электронного типа проводимости равномерно легирован примесью мышьяка с концентрацией 10^{16} см^{-3} , а кристалл кремния дырочного типа проводимости равномерно легирован примесью бора с концентрацией 10^{15} см^{-3} . Для каждого образца полупроводникового материала определить:

а) равновесную концентрацию неосновных носителей заряда при 300 К, предполагая, что все примеси полностью ионизированы;

б) положение уровня Ферми относительно края валентной зоны в каждом материале при 300 К; положение уровня Ферми при условии, что оба типа примесей имеются в одном образце;

в) температуру, при которой ионизирована половина примесных атомов;

г) температуру, при которой собственная концентрация превышает примесную в 10 раз.

Для задания б) изобразить энергетические зонные диаграммы.

3.13. Рассчитать значения максимума уровня Ферми в запрещенной зоне полупроводника и соответствующей ему температуры при концентрации донорной примеси, равной 10^{16} см^{-3} ; энергии ионизации доноров, равной 0,02 эВ и $m_n^* = 0,3m_0$.

3.14. Определить критическую концентрацию донорной примеси, выше которой наступает вырождение полупроводника при $m_n^* = 0,2m_0$; $\Delta E_D = 0,01 \text{ эВ}$.

3.15. Найти концентрации электронов и дырок, а также положение уровня Ферми для германия, содержащего $5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ атомов мышьяка при 40 и 500 К. Энергия ионизации примеси составляет 0,013 эВ. Изобразить зонные диаграммы.

3.16. Определить концентрации электронов и дырок, а также положение уровня Ферми в кремнии, легированном атомами мышьяка с концентрацией $2 \cdot 10^{16}$ и бора с концентрацией $9 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при 250 К.

3.17. Найти энергию ионизации акцепторной примеси с концентрацией 10^{15} см^{-3} в кремнии с удельным сопротивлением $6800 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ при 70 К.

3.18. Рассчитать положение уровня Ферми в собственном кремнии при 700 К, если эффективная масса электрона в 5 раз больше эффективной массы дырки. Изобразить зонную диаграмму.

3.19. В вырожденном полупроводнике концентрация свободных электронов равна $8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Найти положение уровня Ферми, приняв $m_n^* = 0.33m_0$. Изобразить зонную диаграмму.

3.20. Найти температуру, при которой уровень Ферми занимает максимальное положение в полупроводнике электронного типа проводимости с концентрацией донорной примеси 10^{19} см^{-3} , если эффективная масса электрона составляет половину массы покоя.

3.21. Найти число атомов пентавалентной примеси на единицу объема кремния, необходимое для сдвига уровня Ферми к дну зоны проводимости при комнатной температуре.

3.22. При какой концентрации свободных электронов в кристалле температура вырождения электронного газа в нем равна 0°C ?

4. КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ

К кинетическим относятся явления в твердом теле, происходящие при отсутствии термодинамического равновесия, в условиях воздействия таких внешних факторов, как электрическое или магнитное поле, электромагнитное или ионизирующее излучение и др. Основные кинетические явления в твердом теле – электропроводность, гальваномагнитные и термоэлектрические эффекты.

Удельная электрическая проводимость любого материала определяется концентрацией и подвижностью свободных носителей заряда, значения которых зависят от температуры.

Подвижность μ свободных носителей заряда характеризует их рассеяние и определяется как коэффициент пропорциональности между дрейфовой скоростью $v_{\text{др}}$ и напряженностью электрического поля $\mathcal{E}$:

$$v_{\text{др}} = \mu \mathcal{E}. \quad (4.1)$$

Рассеяние свободных носителей заряда, т.е. изменение их скорости или направления движения, может происходить из-за наличия в реальных кристаллах полупроводников дефектов структуры (к ним относятся, например, атомы и ионы примеси), тепловых колебаний кристаллической решетки.

Установлено, что при рассеянии носителей заряда только на ионах примеси подвижность

$$\mu \sim T^{3/2}. \quad (4.2)$$

Увеличение подвижности свободных носителей заряда с повышением температуры объясняется тем, что чем выше температура, тем больше тепловая скорость движения свободного носителя и тем меньше времени он будет находиться в кулоновском поле иона, изменяющего траекторию его движения, а значит, иметь меньшее рассеяние и более высокую подвижность. По мере повышения температуры все более существенное значение приобретает рассеяние на тепловых колебаниях кристаллической решетки, которое при определенной температуре становится преобладающим.

Тепловые колебания кристаллической решетки увеличиваются с ростом температуры, растет и рассеяние носителей, а их подвижность уменьшается. Установлено, что в атомных полупроводниках при рассеянии свободных носителей заряда преимущественно на тепловых колебаниях решетки

$$\mu \sim T^{-3/2}. \quad (4.3)$$

С повышением температуры при рассеянии на ионах примеси подвижность увеличивается, а затем из-за возрастающих колебаний кристаллической решетки и обусловленного ими рассеяния – уменьшается. Величина и положение максимума кривой $\mu(T^{-1})$ зависят от концентрации примеси. С ее увеличением максимум смещается в область более высоких температур, а вся кривая – вниз по оси ординат. При концентрации примеси, соответствующей вырожденному полупроводнику, подвижность уменьшается с ростом температуры аналогично тому, как это происходит в проводниковых материалах.

При очень низких температурах, когда тепловые колебания кристаллической решетки малы, а примесные атомы слабо ионизированы, рассеяние свободных носителей в основном происходит на нейтральных атомах примеси. При таком механизме рассеяния подвижность не зависит от температуры, а определяется концентрацией примеси и дефектов структуры кристалла.

Итак, концентрация свободных носителей заряда в полупроводниках увеличивается с ростом температуры по экспоненциальному закону, а температурная зависимость

подвижности имеет в общем виде характер кривой с максимумом и степенной закон изменения.

В общем случае удельная электрическая проводимость σ полупроводника, в котором носителями заряда являются свободные электроны с подвижностью μ_n и свободные дырки с подвижностью μ_p , равна:

$$\sigma = n_0 e \mu_n + p_0 e \mu_p, \quad (4.4)$$

где e – элементарный заряд.

Для собственного полупроводника

$$\sigma_i = en_i(\mu_n + \mu_p) = e(\mu_n + \mu_p)(N_c N_v)^{1/2} \exp\left(-\frac{\Delta E_0}{2kT}\right). \quad (4.5)$$

Учитывая, что степенная зависимость математически слабее экспоненциальной, можно записать:

$$\sigma_i = C \exp\left(-\frac{\Delta E_0}{2kT}\right). \quad (4.6)$$

Аналогично для примесного полупроводника n -типа в области примесной проводимости:

$$\sigma_n = en_0 \mu_n = e \mu_n \left(\frac{N_c N_D}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\Delta E_D}{2kT}\right) = D \exp\left(-\frac{\Delta E_D}{2kT}\right), \quad (4.7)$$

а p -типа:

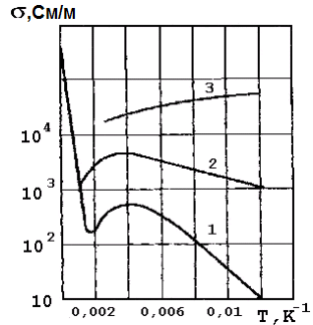
$$\sigma_p = G \exp\left(-\frac{\Delta E_A}{2kT}\right). \quad (4.8)$$

Соотношения (4.7) и (4.8) справедливы лишь до тех пор, пока не наступит полная ионизация примеси. Получив экспериментальную зависимость удельной проводимости от температуры в виде $\ln \sigma(T^{-1})$, можно определить ширину запрещенной зоны полупроводника и энергию ионизации примеси по соотношениям (4.6) – (4.8).

Рассмотрим экспериментальные кривые температурной зависимости удельной электрической проводимости кремния, содержащего различное количество донорной примеси (рис. 2).

Повышение удельной проводимости кремния с увеличением температуры в области низких температур обусловлено увеличением концентрации свободных носителей заряда – электронов за счет ионизации донорной примеси. При дальнейшем повышении температуры наступает область истощения примеси – полная ее ионизация. Собственная же электропроводность кремния заметно еще не проявляется.

Рис. 2. Температурная зависимость удельной электрической проводимости кремния, содержащего различное количество донорной примеси N_D :
 1 – $4,8 \cdot 10^{23}$; 2 – $2,7 \cdot 10^{24}$;
 3 – $4,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$



В условиях истощения примеси концентрация свободных носителей заряда практически не зависит от температуры и температурная зависимость удельной проводимости полупроводника определяется зависимостью подвижности носителей от температуры. Наблюдаемое в этой области уменьшение удельной проводимости кремния с ростом температуры происходит за счет снижения подвижности при рассеянии свободных носителей заряда на тепловых колебаниях кристаллической решетки.

Однако возможен и такой случай, когда область истощения примеси оказывается в интервале температур, где основным механизмом рассеяния является рассеяние на ионах примеси. Тогда удельная проводимость полупроводника с повышением температуры будет увеличиваться: $\sigma \sim T^{3/2}$.

Резкое увеличение удельной проводимости при дальнейшем росте температуры (рис. 2) соответствует области собственной электропроводности, в которой концентрация увеличивается экспоненциально [соотношение (2.4)], а подвижность снижается по степенному закону (4.3).

У вырожденного полупроводника (кривая 3 на рис. 2) концентрация свободных носителей заряда не зависит от температуры и температурная зависимость проводимости определяется зависимостью их подвижности от температуры.

Задачи

4.1. Образец кремния находится при комнатной температуре. Вычислить: а) удельное сопротивление собственного полупроводника; б) удельное сопротивление примесного полупроводника, если концентрация донорных атомов составляет $3,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

4.2. Вычислить удельное сопротивление германия p -типа с концентрацией дырок, равной $3 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$. Сравнить полученное значение с удельным сопротивлением германия n -типа при той же концентрации электронов.

4.3. При комнатной температуре концентрация дырок в полупроводнике равна 10^{14} см^{-3} , а концентрация электронов – $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Во сколько раз и как изменится удельное сопротивление кристалла, если провести дополнительное легирование акцепторной примесью с концентрацией $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$? Считать примеси полностью ионизированными, подвижности электронов и дырок – равными. Изобразить энергетические зонные диаграммы полупроводника до и после дополнительного легирования.

4.4. К пластине длиной 5 см, изготовленной из нелегированного кремния, приложено напряжение 50 В. За какое время электрон пройдет через весь образец (осуществится перенос заряда, эквивалентного одному электрону)?

4.5. Вычислить скорость дрейфа электронов и дырок в германии при комнатной температуре в поле напряженностью 1000 В/м.

4.6. Кристалл кремния электронного типа проводимости при комнатной температуре имеет удельное сопротивление $10 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Найти скорости дрейфа дырок и электронов при плотности тока 1 мА/см^2 .

4.7. Вычислить отношение дрейфовых токов электронов и дырок при комнатной температуре: а) для собственного германия; б) собственного кремния; в) кремния n -типа с удельным сопротивлением $5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$; в) кремния p -типа с удельным сопротивлением $5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$.

4.8. Полупроводниковый кристалл прямоугольной формы размерами $0,2 \times 0,2 \times 0,05 \text{ см}$ содержит 10^{21} свободных электронов в 1 м^3 при комнатной температуре. К двум противоположным узким граням приложено напряжение 20 В. Вычислить величину тока, полагая подвижность носителей заряда, равной $0,03 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

4.9. В образце полупроводника действуют два механизма рассеяния носителей заряда. Если бы действовал только первый

механизм, то подвижность была бы равна $800 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Если бы действовал только второй механизм, то подвижность была бы равна $200 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Какова подвижность носителей заряда с учетом обоих механизмов рассеяния?

4.10. Беспримесный полупроводник при комнатной температуре имеет удельное сопротивление, равное $2000 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Рассчитать концентрации носителей заряда при подвижности электронов, равной 2000 , а дырок - $800 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Какую часть электропроводности составляет электронная?

4.11. Какую часть электропроводности составляет дырочная в кремнии с собственной проводимостью при температурах 100 и 500 К ?

4.12. Найти минимально возможную удельную электропроводность кремния при комнатной температуре. Рассчитать концентрации электронов и дырок для найденного значения удельной электропроводности.

