

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.Ф. УТКИНА**

А.П. Капранов, Г.А. Борисов, Р.А. Чесноков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к практическим занятиям (кинематика)

Рязань 2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.Ф. УТКИНА»

Факультет вычислительной техники

[Кафедра космических технологий](#)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к практическим занятиям (кинематика)

Направление подготовки:

02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

24.05.06 «Системы управления летательными аппаратами»

Форма обучения: очная

Рязань 2022 г.

УДК: 531

А.П. Капранов, Г.А. Борисов, Р.А. Чесноков «Теоретическая механика»: Методические указания к практическим занятиям (кинематика) разработаны в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 24.05.06 «Системы управления летательными аппаратами» Положения об ООП, реализуемой по ФГОС ВО – Рязань РГРТУ, 2021. – 13 с.

Ил. 13. Библиогр 4 назв.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению: 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 24.05.06 «Системы управления летательными аппаратами»

Методические указания к практическим занятиям (кинематика) по дисциплине «Теоретическая механика» рассмотрены и одобрены на заседании кафедры «Космические технологии», протокол № _____ от _____ 2022 г.

Содержание

	Стр.
1. ВЕКТОРНЫЙ, КООРДИНАТНЫЙ И ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ.	5
2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА	9
3. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ В ЕЕ ПЛОСКОСТИ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА.	11
ЛИТЕРАТУРА	15

**ТЕМА: «1. ВЕКТОРНЫЙ И КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБЫ
ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ
ТОЧКИ».**

1. Векторное и скалярные уравнения движения точки.
2. Как из уравнений движения точки получить уравнение траектории?
3. Векторное и скалярные уравнения скорости точки. Формулы расчёта модуля скорости и направляющих косинусов.
4. Векторное и скалярные уравнения ускорения точки. Формулы расчёта модуля ускорения и направляющих косинусов.

1.1. По данному уравнению движения точки на произвольно выбранной траектории построить через равные промежутки времени шесть положений точки, определить расстояние s по траектории от начала отсчета до конечного положения точки и пройденный ею путь σ за указанный промежуток времени (s и σ - в сантиметрах, t - в секундах).

1) $s = 5 - 4t + t^2, 0 \leq t \leq 5$.

Ответ: $s = 10$ см, $\sigma = 13$ см.

2) $s = 1 + 2t - t^2, 0 \leq t \leq 2,5$.

Ответ: $s = -0,25$ см, $\sigma = 3,25$ см.

3) $s = 4 \sin 10t, \pi / 20 \leq t \leq 3\pi / 10$.

Ответ: $s = 0$, $\sigma = 20$ см.

1.2 По данным уравнениям движения точки найти уравнения ее траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения.

1) $x = 3t - 5, y = 4 - 2t$.

Ответ: Полупрямая $2x + 3y - 2 = 0$ с началом в точке $x = -5, y = 4$.

2) $x = 2t, y = 8t^2$.

Ответ: Правая ветвь параболы $y = 2x^2$ с начальной точкой $x = 0, y = 0$.

3) $x = 5 \sin 10t, y = 3 \cos 10t$.

Ответ: Эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ с начальной точкой $x = 0, y = 3$.

4) $x = 2 - 3 \cos 5t, y = 4 \sin 5t - 1$.

Ответ: Эллипс $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ начальной точкой $x = -$

1, $y = -1$.

$$5) x = cht = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), y = cht = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

Ответ: Верхняя часть правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ с начальной точкой $x = 1, y = 0$.

1.3. По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

1) $x = 3t^2, y = 4t^2$.

Ответ: Полупрямая $4x - 3y = 0; s = 5t^2$.

2) $x = 3\sin t, y = 3\cos t$.

Ответ: Окружность $x^2 + y^2 = 9; s = 3t$.

3) $x = a \cos^2 t, y = a \sin^2 t$.

Ответ: Отрезок прямой $x + y = a = 0$, причем $0 \leq x \leq a$;

$$s = a\sqrt{2} \sin^2 t.$$

4) $x = 5\cos 5t^2, y = 5\sin 5t^2$.

Ответ: Окружность $x^2 + y^2 = 25; s = 25t^2$.

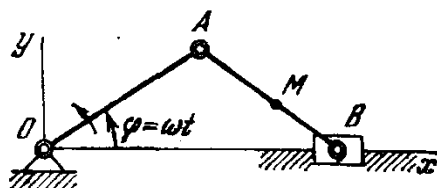
1.4. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ($\omega = 10$ рад/с. Длина $OA = AB = 80$ см. Найти уравнения движения и траекторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна B , если в начальный момент ползун находился в крайнем правом положении; оси координат указаны на рисунке.