4.13. Вычислить отношение полного тока электронной проводимости к полному току дырочной проводимости: а) в беспримесном германии; б) в германии p -типа с удельным сопротивлением $0,005 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

4.14. При температуре 300 К удельное сопротивление беспримесного полупроводника составляло $10 \text{ Ом}\cdot\text{м}$, а при 400 К оказалось равным $0,3 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Найти ширину запрещенной зоны материала.

4.15. Вычислить ширину запрещенной зоны теллура, если после нагревания от 300 до 400 К его электропроводность увеличилась в $5,2$ раза.

4.16. Какова ширина запрещенной зоны беспримесного полупроводника, если после нагревания от 100 до 400 К его электропроводность увеличилась в 820 раз?

4.17. Удельное сопротивление образца кремния электронного типа проводимости составляет $7500 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ при температуре 50 К , а концентрация донорных атомов равна $5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Рассчитать энергию ионизации донорной примеси, если известно, что указанная

температура соответствует участку примесной проводимости полупроводника.

4.18. Среднее время жизни электрона в образце германия электронного типа проводимости составляет при комнатной температуре 10^{-12} с. Определить, насколько увеличится кинетическая энергия электрона за время свободного пролета в электрическом поле напряженностью 10^5 В/м. Какова напряженность электрического поля, необходимая для того, чтобы за время свободного пролета электрона в этом поле сообщить ему кинетическую энергию, достаточную, чтобы «выбить» электрон: а) с донорного уровня; б) из валентной зоны и «перебросить» его в зону проводимости. Для простоты принять эффективную массу электрона равной массе покоя.

5. ТЕПЛОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Кристаллическая структура – равновесное состояние системы атомов, отвечающее минимуму потенциальной энергии. В состоянии покоя сумма сил, действующих на каждый атом кристалла со стороны других атомов, равна нулю. Если вывести эту систему из положения равновесия, в кристалле возникнут колебания. Смещения атомов в процессе колебаний тем больше, чем выше температура, но они гораздо меньше постоянной решетки вплоть до температуры плавления, когда твердое тело превращается в жидкость.

Вследствие взаимного влияния их друг на друга характер этих колебаний является крайне сложным и точное описание его представляет огромные трудности. Поэтому прибегают к приближенным методам и различного рода упрощениям в решении этой задачи.

При смещении атома относительно других атомов кристалла возникает сила, стремящаяся вернуть его в равновесное положение. Если смещения невелики, можно разложить зависимость силы от смещений в ряд и ограничиться линейными по смещениям членами. Тогда колебания кристаллической решетки будут линейными, то есть будут описываться системой линейных дифференциальных уравнений.

Такая система уравнений обладает важным свойством: если есть несколько решений, то их сумма также является решением и сумма двух возможных колебаний – тоже колебание. Эта система может быть решена, если известна зависимость силы, действующей на атом, от его смещения, а основные характеристики линейных колебаний могут

быть предсказаны на основании одних только свойств симметрии кристалла.

Для характеристики волновых процессов удобно пользоваться волновым вектором $\vec{q}$, по направлению совпадающим с направлением распространения колебаний и по величине равным:

$$\vec{q} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (5.1)$$

где λ — длина волны. Минимальная длина волны ограничена постоянной кристаллической решетки a , максимальная — размером кристалла L :

$$\lambda_{\min} = 2a, \quad \lambda_{\max} = 2L. \quad (5.2)$$

Этим длинам соответствуют частоты колебаний

$$\nu_{\min} = \frac{v}{2L}, \quad \nu_{\max} = \frac{v}{2a}. \quad (5.3)$$

Акустические колебания характерны для примитивных кристаллических решеток, состоящих из одинаковых атомов, и играют основную роль в определении тепловых свойств кристаллов — теплоемкости, теплопроводности, теплового расширения. Оптические колебания (фононы) играют основную роль в процессах поглощения и взаимодействия света с кристаллом. В частности, поглощение инфракрасного излучения ионными кристаллами обусловлено именно оптическими колебаниями решетки. Оптические колебания возникают не только в цепочке, состоящей из разнородных атомов, но и в том случае, когда сложная цепочка состоит из двух и более простых, составленных из одинаковых атомов и вставленных друг в друга (решетка с базисом).

Температура Дебая T_D — температура, при которой возбуждаются все моды колебаний в данном твёрдом теле, включая колебания с максимальной частотой. Дальнейшее увеличение температуры не приводит к появлению новых мод колебаний (увеличению частоты), а лишь ведёт к увеличению амплитуд уже существующих, то есть средняя энергия колебаний с ростом температуры растёт. Температура Дебая определяется следующим соотношением:

$$kT_D = h\nu_{\max}. \quad (5.4)$$

Температура Дебая введена впервые П. Дебаем в его теории теплоёмкости, это физическая константа вещества, характеризующая многие свойства твёрдых тел: теплоёмкость, теплопроводность, уширение линий рентгеновских спектров, упругие свойства и т. п.

В результате взаимодействия микрочастицы, обладающей энергией $E(\bar{k})$, с фононом - квантом энергии тепловых колебаний $h\nu(\bar{q})$ (поглощением или испусканием) она приобретает энергию $E(\bar{k}')$:

$$E(\bar{k}') = E(\bar{k}) \pm h\nu(\bar{q}). \quad (5.5)$$

Теплоемкостью называется количество теплоты δQ , переданное твердому телу при бесконечно малом изменении его температуры δT , отнесенное к величине этого изменения. Молярная теплоемкость - термодинамическая величина, определяемая выражением

$$C_M = \frac{dE}{dT}, \quad (5.6)$$

т.е. отношение приращения тепловой энергии dE к вызвавшему его приращению температуры dT при постоянном объеме.

Зависимость теплоемкости твердых тел от температуры приведена на рис. 3.

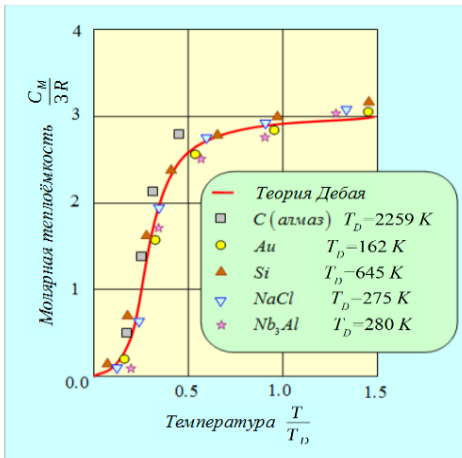


Рис.3. Сравнение теории теплоемкости Дебая с экспериментальными данными: показаны вещества с заметно различающимися значениями дебаевской температуры и разным составом молекул ($n_a=2$ для NaCl и $n_a=4$ для Nb_3Al), но все точки лежат достаточно близко от теоретической кривой

Температура Дебая разделяет две температурные области. В области низких температур на энергию и теплоемкость решетки сильное влияние оказывают квантовые эффекты. Зависимость теплоемкости твердых тел от температуры в низкотемпературной области описывается моделями Эйнштейна либо Дебая – Борна. В области высоких температур квантовые эффекты не существенны, и теплоемкость может быть вычислена в классическом приближении (по

закону Дюлонга – Пти). Для большинства кристаллов температура Дебая лежит в интервале от 100 до 300 К. Соотношение, позволяющее рассчитать молярную теплоемкость C_M по модели Эйнштейна, представлено ниже:

$$C_M^E = 3R \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{T_E}{T}}}{\left(e^{\frac{T_E}{T}} - 1 \right)^2} . \quad (5.7)$$

Здесь T_E – характеристическая температура Эйнштейна, $R = 8,31$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная. Расчет молярной теплоемкости C_M по модели Дебая-Борна проводят по соотношению

$$C_M = \frac{12\pi^4 R}{5} \cdot \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 , \quad (5.8)$$

где T_D – характеристическая температура Дебая.

Термоэлектрические явления — совокупность явлений, связанных с потоками носителей заряда, вызванных градиентом температуры и переносом тепла электрическим током.

К термоэлектрическим явлениям относят эффекты Зеебека, Пельтье и Томсона. Эффект *Зеебека* состоит в возникновении термо-э.д.с. в замкнутой электрической цепи, составленной из разных материалов, в условиях, когда места контактов поддерживаются при разных температурах. В небольшом интервале температур термо-э.д.с. $\mathcal{E}_T$ можно считать пропорциональной разности температур ΔT с коэффициентом пропорциональности α (дифференциальная термо-э.д.с., удельная термо-э.д.с.):

$$\mathcal{E}_T = \alpha(T_2 - T_1) = \alpha \Delta T . \quad (5.9)$$

Возникновение термоэлектродвижущей силы обусловлено тремя причинами: диффузией электронов (или дырок) из более нагретой области в холодную за счет градиента концентрации, зависимостью контактной разности потенциалов от температуры и увлечением электронов фононами в процессе диффузии.

Эффект *Пельтье* состоит в охлаждении или нагревании контакта двух материалов при протекании через него постоянного тока (рис. 4). Если напряженность внешнего электрического поля ε направлена так, как изображено на рис. 4, то перенос носителей тока через контакт (электрический ток) будет связан с переходом электронов из полупроводника в металл. Однако энергия электронов в зоне

проводимости полупроводника больше, чем у электронов проводимости в металле. Поэтому электроны, переходя из полупроводника в металл, передадут избыток энергии кристаллической решетке в области контакта. В результате этого перенос электронов из полупроводника в металл будет сопровождаться выделением тепла на контакте и его нагревом.

При противоположном направлении напряженности внешнего электрического поля протекание электрического тока будет связано с переходом электронов из металла в полупроводник, т.е. с уровней с меньшей энергией на уровни с большей энергией. Энергию, необходимую для этого, электроны получают от кристаллической решетки в области контакта, что приводит к его охлаждению.

Эффект *Томсона* состоит в выделении или поглощении тепла, дополнительного к теплу Джоуля – Ленца, при протекании постоянного тока по однородному полупроводнику, в котором имеется градиент температуры.

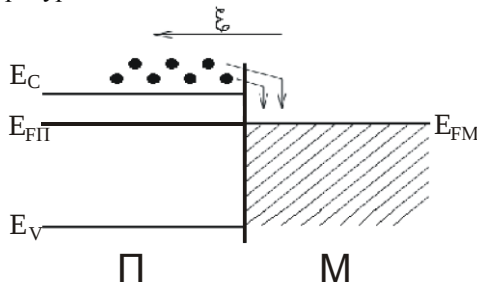


Рис. 4. Схема контакта электронного полупроводника с металлом, поясняющая эффект Пельтье без учета контактной разности потенциалов

Эффекты Зеебека и Пельтье наблюдаются в металлах и полупроводниках. В полупроводниках соответствующие величины, например термо-э.д.с., обычно на несколько порядков превышают таковые в металлах. Поэтому эффекты Зеебека и Пельтье в полупроводниках нашли большое практическое применение. В частности, эффект Зеебека используется для создания источников питания. К.п.д. полупроводниковых термогенераторов достигает 15 – 20 %. Термоэлектрические явления используются также в технике измерения электрофизических параметров полупроводников для определения типа их проводимости. Термоэлектрический эффект Зеебека применяется для измерения температуры (термопары) и при других измерениях, которые могут быть сведены к измерению

температуры. Эффект Пельтье используется при создании компактных холодильных установок.

Для вычисления дифференциальной термо-э.д.с. на контакте двух металлов или сплавов следует воспользоваться соотношением

$$\alpha = -\frac{k}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}, \quad (5.10)$$

где n_1 и n_2 - концентрации электронов в 1-м и 2-м проводниках соответственно, k – постоянная Больцмана, e – заряд электрона.

Для расчета дифференциальной термо-э.д.с. на контакте полупроводника с металлом применяют формулы Н. Писаренко. Установлено, что в этом случае вкладом металла в термо-э.д.с. можно пренебречь. Величина дифференциальной термо-э.д.с. в полупроводниках составляет десятки мВ/К, а в проводниках – мкВ/К. Для вычисления термо-э.д.с. полупроводников с электронным и дырочным типами проводимости применяют формулы Н. Писаренко в двух равноценных модификациях:

$$\alpha_n = -\frac{k}{e} \left(r + 2 + \ln \frac{N_c}{n} \right); \quad (\alpha_n < 0) \quad , \quad (5.11)$$

$$\alpha_p = \frac{k}{e} \left(r + 2 + \ln \frac{N_v}{p} \right); \quad (\alpha_p > 0) \text{ и}$$

$$\alpha_n = -\left(\frac{E_c - E_F}{eT} + \frac{(r+2)k}{e} \right); \quad (5.12)$$

$$\alpha_p = \frac{E_v - E_F}{eT} + \frac{(r+2)k}{e}.$$

Соотношения (5.12) позволяют объяснить температурную зависимость термо-э.д.с. полупроводников с электронным и дырочным типами проводимости и разными концентрациями легирующей примеси, приведенную на рис. 5, на основе сопоставления с температурной зависимостью уровня Ферми.

Дифференциальная термо-э.д.с. полупроводника со смешанной электронно-дырочной проводимостью определяется как

$$\alpha = \frac{\alpha_p \mu_p p + \alpha_n \mu_n n}{\mu_p p + \mu_n n}, \quad (5.13)$$

а собственной

$$\alpha_i = \frac{\alpha_p \mu_p + \alpha_n \mu_n}{\mu_p + \mu_n}. \quad (5.14)$$

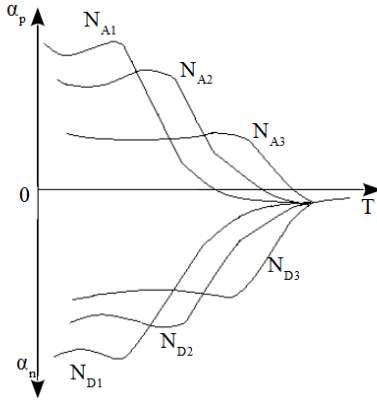


Рис. 5. Зависимость термо-э.д.с. полупроводников с электронным и дырочным типами проводимости и разными концентрациями легирующей примеси от температуры

Как следует из (5.13), при переходе к собственной проводимости полупроводника p -типа знак дифференциальной термо-э.д.с. изменяется на отрицательный (рис. 5), поскольку практически всегда $\mu_n > \mu_p$. Для собственных полупроводников α_i имеет небольшую отрицательную по знаку величину (рис. 5).

Для расчета дифференциальной термо-э.д.с. полупроводника с собственной проводимостью применяют приближенное соотношение

$$\alpha_i = -\frac{k}{e} \left(\frac{b-1}{b+2} \right) \left(2 + \frac{\Delta E_0}{2k\Delta T} \right), \quad (5.15)$$

где $b = \frac{\mu_n}{\mu_p}$.

Задачи

5.1. Представим себе атомы в кристалле шариками, связанными между собой пружинами. Пусть атом меди на пружине, обладающей коэффициентом жесткости, эквивалентным частоте колебаний 10^{13} с^{-1} , находится в положении максимального удаления от связанного с ним другого атома меди. Найти значение «нулевой» амплитуды колебаний. Из условия задачи следует, что атомы в реальном кристалле никогда не находятся точно в узлах решетки даже при нулевой температуре, а участвуют в случайных движениях, источником которых является действие принципа неопределенности.

5.2. Исходя из условия предыдущей задачи, найти соотношение между коэффициентом жесткости пружины и массой атома, такое, чтобы амплитуда «нулевых колебаний» была по порядку величины

равна параметру кристаллической решетки $4\text{\AA}$. Твердое тело такого рода не сможет сохранять свою решеточную структуру и даже при температуре абсолютного нуля останется в жидком состоянии. К числу таких веществ, по-видимому, относится гелий. Атомы гелия обладают малой массой, сила химической связи между атомами слаба; даже при температурах, близких к абсолютному нулю, амплитуда «нулевых колебаний» близка по величине к расстоянию между атомами.

5.3. Для образца твердого тела длиной L фонон с наибольшей длиной волны $\lambda_{\text{макс}}$ определяется соотношением $\lambda_{\text{макс}} = 2L$. У фонона с самой короткой длиной волны ее значение определяется как $\lambda_{\text{мин}} = c/v$, где $c \approx 3 \text{ км/с}$ – скорость звука в твердом теле, v – эйнштейновская частота колебаний кристаллической решетки. Рассчитать приближенное значение минимальной длины волны для типичного металла. Сравнить найденное значение со средним межатомным расстоянием в твердом теле, приблизительно равным $3 \text{\AA}$.

5.4. Показать, что при высоких температурах квантовое выражение для средней энергии гармонического осциллятора переходит в классическое.

5.5. Оценить максимальные значения энергии и импульса фонона в образце меди с параметром элементарной ячейки $a = 0,3 \text{ нм}$ при скорости распространения колебаний кристаллической решетки, равной 4 км/с .

5.6. Определить усредненную скорость звука в кристалле, характеристическая температура которого равна 300 К . Межатомное расстояние в кристалле равно $0,25 \text{ нм}$.

5.7. Определить приближенно скорость звука в кристалле алмаза, зная, что температура Дебая равна 1860 К , а среднее расстояние между атомами составляет $1,54 \text{\AA}$.

5.8. Найти и выразить в электрон-вольтах энергию фонона, соответствующую частоте Дебая, если характеристическая температура равна 250 К .

5.9. Определить квазиимпульс фонона, соответствующего частоте $\omega = 0,1\omega_{\text{макс}}$, где $\omega_{\text{макс}}$ – максимальная частота колебаний кристаллической решетки. Усредненная скорость звука в кристалле

равна 1380 м/с, температура Дебая соответствует 100 К. Дисперсией звуковых волн в кристалле пренебречь.

5.10. Длина волны фонона, соответствующего $\omega = 0,01\omega_{\max}$, равна 0,52 нм. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить характеристическую температуру Дебая, если усредненная скорость звука в кристалле равна 4,8 км/с.

5.11. Найти частоту тепловых колебаний атомов серебра по модели Эйнштейна, если характеристическая температура кристалла составляет 165 К.

5.12. Вычислить усредненную скорость фононов (скорость звука) в серебре. Известны: модуль продольной упругости (модуль Юнга) $E = 74$ ГПа; модуль поперечной упругости (модуль сдвига) $G = 27$ ГПа; плотность серебра $\rho = 10,5$ г/см³.

5.13. Характеристическая температура золота равна 162 К, плотность – 19,3 г/см³, параметр кристаллической решетки – 0,3 нм. Определить модуль продольной упругости кристалла (модуль Юнга).

5.14. Определить максимальную частоту собственных колебаний атомов в кристалле золота, если характеристическая температура кристалла составляет 162 К.

5.15. Оценить скорость распространения акустических колебаний в кристаллической решетке алюминия с параметром элементарной ячейки $a = 0,3$ нм, характеристическая температура которого составляет 396 К.

5.16. Классическая теория дает значение удельной теплоемкости, равное 6 кал/моль·К. Используя это значение, рассчитать тепловую энергию одного моля металла при 300 К.

5.17. Дебаевская температура для золота составляет примерно 170 К. Оценить значение тепловой энергии одного моля золота при 300 К и сравнить с результатом, полученным в предыдущей задаче. Какова величина ошибки при расчете по классической теории?

5.18. Определить характеристическую температуру кристалла, теплоемкость которого составляет 217 Дж/кмоль·град при температуре 14 К.

5.19. Удельные теплоемкости свинца и алюминия при постоянном объеме и некоторой температуре составляют 126 и 896 Дж/г·К соответственно. Выполняется ли для указанных твердых тел закон Дюлонга – Пти? Вычислить для каждого из металлов молярные теплоемкости и сравнить их со значениями, получаемыми по закону Дюлонга – Пти.

5.20. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если при вычислении молярной теплоемкости кристалла вместо значения, даваемого моделью Эйнштейна при характеристической температуре, воспользоваться значением, получаемым по закону Дюлонга – Пти.

5.21. Молярная теплоемкость кристалла с одномерной решеткой выражается формулой

$$C_M = 3R \left(2 \frac{T}{T_D} \int_0^{T_D/T} \frac{x dx}{e^x - 1} - \frac{T_D/T}{e^{T_D/T} - 1} \right).$$

Найти предельное выражение для C_M при низких температурах ($T \ll T_D$). Известно значение интеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi}{6}.$$

5.22. Молярная теплоемкость кристалла с двумерной решеткой выражается формулой

$$C_M = 3R \left(6 \left(\frac{T}{T_D} \right)^2 \int_0^{T_D/T} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} - \frac{2(T_D/T)}{e^{T_D/T} - 1} \right).$$

Найти предельное выражение молярной теплоемкости кристалла при низких температурах ($T \ll T_D$). Известно значение интеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2,405.$$

5.23. Определить относительную погрешность, которая будет допущена при вычислении теплоемкости кристалла, если вместо значения, вычисленного в соответствии с моделью Дебая при характеристической температуре, воспользоваться значением,

полученным по закону Дюлонга – Пти. Численное значение интеграла Дебая составляет 0,225.

5.24. Теплоемкость серебра при 10 К составляет 199 Дж/моль·К. Определить характеристическую температуру.

5.25. Найти максимальную частоту собственных колебаний атомов в кристалле железа ($M=56$), если при температуре 20 К его удельная теплоемкость равна 2,7 мДж/г·К.

5.26. Вычислить электронную теплоемкость $C_{эл}$ для меди при 2 и 1000 К. Полученные значения сравнить с теплоемкостью кристаллической решетки при тех же температурах. Характеристическая температура меди равна 316 К.

Примечание. Электронная теплоемкость металла $C_{эл} = \gamma T$, где γ – коэффициент пропорциональности. Для меди $\gamma = 7,28 \cdot 10^{-4}$ Дж/моль·К².

5.27. Вычислить максимальную частоту колебаний кристаллической решетки твердого тела, если известно, что при температуре 20 К его молярная теплоемкость равна 1,7 Дж/моль·К.

5.28. Рассматривая кристалл как сосуд, содержащий фононный газ, и используя приближения теории теплоемкости Дебая, показать, что для температур, значительно превышающих температуру Дебая, число акустических фононов в единице объема составляет $9NT/2T_D$ (где N – число атомов решетки в единице объема, T_D – температура Дебая).

5.29. Для твердых тел, в которых рассеяние на акустических фононах является основным механизмом рассеяния, показать, что при температурах, превышающих температуру Дебая, подвижность электронов (а значит, для постоянной концентрации носителей и электропроводность) должна быть пропорциональна T^{-1} в металлах и $T^{-3/2}$ в полупроводниках.

5.30. Коэффициент термо-э.д.с. пары хромель (90 % Ni + 10 % Cr) – копель (44 % Ni + 56 % Cu) равен 80 мкВ/К. Определить э.д.с. термопары при разности температур горячего и холодного спаев, равной 400 К.

5.31. Коэффициент термо-э.д.с. пары железо-золото составляет 62 мкВ/К. Определить отношение концентраций свободных электронов в этих металлах.

5.32. Концентрация электронов проводимости в меди в 1,7 выше, чем в константане (60 % Cu + 40 % Ni). Определить коэффициент термо-э.д.с. пары медь-константан.

5.33. Полагая, что рассеяние происходит на акустических колебаниях кристаллической решетки, найти величину термо-э.д.с. в германии, содержащем $6 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ мелких акцепторов, при температуре 200 К. Энергия ионизации примеси составляет 0,01 эВ.

5.34. Определить энергию ионизации донорной примеси в кремнии при температуре 100 К (участок примесной проводимости), если значение дифференциальной термо-э.д.с. $\alpha_n = -2.1 \text{ мВ/К}$ и рассеяние носителей заряда происходит на ионах донорной примеси с концентрацией 10^{15} см^{-3} .

5.35. Рассчитать величину дифференциальной термо-э.д.с. собственных полупроводников – германия, кремния и арсенида галлия при разности температуры контактов, равной 50 К.

5.36. Оценить величину «фононной» термо-э.д.с. в германии n-типа при температуре 20 К, полагая, что подвижность электронов в основном определяется рассеянием на акустических колебаниях кристаллической решетки и равна $4 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, а рассеяние фононов происходит на стенках образца. Поперечный размер образца составляет 1 мм, а скорость звука $5 \cdot 10^5 \text{ см/с}$.

6. ЭФФЕКТ ХОЛЛА

Если полупроводник (или проводник), вдоль которого течет электрический ток, поместить в магнитное поле, перпендикулярное к направлению тока, то в материале возникает поперечное электрическое поле, перпендикулярное к току и магнитному полю. Это явление получило название *эффекта Холла*, а возникающая поперечная э.д.с. – *э.д.с. Холла* (рис. 6).

Если полупроводник однородный, то его эквипотенциальные поверхности располагаются перпендикулярно к вектору электрического поля $\mathcal{E}$, следовательно, и к вектору плотности тока j .

Исходя из сказанного, разность потенциалов между точками А и Б будет равной нулю, так как точки лежат в плоскости перпендикулярной к вектору плотности тока j . При помещении такого полупроводника в магнитное поле напряженностью B на носитель заряда, дрейфующий со скоростью $v_{др}$, будет действовать сила Лоренца

$$F_L = e[v_{др} B] \quad (6.1)$$

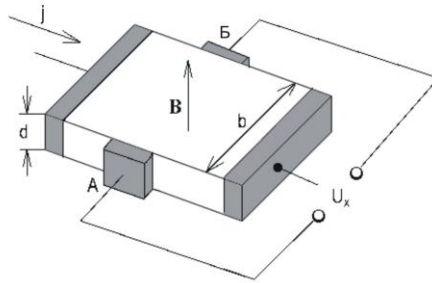


Рис. 6. Образец для измерения э.д.с. Холла

Для выбранных на рис. 6 направлений $\mathcal{E}$ и B сила Лоренца действует вверх. Под действием этой силы носители заряда в полупроводнике будут смещаться к верхней поверхности образца. На нижней поверхности полупроводника возникает дефицит носителей заряда. Явление возникновения поперечной э.д.с. в полупроводнике с текущим током под действием магнитного поля и называют эффектом Холла. Если ширину образца принять равной b , то холловская разность потенциалов U_H для полупроводника n -типа определяется соотношением

$$U_H = -\frac{A}{en} jBb = R_H jBb, \quad (6.2)$$

где e – заряд электрона, n – концентрация основных носителей заряда в полупроводнике n -типа, A – Холл-фактор, учитывающий механизм рассеяния носителей заряда в полупроводнике. Величину R_H принято называть коэффициентом Холла. Для электронных полупроводников

$$R_H = -\frac{A}{en}, \quad (6.3)$$

а для дырочных полупроводников

$$R_H = \frac{A}{e\rho} \quad (6.4)$$

Коэффициент Холла обратно пропорционален концентрации основных носителей заряда, а знак его совпадает со знаком этих носителей. Обратно пропорциональная зависимость э.д.с. Холла от концентрации свободных носителей заряда объясняется тем, что при определенной величине тока носители перемещаются тем быстрее и отклоняются магнитным полем тем сильнее, чем меньше их концентрация.

При определении коэффициента Холла при низких температурах – рассеянии на ионах примеси $A=315\pi/512 \approx 1,93$. Для температур, при которых имеет место рассеяние на тепловых колебаниях кристаллической решетки, $A=3\pi/8 \approx 1,18$.

Произведение $|R_H|\sigma$ имеет размерность подвижности и называется холловской подвижностью носителей заряда μ_H , таким образом, $R_H\sigma = A\mu_n$. Холловская подвижность пропорциональна дрейфовой $\mu_H = A\mu_{dr}$. Для металлов и вырожденных полупроводников коэффициент Холла не зависит от механизма рассеяния, поэтому $\mu_x = \mu_{dr}$.

Для полупроводников с двумя типами носителей, концентрации и подвижности которых соответственно равны n_0 , μ_n и p_0 , μ_p , угол Холла равен

$$\varphi = A \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{p\mu_p + n\mu_n} B, \quad (6.5)$$

а коэффициент Холла

$$R_H = \frac{A(p_0\mu_p^2 - n_0\mu_n^2)}{e(p_0\mu_p + n_0\mu_n)^2}. \quad (6.6)$$

Для собственного полупроводника $n_0 = p_0 = n_i$,

$$R_{Hi} = \frac{A}{en_i} \left(\frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n} \right) = \frac{A}{en_i} \left(\frac{1-b}{1+b} \right), \quad (6.7)$$

где $b = \mu_n/\mu_p$. Так как обычно $b > 1$, то в собственных полупроводниках $R_H < 0$. Согласно (6.6) инверсия знака R_H может наблюдаться в биполярных полупроводниках.

Поскольку подвижность и концентрация носителей заряда являются функциями температуры, то R_H также зависит от температуры. Измерения зависимости коэффициента Холла от

температуры имеют особую ценность. Они позволяют установить температурную зависимость концентрации носителей заряда, а в совокупности с измерениями удельной электропроводности – температурную зависимость подвижности.

По температурной зависимости концентрации или коэффициента Холла в области слабой ионизации примеси можно определить энергию ионизации примеси (ΔE_A , ΔE_D), а в области собственной электропроводности – ширину запрещенной зоны (ΔE_0). На рис.7 приведены зависимости концентрации носителей заряда (рис. 7, а) и коэффициента Холла (рис. 7, б; 7, в) в соответствующих координатах, когда эти зависимости имеют вид прямых линий. Кривая на рис. 7, б соответствует полупроводнику n -типа, а на рис. 7, в – полупроводнику p -типа. В области примесной проводимости R_H в таком полупроводнике положителен, а в области собственной проводимости – отрицателен [согласно (6.7)]. При переходе к собственной проводимости R_H меняет знак, переходя через нуль, а зависимость $\ln R_H$ при этом терпит разрыв.

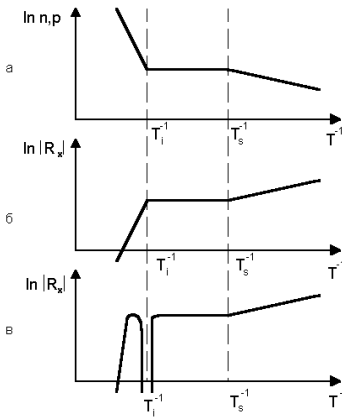


Рис.7. Зависимость концентрации носителей заряда (а) и коэффициента Холла для полупроводника n -типа (б) и полупроводника p -типа (в)

Ранее указано, что холловское напряжение прямо пропорционально индукции магнитного поля для полей не слишком высокой напряженности. Расчет показал, что критерием слабого поля и, следовательно, применимости полученных выше соотношений для э.д.с. Холла и коэффициента Холла является условие:

$$\varphi = B\mu = R_H \sigma B \ll 2\pi, \quad (6.8)$$

где φ – угол Холла, μ – подвижность.

Если в магнитных полях высокой напряженности угол Холла, то есть угол, на который отклоняются свободные носители заряда, будет близок к 2π , то за время свободного пробега носители будут не просто отклоняться от направления своего первоначального движения, а «закручиваться» вокруг силовых линий магнитного поля.

Установлено, что слабыми могут считаться магнитные поля с индукцией B : для германия – менее 16 Тл, для кремния – менее 40 Тл, для антимонида индия – менее 0,8 Тл.

Если в магнитных полях высокой напряженности угол Холла, то есть угол, на который отклоняются свободные носители заряда, будет близок к 2π , то за время свободного пробега носители будут не просто отклоняться от направления своего первоначального движения, а «закручиваться» вокруг силовых линий магнитного поля. Установлено, что слабыми могут считаться магнитные поля с индукцией B : для германия – менее 16 Тл, для кремния – менее 40 Тл, для антимонида индия – менее 0,8 Тл.

Необходимо отметить, что величина э.д.с. Холла в полупроводниках может на порядки величины превышать значение э.д.с. Холла в проводниковых материалах. Эффект Холла является, таким образом, мощным экспериментальным средством изучения фундаментальных параметров полупроводников: концентрации и знака заряда носителей, а также их подвижности, энергии ионизации примеси и ширины запрещенной зоны. Кроме того, эффект Холла применяют в магнитометрах, измерителях малых перемещений и давлений, бесконтактных переключателях и других устройствах.

Задачи

6.1. Образец германия электронного типа проводимости толщиной 1 мм с концентрацией электронов 10^{20} м^{-3} помещен в магнитное поле с индукцией 0,1 Тл. Определить величину э.д.с. Холла при токе 1 мА, протекающем через образец.

6.2. Удельная электропроводность и коэффициент Холла арсенида индия соответственно равны $4 \cdot 10^2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ и $10^{-2} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Считая, что проводимость осуществляется зарядами одного знака, определить их концентрацию и подвижность.

6.3. Удельное сопротивление монокристалла кремния дырочного типа проводимости при комнатной температуре составляет $9 \cdot 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{м}$,

подвижность дырок равна $0,04 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Найти значение коэффициента Холла.

6.4. К образцу полупроводникового материала приложено магнитное поле с индукцией $0,5 \text{ Тл}$. Коэффициент Холла и удельное сопротивление полупроводника соответственно равны $-3,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$ и $8,93 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Найти угол Холла.

6.5. Вычислить коэффициент Холла для кристалла германия, содержащего 10^{23} м^{-3} атомов индия и 10^{24} м^{-3} атомов сурьмы при комнатной температуре.

6.6. Имеется образец германия с поперечным сечением $0,1 \times 0,2 \text{ см}$ и концентрацией легирующей примеси, равной 10^{17} см^{-3} . Вдоль образца протекает ток $0,6 \text{ А}$. Перпендикулярно к направлению тока действует магнитное поле с индукцией $0,5 \text{ Тл}$. Вычислить напряжение Холла между контактами к узким сторонам боковой поверхности образца.

6.7. В эксперименте по изучению эффекта Холла кремниевый образец имеет длину $1,0 \text{ см}$, толщину $0,1 \text{ см}$, расстояние между холловскими электродами $0,2 \text{ см}$. Вдоль образца приложено напряжение $0,245 \text{ В}$, значение протекающего тока – 5 мА , индукция магнитного поля – 1 Тл . Величина напряжения Холла оказалась равной 2 мВ . Полагая, что рассеяние носителей заряда осуществляется тепловыми колебаниями кристаллической решетки, определить: а) тип проводимости полупроводника, из которого выполнен образец; б) концентрацию основных носителей заряда; в) холловскую подвижность носителей заряда; г) подвижность носителей, связанную с протеканием основного тока; д) коэффициент диффузии носителей заряда.

6.8. В образце германия, помещенном во взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля, эффект Холла не наблюдается. Какую часть общей электропроводности составляет дырочная?

6.9. Найти концентрацию основных носителей заряда в германии дырочного типа проводимости при 300 К , если известно, что при этой температуре наступает инверсия знака коэффициента Холла.

6.10. Образец кремния электронного типа проводимости при 100 К имеет коэффициент Холла, равный $0,28 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Энергия ионизации донорной примеси составляет 0,04 эВ. Определить концентрации донорной примеси, электронов и дырок, пренебрегая вкладом собственной проводимости.

6.11. Вычислить относительное изменение сопротивления кристалла германия, содержащего 10^{23} атомов мышьяка и $5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ атомов галлия, при помещении в магнитное поле с индукцией 0,5 Тл.

6.12. При изучении эффекта Холла в магнитном поле с индукцией, равной 0,5 Тл, поперечная напряженность электрического поля в беспримесном полупроводнике оказалась в 10 раз меньше продольной напряженности электрического поля. Найти разность подвижностей электронов и дырок в исследованном образце.

6.13. В образце полупроводникового материала, у которого подвижность свободных электронов в 2 раза больше подвижности дырок, эффект Холла не наблюдается. Найти отношение концентраций свободных электронов и дырок в таком полупроводнике.

6.14. Вычислить коэффициент Холла для кремния, содержащего 10^{22} м^{-3} примеси мышьяка при 20 и 500 К. Значение энергии ионизации примеси составляет 0,04 эВ. Температурной зависимостью подвижности свободных носителей заряда пренебречь.

6.15. Вычислить отношение продольной напряженности электрического поля к поперечной для пластины беспримесного кремния, помещенной в магнитное поле напряженностью $H = 8 \cdot 10^5 \text{ А/м}$, полагая, что кремний является парамагнетиком.

6.16. Определить при комнатной температуре коэффициент Холла в антимонопиде индия, содержащем акцепторы с концентрацией $5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, если отношение холловских подвижностей электронов и дырок к дрейфовым равно 1,18. Известно также, что подвижность электронов превышает подвижность дырок в 80 раз, магнитное поле является слабым.

6.17. При определенной температуре, превышающей температуру инверсии знака коэффициента Холла, этот параметр оказался равным $3,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Удельное сопротивление

полупроводника составило $8,93 \cdot 10^{-3}$ Ом·м, индукция магнитного поля – 0,5 Тл. Полагая, что проводимость осуществляется носителями одного знака, найти их концентрацию и подвижность, а также угол Холла.

6.18. Вычислить коэффициент Холла для собственного кремния при температурах 20 и 200 К. Температурной зависимостью подвижности пренебречь.

7. НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Равновесным называют такое состояние твердого тела, при котором скорости генерации и рекомбинации носителей заряда равны. Наряду с тепловым возбуждением могут действовать и другие факторы, создающие свободные носители в полупроводниках, например облучение светом, бомбардировка различными частицами, вызывающими ионизацию, и т. д. Свободные носители могут также проникать через контакт из другого тела. Свободные носители, появляющиеся в полупроводнике благодаря этим факторам, являются избыточными по отношению к равновесным и называются неравновесными носителями.

Механизм возникновения неравновесных носителей принципиально отличается от механизма образования равновесных носителей. При тепловой генерации подводимое извне тепло определяет увеличение энергии тепловых колебаний атомов в решетке кристалла, и, когда энергия этих колебаний оказывается достаточной для разрыва связей валентных электронов, происходит нарушение ковалентных связей полупроводника или ионизация примесных атомов, сопровождающиеся образованием равновесных носителей. Таким образом, подводимое тепло создает свободные носители, действуя через посредника – кристаллическую решетку полупроводника. Благодаря этому концентрация равновесных носителей оказывается одинаковой во всем объеме полупроводника.

При создании же неравновесных носителей энергия внешнего источника возбуждения (энергия фотонов света, энергия бомбардирующих электронов или других частиц) передается непосредственно валентным электронам, в то время как энергия кристаллической решетки сохраняется практически неизменной. Поэтому, во-первых, скорости генерации и рекомбинации носителей не равны, во-вторых, неравновесные носители при их возникновении не находятся в тепловом равновесии с кристаллом и, в – третьих,

распределение их плотности по объему может быть очень неравномерным – концентрация неравновесных носителей обычно уменьшается во времени, а также по мере удаления от поверхности кристалла или от освещенного места. Низкий и высокий уровни возбуждения различаются соотношением концентраций основных и избыточных носителей заряда. При $\Delta n = \Delta p < n_0 + p_0$ уровень возбуждения является низким, при обратном соотношении – высоким.

Как правило, снижение концентрации носителей происходит по экспоненциальному закону, при этом в показателе экспоненты находятся характерные параметры, определяющие конкретный процесс. Таким образом, релаксация неравновесных носителей заряда осуществляется во времени и пространстве. Параметры релаксации основных и неосновных неравновесных носителей различны.

Релаксацию основных неравновесных носителей заряда во времени характеризуют максвелловским (диэлектрическим) временем релаксации τ_M :

$$\tau_M = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma} = \varepsilon \varepsilon_0 \rho, \quad (7.1)$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость вещества; ε_0 – электрическая постоянная; ρ – удельное электрическое сопротивление; σ – удельная электропроводность. Закон изменения избыточной концентрации Δn от времени t

$$\Delta n = (\Delta n)_0 e^{-\frac{t}{\tau_M}}, \quad (7.2)$$

где величина $(\Delta n)_0$ равна избыточной концентрации в момент времени $t=0$. При изменении удельного сопротивления полупроводника от 10^{-2} до 10^4 Ом·см время максвелловской релаксации изменяется в пределах $\tau_M = 10^{-14} \div 10^{-8}$ с.

Релаксацию основных неравновесных носителей заряда в пространстве (рассматривают одномерный случай) характеризуют дебаевской длиной экранирования l_D :

$$l_D = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 k T}{e^2 (n_0 + p_0)}}, \quad (7.3)$$

которая обычно составляет $l_D = 10^{-6} \div 10^{-4}$ см. Для электронного полупроводника

$$l_{en} = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 k T}{e^2 n_0}}, \quad (7.4)$$

для дырочного

$$l_p = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e^2 p_0}}, \quad (7.5)$$

а для собственного

$$l_D = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{2e^2 n_i}}. \quad (7.6)$$

Релаксацию неосновных неравновесных носителей заряда во времени характеризуют временем жизни τ_n или τ_p :

$$\tau_n = -\frac{\Delta n}{\frac{\partial(\Delta n)}{\partial t}}; \quad \tau_p = -\frac{\Delta p}{\frac{\partial(\Delta p)}{\partial t}}. \quad (7.7)$$

В соответствии с уравнением непрерывности скорости рекомбинации неосновных неравновесных электронов R_n или дырок R_p определяются как

$$R_n = -\frac{\Delta n}{\tau_n}; \quad R_p = -\frac{\Delta p}{\tau_p}. \quad (7.8)$$

Время жизни неосновных неравновесных электронов или дырок зависит также от особенностей рекомбинации:

$$\tau_n = \frac{1}{\gamma_n p} = \frac{1}{S_{np} v_{np} p}; \quad \tau_p = \frac{1}{\gamma_p n} = \frac{1}{S_{pn} v_{pn} n}, \quad (7.9)$$

где γ_n, γ_p – коэффициенты рекомбинации; S_{np}, S_{pn} – сечения захвата электронов дырками и дырок электронами соответственно; v_{np}, v_{pn} – скорости движения электронов относительно дырок и дырок относительно электронов; $p = p_0 + \Delta p$, $n = n_0 + \Delta n$ – полные концентрации дырок и электронов.

Релаксацию неосновных неравновесных носителей заряда в пространстве (рассматривают одномерный случай) характеризуют диффузионной длиной электронов L_n либо дырок L_p :

$$L_n = \sqrt{\tau_n D_n}; \quad L_p = \sqrt{\tau_p D_p}, \quad (7.10)$$

где D_n, D_p – коэффициенты диффузии электронов и дырок соответственно. Закон релаксации неосновных неравновесных носителей заряда (электронов) является экспоненциальным:

$$\Delta n = (\Delta n)_0 e^{-\frac{x}{L_n}}. \quad (7.11)$$

Связь между фундаментальными параметрами как равновесных, так и неравновесных носителей заряда при температуре T выражается соотношением Эйнштейна:

$$\frac{\mu_n}{D_n} = \frac{e}{kT} \cdot \quad (7.12)$$

Аналогичное соотношение справедливо для дырок.

Расчет положения квазиуровней E_{Fn} для неравновесных электронов и E_{Fp} для неравновесных дырок относительно уровня Ферми E_F проводится по соотношениям

$$E_{Fn} - E_F = kT \ln(1 + \Delta n / n_0), \quad E_F - E_{Fp} = kT \ln(1 + \Delta p / p_0) \cdot \quad (7.13)$$

Задачи

7.1. Среднее время жизни электрона в образце германия электронного типа проводимости составляет при комнатной температуре 10^{-12} с. Определить, насколько увеличится кинетическая энергия электрона за время свободного пролета в электрическом поле напряженностью 10^5 В/м. Какова напряженность электрического поля, необходимая для того, чтобы за время свободного пролета электрона в этом поле сообщить ему кинетическую энергию, достаточную, чтобы «выбить» электрон: а) с донорного уровня; б) из валентной зоны и «перебросить» его в зону проводимости. Для простоты принять эффективную массу электрона равной массе покоя.

7.2. Найти, на какую величину и как изменится время релаксации основных носителей заряда в германии электронного типа проводимости после проведения дополнительного легирования образца примесью бора, в результате которого проводимость уменьшилась с 10^{-2} до $2 \cdot 10^{-4}$ Ом $^{-1} \cdot$ м $^{-1}$.

7.3. Подвижности электронов и дырок в монокристалле кремния при комнатной температуре соответственно равны 0,16 и 0,04 м 2 /В·с. Найти коэффициенты диффузии электронов и дырок.

7.4. Время жизни носителей заряда в полупроводниках сильно зависит от качества поверхности. При исследовании монокристалла германия электронного типа проводимости с необработанной поверхностью было найдено, что время жизни основных носителей заряда составляет 78 мкс, а у образца, поверхность которого подверглась ионному травлению, - 340 мкс. Полагая, что подвижность

электронов равна $0,36 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, найти диффузионную длину электрона при комнатной температуре в обоих образцах.

7.5. Найти подвижность дырок в полупроводнике электронного типа проводимости, если диффузионная длина дырки при комнатной температуре составляет $0,1 \text{ см}$, а время жизни равно 100 мкс .

7.6. Имеется однородная пластина монокристаллического кремния электронного типа проводимости при комнатной температуре с концентрацией донорной примеси, равной $2,25 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Первоначально пластина находилась в состоянии термодинамического равновесия, затем подверглась действию потока монохроматического света, после чего состояние термодинамического равновесия восстановилось. Определить: а) равновесные концентрации электронов и дырок; б) неравновесные концентрации электронов и дырок для следующих значений концентрации избыточных носителей заряда: 1) $\Delta n_0 = \Delta p_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$; 2) $\Delta n_0 = \Delta p_0 = 10^{16} \text{ см}^{-3}$; в) какой уровень возбуждения (низкий или высокий) будет реализован в каждом случае.

7.7. В полупроводнике электронного типа проводимости скорость рекомбинации дырок равна $10^{18} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$, а избыточная концентрация дырок составляет 10^{13} см^{-3} . Найти среднее время жизни неосновных неравновесных носителей заряда.

7.8. Образец монокристаллического германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному действию фотонов. Это внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесных ионов $N_D = 10^{17} \text{ см}^{-3}$, и обуславливает постоянную генерацию 10^{18} электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитать избыточную концентрацию носителей, а также относительное изменение концентрации носителей заряда вследствие действия фотонов, если $\tau_n = \tau_p = 2 \text{ мс}$.

Пусть время действия потока фотонов прекращается в момент времени $t = t_0$. Как изменится во времени избыточная концентрация дырок при $t > t_0$? За какое время избыточная концентрация снизится до 5 % начального значения?

7.9. В плоскость $x=0$ кремниевого образца дырочного типа проводимости при комнатной температуре постоянно инжектируются электроны, время жизни которых составляет 10 мкс . Определить

расстояние, на котором концентрация неосновных неравновесных носителей заряда уменьшится на порядок.

7.10. В кристалл германия электронного типа проводимости с концентрацией донорной примеси 10^{15} см^{-3} при $t=0$ инжектированы дырки с концентрацией 10^{17} см^{-3} . Полагая, что все доноры ионизированы, а время жизни дырок постоянно и равно 100 мкс, рассчитать время t_I , по истечении которого проводимость полупроводникового кристалла уменьшится до значения $3,51 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$. Температура образца постоянна и равна 300 K.

7.11. Проводимость беспримесного полупроводника в исходном состоянии $\sigma_0 = 2,0 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$, а в момент облучения источником генерации носителей составляет $\sigma_I=2,4 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$. Спустя $t_2=10$ мкс после выключения источника генерации проводимость образца упала до $\sigma_2 = 2,3 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$. Найти среднее время жизни избыточных носителей заряда, если температура равна 300 K и образец при облучении не нагревается.

7.12. Удельное сопротивление беспримесного полупроводникового монокристалла при комнатной температуре составляет 50 Ом·см. После включения источника электромагнитного излучения оно стало равным 40 Ом·см, а спустя 8 мс после выключения источника электромагнитного излучения удельное сопротивление оказалось равным 45 Ом·см. Найти среднее время жизни свободных носителей заряда.

7.13. В момент времени t_0 в полупроводник было введено небольшое количество избыточных дырок. Найти концентрацию дырок, которая осталась несвязанной к моменту времени t_I .

7.14. Найти исходную концентрацию избыточных носителей заряда в полупроводнике, если после прекращения возбуждения в момент времени $t_0 = 0$ за любой интервал времени $\Delta t = 10^{-3}$ с концентрация избыточных носителей заряда уменьшается на два порядка и в момент времени $t_I = 1.1 \cdot 10^{-4}$ с составляет 10^{16} см^{-3} .

7.15. К моменту прекращения возбуждения концентрация избыточных электронов в германии дырочного типа проводимости составляла 10^{19} см^{-3} при комнатной температуре. Спустя время, равное

1 мкс, концентрация избыточных носителей упала до 10^{14} см^{-3} . Исходя из приведенных данных, вычислить сечение захвата электронов.

7.16. Найти концентрацию ловушек в собственном полупроводнике при комнатной температуре, если сечения захвата электронов и дырок равны и составляют 10^{-16} см^2 , время жизни избыточных носителей заряда равно 30 мкс. Считать, что уровень возбуждения невелик, а рекомбинация протекает через центры, локализованные посередине запрещенной зоны.

7.17. В германии электронного типа проводимости с удельным сопротивлением, равным 5 Ом·см, при комнатной температуре концентрация ловушечных центров составляет $5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, а их энергетический уровень совпадает с серединой запрещенной зоны. Время жизни неосновных неравновесных носителей заряда составляет 10^4 с. Найти сечение захвата ловушечных центров.

7.18. В момент времени $t_1 = 10^{-4}$ с после выключения равномерной по объему генерации электронно-дырочных пар неравновесная концентрация носителей заряда оказалась в 10 раз больше, чем в момент $t_2 = 10^{-3}$ с. Определить время жизни неравновесных носителей заряда, если уровень возбуждения невелик и рекомбинация идет через простые дефекты.

7.19. Определить закон изменения со временем концентрации избыточных носителей заряда в полупроводнике электронного типа проводимости, если после выключения источника генерации в момент времени $t = 0$ скорость рекомбинации $R = a (np - n_i^2)$, где a – постоянный коэффициент.

7.20. В германии электронного типа проводимости с концентрацией основных носителей заряда, равной 10^{15} см^{-3} , стационарным источником равномерно по всему объему генерируются электронно-дырочные пары носителей. При низком уровне возбуждения время жизни составляет 2 мкс, а при $\Delta n/n_0 = 0.1$ рекомбинация происходит с постоянной времени, равной 4,7 мкс. Считая, что рекомбинация происходит на простых центрах с $E_t = E_c - 0,20 \text{ эВ}$, определить отношение сечений захвата дырок и электронов при 300 К.

7.21. Вычислить положение квазиуровня Ферми относительно середины запрещенной зоны кремния с концентрацией донорных атомов 10^{15} см^{-3} при температуре 350 К и концентрации избыточных дырок $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Изобразить зонную диаграмму.

7.22. Рассчитать положение квазиуровня Ферми и построить зонную диаграмму германия, содержащего 10^{16} см^{-3} акцепторной примеси, если при температуре, равной 35 К, в монокристалл инжектированы избыточные электроны с концентрацией $3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Энергия ионизации акцепторной примеси составляет 0,001 эВ.

7.23. Определить положение квазиуровней Ферми относительно середины запрещенной зоны в полупроводнике, легированном акцепторной примесью с концентрацией 10^{16} см^{-3} при комнатной температуре. Известно, что скорость генерации неравновесных носителей заряда равна 10^{18} см^{-3} , время жизни электронов составляет 10 нс, собственная концентрация носителей – 10^{10} см^{-3} .

8. ОПТИЧЕСКИЕ И ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Вследствие отражения и поглощения света полупроводником интенсивность падающего на него монохроматического излучения интенсивностью I_0 уменьшается до некоторой величины I . В соответствии с законом Ламберта – Бугера – Бера:

$$I = I_0 (1 - R) \exp(-\alpha x), \quad (8.1)$$

где R – коэффициент отражения, x – расстояние от поверхности полупроводника вдоль направления луча (в объеме) до данной точки; α – коэффициент поглощения.

Величина α^{-1} равна толщине слоя вещества, при прохождении через который интенсивность света уменьшается в e раз (e – основание натурального логарифма).

Поглощение полупроводником энергии электромагнитного излучения может быть связано с различными физическими процессами: нарушением ковалентных связей между атомами материала с переходом электронов из валентной зоны в зону проводимости; ионизацией примесных атомов и возникновением дополнительных свободных электронов или дырок; изменением колебательной энергии атомов решетки; образованием экситонов и др.

Если поглощение света полупроводником обусловлено увеличением энергии электронов валентной зоны и «переходом» их в зону проводимости за счет энергии квантов излучения, то поглощение называют *собственным*; если возникновением свободных носителей за счет ионизации примесных атомов (доноров или акцепторов), – *примесным*.

У ряда полупроводников за счет поглощения кванта электромагнитного излучения возможно такое возбуждение электрона валентной зоны, которое не сопровождается его переходом в зону проводимости, а образуется связанная система электрон–дырка, перемещающаяся в пределах кристалла как единое целое. Эту систему называют *экситоном*. Оптическое поглощение полупроводника, обусловленное взаимодействием излучения с колебательным движением кристаллической решетки, называют *решеточным*. Оптическое поглощение полупроводника, связанное с внутризонным повышением энергии носителей, называют поглощением свободными носителями заряда. Независимо от механизма поглощения квантов излучения процесс подчиняется закону сохранения энергии.

Фотопроводимость полупроводников – явление, всегда сопровождающее процесс поглощения энергии электромагнитного излучения. При освещении полупроводника концентрация свободных носителей заряда в нем может возрасти за счет носителей, возбужденных поглощенными квантами света. Такими носителями могут быть как собственные электроны и дырки, так и носители, перешедшие в свободное состояние вследствие ионизации примесных атомов.

Это явление называется фотопроводимостью или внутренним фотоэффектом. Электроны, находящиеся в валентной зоне полупроводника, поглощают энергию падающего на него кванта света $E = h\nu$, которая зависит от частоты световых колебаний ν и не зависит от интенсивности света. С увеличением интенсивности света возрастает число, поглощающих свет электронов, но не энергия, получаемая каждым из них. Если энергия фотона $E = h\nu$ превышает величину запрещенной зоны ΔE_0 в собственном полупроводнике (либо энергии активации ΔE_D и ΔE_A в примесных полупроводниках), то электрон, возбуждаясь, переходит в свободную зону, где может перемещаться под действием электрического поля, осуществляя так называемый фототок.

Задачи

8.1. Известны значения длины волны фотона, соответствующие порогу фундаментального поглощения в ряде полупроводниковых материалов: 3,00; 1,65; 1,05; 0,82 и 0,47 мкм. Определить, какие полупроводниковые материалы исследованы.

8.2. Ширина запрещенной зоны кремния равна примерно 1,2 эВ, а германия – 0,75 эВ при температуре абсолютного нуля. Для каких длин волн эти кристаллы непрозрачны?

8.3. Чистые кристаллы галогенидов щелочных металлов прозрачны в видимой области спектра. Значения ширины запрещенной зоны для трех кристаллов приводятся ниже.

Кристалл	<i>KCl</i>	<i>KBr</i>	<i>KI</i>
$\Delta E_0, \text{эВ}$	7,6	6,5	5,6

Вычислить для каждого из кристаллов длину волны, начиная с которой кристалл становится непрозрачным.

8.4. Какова частота электромагнитного излучения, необходимого: а) для перевода электрона в атоме водорода из основного в первое возбужденное состояние; б) полной ионизации атома? К какой области спектра относится это электромагнитное излучение?

8.5. Вычислить относительное изменение проводимости полупроводника с концентрацией основных носителей заряда (электронов), равной 10^{14} см^{-3} , при стационарном облучении электромагнитным излучением с интенсивностью $5 \cdot 10^{15}$ квантов на 1 см^2 поверхности в секунду. Коэффициент поглощения α равен 100 см^{-1} , толщина образца мала по сравнению с α^{-1} , рекомбинация происходит на простых дефектах с постоянной времени $\tau = 200 \text{ мкс}$.

8.6. Из двух полупроводниковых материалов, ширина запрещенной зоны одного из которых равна 1,5 эВ, а другого – 1,6 эВ, в едином монокристалле создан *p-n*-гетеропереход. Излучение падает на гетеропереход со стороны полупроводника с большей шириной

запрещенной зоны. Найти спектральную полосу чувствительности такого фотоприемника.

8.7. При отражении света с длиной волны $\lambda = 100$ мкм полупроводниковым образцом большой толщины коэффициент отражения $R = 0,36$. Коэффициент пропускания пленки из того же материала толщиной 1 мм равен $T = 0,17$. Найти коэффициент поглощения α .

8.8. Найти величины квазиволновых векторов электрона и дырки, генерируемых при поглощении кванта света в прямозонном полупроводнике с параболическими изотропными законами дисперсии. Принять ширину запрещенной зоны, равной 0,3 эВ, энергию кванта – 0,31 эВ, показатель преломления $n = 4$, эффективные массы $m_n^* = m_p^*$.

8.9. Фотоэлектрический преобразователь на основе кремния, состоящий из p -слоя толщиной 1 мкм и n -слоя толщиной 200 мкм, облучают монохроматическим светом с $\lambda = 1400$ нм. Определить квантовый выход, т.е. число возникших при генерации электронно-дырочных пар в расчете на один поглощенный фотон. Считать, что оптические потери на металлических контактах отсутствуют.

8.10. Определить напряжение холостого хода фотоэлектрического преобразователя при освещении. Известно, что ток короткого замыкания равен 3 А, а темновой ток – 10 нА.

9. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Основными магнитными параметрами вещества являются: намагниченность M , А/м; $M = \alpha \bar{H}$, где α – магнитная восприимчивость; $\bar{H}$ – напряженность магнитного поля, А/м. Магнитная индукция B , Тл (Тесла), характеризует суммарное магнитное поле внутри материала:

$$\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}) = \mu_0(1 + \alpha)\bar{H} = \mu_0\mu\bar{H} = \mu_a\bar{H}, \quad (9.1)$$

$$\alpha = \mu - 1, \quad (9.2)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, численно равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, характеризующая магнитную проницаемость вакуума; μ – относительная магнитная проницаемость вещества, которая показывает, во сколько раз магнитная проницаемость данной среды больше магнитной проницаемости вакуума (величина безразмерная);

α – магнитная восприимчивость; $\mu_a = \mu_0 \mu$ – абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м.

Квант элементарного электронного магнитного момента μ_B называется магнетоном Бора:

$$\mu_B = e\hbar/(2m) = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл} = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ эВ/Тл}, \quad (9.3)$$

где m – масса покоя электрона.

Квант ядерного магнитного момента m_p равен

$$m_p = e\hbar/(2M) = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}, \quad (9.4)$$

где M – масса ядра атома.

Проекция полного магнитного момента атома на направление магнитного поля M_{jH} определяется выражением

$$M_{jH} = -m_j g \mu_B, \quad (9.5)$$

где m_j – магнитное квантовое число, g – фактор Ланде.

Энергия обменного взаимодействия для атомов ферромагнитного материала приближенно вычисляется по формуле

$$E_{ex} \approx 2kT_K/y, \quad (9.6)$$

где T_K – точка Кюри – Вейсса, y – координационное число кристаллической структуры.

Условие электронного парамагнитного резонанса определяется следующим соотношением:

$$h\nu = \Delta E_m = g \mu_B \mu_0 H_0, \quad (9.7)$$

где $h\nu$ – энергия кванта высокочастотного электромагнитного излучения; ΔE_m – разность энергий между эквидистантными подуровнями; H_0 – напряженность внешнего магнитного поля.

Задачи

9.1. Молекула кислорода обладает магнитным моментом, равным 2,8 магнетона Бора. Вычислить: а) магнитную восприимчивость 1 м³ кислорода при комнатной температуре и давлении 140 атм (обычное давление в баллоне с газообразным кислородом); б) намагниченность 1 м³ кислорода при указанных выше условиях в магнитном поле Земли.

9.2. Найти намагниченность $\bar{J}$ и магнитную индукцию $\bar{B}$ для образца металлического ниобия, помещенного в поле напряженностью 10⁶ А/м. Как изменится величина магнитной индукции в присутствии ниобия по сравнению со значением магнитной индукции в вакууме при указанном значении напряженности магнитного поля, если магнитная восприимчивость ниобия составляет 2,3·10⁻⁶.

9.3. Решить предыдущую задачу для германия, у которого магнитная восприимчивость составляет -10^6 .

9.4. Вычислить значение магнитной индукции для германия, находящегося в магнитном поле напряженностью 10^5 А/м.

9.5. Оценить намагниченность ферромагнетика при $T \rightarrow 0$ и при $T \rightarrow \theta$, где T_K – температура Кюри – Вейсса.

9.6. Оценить энергию взаимодействия двух магнитных диполей, удаленных друг от друга на расстояние порядка эффективного диаметра атомов ($\approx 1,5\text{\AA}$). Сравнить полученное значение с величиной обменной энергии. Какое из этих взаимодействий определяет природу ферромагнетизма твердых тел?

9.7. Известно, что энергия обменного взаимодействия сильно убывает при увеличении расстояния между атомами. Оценить энергию обменного взаимодействия для железа, никеля, кобальта, гадолиния, если известно, что $T_{K\text{ Fe}} = 1043$; $T_{K\text{ Ni}} = 631$; $T_{K\text{ Co}} = 1400$; $T_{K\text{ Gd}} = 289$ К.

9.8. Сравнить имеющиеся в ферромагнетиках значения энергий обменного, магнитостатического и электростатического взаимодействий с величиной тепловой энергии при температурах $T_1 = 1$ К и $T_2 = 300$ К при расстоянии между взаимодействующими атомами порядка $1\text{\AA}$. Определить, какое из взаимодействий – электростатическое или магнитостатическое способствует установлению обменного взаимодействия.

9.9. Энергия доменных стенок в железе составляет около 10^{-3} Дж/м². Вычислить: а) общую площадь доменных стенок образца железа массой 0,5 кг; б) полную энергию всех доменных стенок. Для простоты расчетов считать, что в типичном образце размагниченного поликристаллического железа домены имеют форму параллелепипедов с размерами $0,1 \times 0,01 \times 0,01$ см.

9.10. Найти намагниченность длинного тонкого стержня, изготовленного из технически чистого железа, длинная ось которого расположена вдоль оси земного магнитного поля, если относительная магнитная проницаемость материала составляет $5 \cdot 10^3$.

9.11. Показать, что магнитоупругая энергия замыкающих доменов имеет величину порядка 50 Дж/м^3 .

9.12. Ферромагнитное α -железо обладает кубической объемно-центрированной решеткой с периодом идентичности $2,86 \text{ \AA}$ и намагниченностью $1,75 \cdot 10^6 \text{ А/м}$. Вычислить магнитный момент, приходящийся на один атом железа, в магнетонах Бора.

9.13. Магнитный момент атома гадолиния составляет 7,95 магнетона Бора. Определить намагниченность насыщения кристалла гадолиния, если он обладает гранецентрированной кубической решеткой с периодом идентичности, равным $3,2 \text{ \AA}$.

9.14. Средний магнитный момент атома ферромагнетика составляет 0,6 магнетона Бора, намагниченность насыщения $5,1 \cdot 10^5 \text{ А/м}$. Вычислить период идентичности гранецентрированной кубической решетки.

9.15. Допуская, что железо является парамагнетиком в широкой области температур, оценить напряженность магнитного поля, необходимую для создания при комнатной температуре спонтанной намагниченности, равной $1,2 \cdot 10^6 \text{ А/м}$.

9.16. В опытах по изучению методом ЯМР магнитных свойств атомов ^{25}Mg в основном состоянии обнаружено резонансное поглощение энергии при индукции магнитного поля $0,54 \text{ Тл}$ и частоте $1,4 \text{ МГц}$. Определить ядерный фактор Ланде.

9.17. Свободный протон находится в постоянном магнитном поле с индукцией 1 Тл . Определить частоту переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергии внешнего поля протоном.

9.18. Методом магнитного резонанса определяют магнитный момент нейтрона. Резонансное поглощение энергии наблюдается при значении магнитной индукции постоянного поля $0,682 \text{ Тл}$ и частоте переменного поля, равной $19,9 \text{ МГц}$. Вычислить ядерный фактор Ланде.

9.19. Вычислить величину магнитного поля, в котором резонансная частота для протона будет равна: а) 1 МГц; б) 100 МГц. Являются ли такие поля экспериментально осуществимыми?

9.20. Найти поле, при котором имеет место электронный резонанс на частоте 10^{11} Гц, полагая, что фактор Ланде равен 2.

10. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Термодинамическая работа выхода из твердого тела определяется как работа, которую необходимо затратить для перехода электрона от энергии, равной энергии Ферми, в вакуум. Контактная разность потенциалов твердых тел eV_K определяется как разность соответствующих работ выхода W_2 и W_1 :

$$eV_K = W_2 - W_1. \quad (10.1)$$

Высоту барьера eV_b на границе раздела металл – полупроводник n -типа можно рассчитать, используя соотношение

$$eV_b = (E_C - E_{Fn}) + eV_K, \quad (10.2)$$

а толщину слоя объемного заряда (ОПЗ) d как

$$d = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0(V_k \pm V)}{en_0}}, \quad (10.3)$$

где V – приложенное напряжение.

Контактная разность потенциалов на границе p - n -перехода определяется соотношением

$$eV_k = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{n0}}{n_{p0}} = \frac{kT}{e} \ln \frac{p_{p0}}{p_{n0}} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{n0} + p_{p0}}{n_i^2}, \quad (10.4)$$

где нулевыми индексами отмечены соответствующие равновесные концентрации основных и неосновных носителей заряда в p - и n -областях.

Суммарная толщина ОПЗ резкого несимметричного p - n -перехода в равновесном состоянии d_0 рассчитывается по соотношению

$$d_0 = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0 eV_K}{e} \left(\frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right)}, \quad (10.5)$$

где $d_0 = d_p + d_n$, кроме того

$$d_n N_D = d_p N_A. \quad (10.6)$$

Суммарная толщина d ОПЗ резкого несимметричного p - n -перехода при приложении внешнего смещения V определяется как

$$d = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0(N_D + N_A)(V_K \pm V)}{eN_D N_A}}. \quad (10.7)$$

Если p - n -переход симметричный, т.е. $N_D = N_A$, то

$$d_n = d_p = \frac{d_0}{2} \text{ и } d = 2\sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0(V_K \pm V)}{eN_D}}. \quad (10.8)$$

При $N_A \gg N_D$ получаем:

$$d \approx d_n = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0(V_K \pm V)}{eN_D}}. \quad (10.9)$$

Задачи

10.1. Два одновалентных металла приведены в контакт, т.е. по всей поверхности соприкосновения они отстоят друг от друга лишь на величину одного параметра кристаллической решетки, равного $2 \text{ \AA}$. Контактная разность потенциалов составляет 1 В, площадь контакта 1 м^2 , каждый из образцов металлов представляет собой куб с ребром 1 м. Чему равен поток зарядов из одного металла в другой? Найти процентное изменение концентрации электронов одного из кубов, обусловленное перетеканием зарядов в другой образец.

10.2. На поверхности кремния дырочного типа проводимости существует обедненный слой с пренебрежимо малой концентрацией носителей заряда. Найти толщину области объемного заряда при 300 К, если поверхностный потенциал равен 0,25 В, а концентрация мелких полностью ионизированных акцепторов в объеме составляет 10^{15} см^{-3} .

10.3. В условиях предыдущей задачи оценить напряженность поля на поверхности полупроводника.

10.4. На поверхности кремния электронного типа проводимости при комнатной температуре существует обедненный слой. При каком значении потенциала в приповерхностной области концентрация дырок сравняется с концентрацией электронов? Оценить толщину приповерхностного слоя, в котором $p(x) > n(x)$, если поверхностный потенциал равен 0,5 В, концентрация электронов в объеме 10^{15} см^{-3} , а подвижность электронов в 2,9 раза превышает подвижность дырок.

10.5. Найти поверхностный потенциал для собственного германия при комнатной температуре, если концентрация адсорбированной на его поверхности полностью ионизированной донорной примеси составляет 10^9 см^{-2} .

10.6. Рассчитать необходимые параметры и изобразить зонную диаграмму равновесного состояния контакта Шоттки при комнатной температуре, если концентрация донорной примеси в кремнии равна 10^{16} см^{-3} , контактная разность потенциалов 0,6 В, площадь контакта 1 мм^2 , емкость – 840 пФ.

10.7. Рассчитать необходимые параметры и построить зонные диаграммы диода с барьером Шоттки на основе кремния электронного типа проводимости при комнатной температуре в равновесном состоянии, а также при прямом смещении 0,5 В и обратном смещении 1 В при следующих параметрах: высота барьера eV_b составляет 1 эВ, концентрация донорной примеси - 10^{15} см^{-3} .

10.8. Рассчитать необходимые параметры и построить зонные диаграммы диода с барьером Шоттки на основе германия электронного типа проводимости при температуре 200 К в равновесном состоянии, а также при прямом смещении 0,5 В и обратном смещении 10 В при следующих параметрах: работа выхода электрона из металла составляет 0,9 эВ, концентрация донорной примеси – 10^{13} см^{-3} .

10.9. Рассчитать и построить вольт-амперные характеристики диода с барьером Шоттки при комнатной температуре, полагая, что контактная разность потенциалов составляет 0,6 В, концентрация донорной примеси – 10^{15} см^{-3} . Изменение прямого смещения на диоде – от 0 до 1 В через 0,2 В, обратного – от 0 до 50 В через 10 В.

10.10. Определить контактную разность потенциалов, возникающую в электронно-дырочном переходе при комнатной температуре и концентрациях основных носителей заряда в n - и p -областях кремния соответственно $1,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Изобразить зонную диаграмму.

10.11. Найти контактную разность потенциалов, возникающую при комнатной температуре в электронно-дырочном переходе,

полученном в германии при концентрациях донорной и акцепторной примесей, равных 10^{15} см^{-3} . Изобразить зонную диаграмму.

10.12. Определить величину контактной разности потенциалов в электронно-дырочном переходе в германии при температуре 200 К и следующих концентрациях основных носителей заряда: $n_n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $p_p = 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Изобразить зонную диаграмму.

10.13. Как и во сколько раз изменится величина контактной разности потенциалов в электронно-дырочном переходе, созданном в кремнии, при изменении температуры от 300 до 400 К, если концентрации основных носителей заряда в n - и p -областях равны соответственно 10^{12} и 10^{15} см^{-3} .

10.14. Выразить зависимость контактной разности потенциалов электронно-дырочного перехода от удельных сопротивлений электронной и дырочной областей.

10.15. Определить контактную разность потенциалов электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре, если удельные сопротивления электронной и дырочной областей равны соответственно 0,01 и 1 Ом·см.

10.16. Контактная разность потенциалов электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре равна 0,072 В. Концентрация основных носителей заряда в n -области составляет 10^{21} м^{-3} . Найти концентрацию неосновных носителей заряда в p -области.

10.17. Найти величину контактной разности потенциалов электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре, зная удельные электропроводности электронной и дырочной областей σ_n и σ_p .

10.18. Рассчитать равновесную ширину симметричного электронно-дырочного перехода в германии, если контактная разность потенциалов равна 0,43 В, а концентрация примесей 10^{17} см^{-3} .

10.19. Построить зонную диаграмму симметричного электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре и концентрации примесей 10^{15} см^{-3} .

10.20. Построить зонную диаграмму электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре, если концентрация донорной примеси составляет 10^{17} см^{-3} , акцепторной – 10^{15} см^{-3} .

10.21. Определить равновесную ширину электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре, если контактная разность потенциалов равна 0,42 В, а удельные сопротивления электронной и дырочной областей соответственно равны 0,01 и 1 Ом·см.

10.22. Найти толщину области пространственного заряда в германиевом электронно-дырочном переходе при комнатной температуре и концентрациях электронов в n -области $n_n = 10^{21} \text{ м}^{-3}$, а в p -области $n_p = 5 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$.

10.23. Равновесная ширина несимметричного электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре равна $7,65 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, а контактная разность потенциалов 0,68 В. Определить концентрацию донорной примеси при условии, что p -область легирована значительно сильнее.

10.24. Несимметричный электронно-дырочный переход в кремнии имеет низкоомную p -область и относительно высокоомную n -область. Вычислить равновесную толщину области пространственного заряда, если контактная разность потенциалов составляет 0,75 В, а удельное сопротивление n -области равно 1 Ом·см.

10.25. Найти значения толщины области пространственного заряда симметричного электронно-дырочного перехода в кремнии при приложении электрического смещения: а) прямого $U_{np} = 0,3 \text{ В}$; б) обратного $U_{обр} = -50 \text{ В}$ при комнатной температуре. Концентрация примеси в каждой области составляет 10^{15} см^{-3} . Изобразить зонные диаграммы для равновесного состояния, а также после приложения прямого и обратного смещения.

10.26. Определить ширину области пространственного заряда электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре и подаче обратного электрического смещения, равного - 10 В, если удельное сопротивление электронной области $\rho_n =$

$= 0,01 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, а дырочной – $\rho_p = 0,5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$. Считать примеси полностью ионизированными.

10.27. Какова ширина области пространственного заряда электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре и обратном напряжении, равном -50 В , если равновесная ширина составляет $1,2 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, а контактная разность потенциалов $0,58 \text{ В}$?

10.28. Ширина электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре после приложения обратного смещения, равного -20 В , имеет величину $1,9 \cdot 10^{-4} \text{ см}$. Определить равновесную ширину перехода, если контактная разность потенциалов равна $0,4 \text{ В}$.

10.29. Рассчитать необходимые параметры и построить зонные диаграммы электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре в равновесном состоянии, а также при прямом и обратном смещении для следующих условий: 1) концентрация примеси в обеих областях одинакова и равна 10^{15} см^{-3} ; 2) $N_D = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $N_A = 3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$; 3) $N_D = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $N_A = 10^{17} \text{ см}^{-3}$, температура равна 150 К .

10.30. В несимметричном электронно-дырочном переходе в германии дебаевская длина экранирования в высокоомной области составляет $0,1 \text{ мкм}$, а контактная разность потенциалов равна $0,5 \text{ В}$. Найти равновесную ширину электронно-дырочного перехода при комнатной температуре.

10.31. Найти отношение равновесной ширины несимметричного электронно-дырочного перехода в германии к дебаевской длине экранирования в его высокоомной области, если $\rho_p = 0,01 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, $\rho_n = 1 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, $T = 300 \text{ К}$.

10.32. В кремниевом электронно-дырочном переходе площадью 10^{-8} м^2 при комнатной температуре концентрация акцепторной примеси в p -области равна 10^{15} см^{-3} , а донорной в n -области – 10^{14} см^{-3} , величина приложенного обратного смещения составляет -10 В . Определить: а) высоту потенциального барьера; б) координаты границ области пространственного заряда p - n -перехода; в) барьерную емкость. Построить зонную энергетическую диаграмму, найдя положение уровней Ферми в n - и p -областях.

10.33. Найти значения зарядной емкости, приходящейся на 1 см^2 поверхности симметричного электронно-дырочного перехода в кремнии, при прямом напряжении, равном $0,3 \text{ В}$, и обратном, равном -50 В , если температура комнатная, а концентрация доноров и акцепторов составляет 10^{15} см^{-3} .

10.34. Какие изменения претерпевает емкость симметричного электронно-дырочного перехода в германии при комнатной температуре при изменении напряжения от $U_{np} = 0,1 \text{ В}$ до $U_{обр} = -10 \text{ В}$, если концентрации донорной и акцепторной примесей равны 10^{17} см^{-3} , а контактная разность потенциалов – $0,4 \text{ В}$?

10.35. Какова величина барьерной емкости, приходящейся на 1 см^2 поверхности несимметричного электронно-дырочного перехода в германии при обратном смещении, равном -20 В , и комнатной температуре? Концентрация доноров в n -области значительно превышает концентрацию акцепторов в p -области, равную 10^{16} см^{-3} , контактная разность потенциалов составляет $0,43 \text{ В}$.

10.36. Определить диффузионную емкость электронно-дырочного перехода в кремнии площадью $0,01 \text{ см}^2$ при комнатной температуре после приложения прямого смещения, равного $0,2 \text{ В}$, если известно, что равновесная ширина перехода составляет $7,6 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, а контактная разность потенциалов $0,68 \text{ В}$.

10.37. Какова ширина области пространственного заряда электронно-дырочного перехода в кремнии площадью $0,5 \text{ см}^2$ при комнатной температуре, если известно, что его зарядная емкость равна $25,8 \text{ пФ}$?

10.38. При приложении к электронно-дырочному переходу в германии площадью $0,01 \text{ см}^2$ напряжения обратного смещения, равного -5 В , барьерная емкость достигает величины 46 пФ . Определить равновесную ширину перехода, если контактная разность потенциалов составляет $0,37 \text{ В}$.

10.39. Определить диффузионную емкость электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре и значении прямого тока 10 мА . Время жизни неосновных носителей заряда в базе принять равным 50 мкс .

10.40. Найти значение диффузионной емкости электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре, если ток насыщения равен 30 мкА, величина напряжения прямого смещения 0,2 В, а время жизни неосновных носителей заряда – 15 мкс.

10.41. Вычислить удельную емкость электронно-дырочного перехода, созданного в германиевом образце, при обратном смещении, равном -1 В. Контактная разность потенциалов составляет 0,35 В, равновесная ширина области пространственного заряда – 0,6 мкм.

10.42. Найти диффузионную емкость несимметричного электронно-дырочного перехода при комнатной температуре и токе 2 мА для случая, когда толщина базы значительно больше диффузионной длины, а время жизни неосновных носителей заряда в базе составляет 5 мкс.

10.43. Определить плотность тока насыщения германиевого симметричного электронно-дырочного перехода при комнатной температуре, если концентрации неосновных носителей заряда в обеих областях равны 10^{12} см^{-3} .

10.44. Определить плотность тока насыщения электронно-дырочного перехода в германии площадью $0,05 \text{ см}^2$ при комнатной температуре и следующих параметрах: $n_n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$; $p_p = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$; $L_n = 0,15 \text{ см}$; $L_p = 0,1 \text{ см}$.

10.45. Какова плотность тока насыщения электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре, если $\rho_n = 50 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; $\rho_p = 10 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; $L_n = 0,05 \text{ см}$; $L_p = 0,03 \text{ см}$?

10.46. Найти ток насыщения для симметричного кремниевого электронно-дырочного перехода при комнатной температуре, если проводимости n - и p -областей равны $1 \text{ См}\cdot\text{см}^{-1}$; диффузионные длины – 0,1 см; площадь p - n -перехода – 10 мм^2 ; удельное сопротивление собственного кремния – $2 \cdot 10^3 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

10.47. В полупроводнике создан резкий несимметричный электронно-дырочный переход. Удельные сопротивления n - и p -областей соответственно равны $\rho_n = 1 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; $\rho_p = 0,1 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; диффузионные длины неосновных носителей заряда для электронов и

дырок составляют $L_n = 0,1$ см, $L_p = 0,2$ см. Найти отношение дырочного тока к электронному в центре электронно-дырочного перехода.

10.48. Найти плотность тока насыщения электронно-дырочного перехода в кремнии при комнатной температуре. Концентрация неосновных носителей заряда в обеих областях равна 10^6 см⁻³, диффузионная длина электронов составляет 0,04 см, а дырок – 0,02 см.

10.49. Обратный ток насыщения кремниевого электронно-дырочного перехода равен 0,5 мкА, а прямой ток при напряжении U и комнатной температуре составляет 10 мА. Найти напряжение U на p - n -переходе.

10.50. Обратный ток насыщения кремниевого диода при комнатной температуре составляет 0,1 мкА. Найти дифференциальное сопротивление диода и сопротивление постоянному току при внешнем напряжении 0,3 В, приложенном в прямом направлении.

10.51. Вычислить прямой ток через электронно-дырочный переход при напряжениях 0,3 и 0,4 В при комнатной температуре, если известно, что обратный ток насыщения составляет 0,1 мкА.

10.52. Найти обратный ток насыщения несимметричного кремниевого электронно-дырочного перехода площадью 0,1 см² при комнатной температуре, если удельное сопротивление базы p -типа составляет 1 Ом·см, а время жизни носителей в базе равно 5 мкс.

10.53. Определить среднюю напряженность электрического поля в резком симметричном электронно-дырочном переходе, полученном в кремнии, для случая его равновесного состояния. Концентрации примеси равны 10^{15} см⁻³.

10.54. Найти максимальную напряженность электрического поля в германиевом электронно-дырочном переходе при внешнем напряжении 4 В, приложенном в обратном направлении, если известно, что концентрация примеси в базе составляет 10^{20} м⁻³.

ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ

Постоянная Планка	$h = 6,623 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Планка	$\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град = $8,63 \cdot 10^{-5}$ эВ/град
Тепловая энергия при $T = 300$ К	$kT = 0,0256$ эВ
Газовая постоянная	$R = 8,31$ Дж/моль·К
Скорость света	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Число Авогадро	$N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ молекул/моль
Масса покоя электрона	$m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Заряд электрона	$e = - 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Магнетон Бора	$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Ядерный магнетон	$\mu_p = 5,05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

СВОЙСТВА КРЕМНИЯ И ГЕРМАНИИ ПРИ 300 К

<i>Параметр</i>	<i>Кремний</i>	<i>Германий</i>
Кристаллическая структура	Типа алмаза	Типа алмаза
Число атомов на элементарную ячейку	8	8
Атомный номер	14	32
Постоянная решетки a , нм	0,543	0,566
Ширина запрещенной зоны ΔE_0 , эВ	1,124	0,670
Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ	11,7	16,0
Собственная концентрация носителей n_i , см ⁻³	$1,45 \cdot 10^{10}$	$2,4 \cdot 10^{13}$
Решеточная подвижность электронов μ_n , см ² /(В·с) дырок μ_p , см ² /(В·с)	1417 471	3900 1900
Эффективная плотность состояний, см ⁻³ в зоне проводимости N_c в валентной зоне N_v	$2.80 \cdot 10^{19}$ $1.04 \cdot 10^{19}$	$1.04 \cdot 10^{19}$ $6.04 \cdot 10^{18}$
Коэффициент диффузии электронов D_n , см ² /с дырок, D_p , см ² /с	34,6 12,3	98,0 47,0

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Орешкин П.Т. Физика полупроводников и диэлектриков. – М.: Высшая школа, 1977. – 448 с.
2. Епифанов Г.И. Физика твердого тела. - М.: Лань, 2010. - 288 с.
3. Шалимова К. В. Физика полупроводников. – М.: Лань, 2010. – 400 с.
4. Морозов А.И. Элементы современной физики твердого тела. – М.:ИД Интеллект, 2015. - 216 с.
5. Физика твердого тела: методические указания к практическим занятиям / Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост. Т.А. Холомина. – Рязань, 2006. – 40 с.
6. Бонч-Бруевич В.Л., Звягин И.П., Карпенко И.В., Миронов А.Г. Сборник задач по физике полупроводников. – М.: Наука, 1987. – 144 с.
7. Задачи по физике твердого тела / под ред. Г.Дж. Голдсмида. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Основы квантовой физики.....	3
2. Расчет концентрации носителей заряда в собственных и примесных полупроводниках. Условие электронейтральности. Закон действующих масс.....	8
3. Зависимость концентрации свободных носителей заряда и положения уровня Ферми в полупроводниках от температуры.....	11
4. Кинетические явления в твердых телах. Электропроводность...	18
5. Тепловые колебания кристаллической решетки. Термоэлектрические явления в твердых телах.....	24
6. Эффект Холла.....	35
7. Неравновесные процессы в твердых телах.....	42
8. Оптические и фотоэлектрические явления в твердых телах.....	49
9. Магнитные свойства твердых тел.....	52
10. Контактные явления в твердых телах.....	56
Значения некоторых физических постоянных.....	65
Свойства германия и кремния при 300 К.....	66
Библиографический список.....	67

Х о л о м и н а Татьяна Андреевна

Электронные процессы в твердом теле

Редактор М.Е. Цветкова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 15.10.17. Формат бумаги 60х84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,25.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

Оператор ЭДО ООО "Компания "Тензор"

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

ПОДПИСАНО

ФГБОУ ВО "РГРТУ", РГРТУ, Литвинов Владимир Георгиевич,
Заведующий кафедрой МНЭЛ

08.07.26 13:42
(МСК)

Простая подпись