Ответ: 1) $x_M = 120\cos 10t, y_M = 40\sin 10t$.

2) Траекторией точки M является эллипс

$$\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1;$$

2) уравнение движения ползуна $Bx = 160\cos 10t$.



К задаче 1.4.

1.5. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти скорость середины M шатуна кривошипно-ползунного механизма и скорость ползуна B в зависимости от времени если $OA = AB = a$ (см. рисунок к задаче 10.12).

Ответ: 1) $v_M = \frac{a}{2} \omega \sqrt{8 \sin^2 \omega t + 1}$; 2) $v_B = 2a\omega \sin \omega t$.

1.6. Движение точки задано уравнениями $x = v_0 t \cos \alpha_0$, $y = v_0 t \sin \alpha_0 - 1/2 g t^2$, причем ось Ox горизонтальна, ось Oy направлена по вертикали вверх, v_0 , g и $\alpha_0 < \pi/2$ - величины постоянные. Найти: 1) траекторию точки, 2) координаты наивысшего ее положения, 3) проекции скорости на координатные оси в тот момент, когда точка находится на оси Ox .

Ответ: 1) Парабола $y = x \tan \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$; 2)

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \times \sin^2 \alpha_0, \quad y = \frac{v_0^2}{2g} \times \sin^2 \alpha_0, \quad 3) \quad v_x = v_0 \cos \alpha_0,$$

$v_y = \pm v_0 \sin \alpha_0$, причем верхний знак соответствует начальному

моменту времени, а нижний - моменту $t = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}$.

1.7. Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением $\omega_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t$ м/с. Найти уравнение движения ползуна, если его начальная скорость $v_{0x} = 2\pi$ м/с, а начальное положение совпадает со средним положением ползуна, принятым за начало координат. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

Ответ: $x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t$ м.

2.1. Поезд движется равномерно по дуге окружности радиуса $R = 800$ м и проходит путь $s = 800$ м, имея начальную скорость

$v_0 = 54$ км/ч и конечную $v = 18$ км/ч. Определить полное ускорение поезда в начале и в конце дуги, а также время движения по этой дуге.

Ответ: $a_0 = 0,308$ м/с², $a = 0,129$ м/с², $T = 80$ с.

2.2. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 20$ см. Закон ее движения по траектории: $s = 20\sin\pi t$ (t - в секундах, s - в сантиметрах). Найти величину и направление скорости, касательное, нормальное и полное ускорения точки в момент $t = 5$ с. Построить также графики скорости, касательного и нормального ускорений.

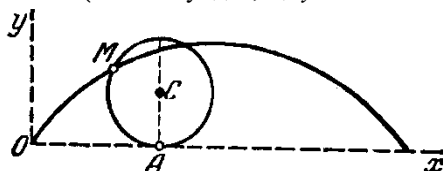
Ответ: Скорость равна по величине 20π см/с и направлена в сторону, противоположную положительному направлению отсчета дуги s ; $a_t = 0$; $v_0 = a_n = 20\pi^2$ см/с².

2.3. Уравнения движения пальца кривошипа дизеля в период пуска имеют вид $x = 75\cos 4t^2$, $y = 75\sin 4t^2$ (x, y — в сантиметрах, t - в секундах). Найти скорость, касательное и нормальное ускорения пальца.

Ответ: $v = 600t$ см/с, $a_t = 600$ см/с², $a_n = 4800t^2$ см/с².

2.4. Найти величину и направление ускорения, а также радиус кривизны траектории точки колеса, катящегося без скольжения по горизонтальной оси Ox , если точка описывает циклоиду согласно уравнениям $x = 20t - \sin 20t$, $y = 1 - \cos 20t$ (t —в секундах, x, y - в метрах). Определить также значение радиуса кривизны ρ при $t = 0$.

Ответ: Ускорение $a = 400$ м/с² и направлено по MC к центру C катящегося круга; $\rho = 2MA$, $\rho_0 = 0$.



К задаче 2.4.

2.5. Снаряд движется в вертикальной плоскости согласно уравнениям $x = 300t$, $y = 400t - 5t^2$ (t - в секундах, x, y — в метрах). Найти: 1) скорость и ускорение в начальный момент, 2) высоту и дальность обстрела, 3) радиус кривизны траектории в начальной и в наивысшей точках

Ответ: $v_0 = 500$ м/с. $a_0 = 10$ м/с², $h = 8$ км, $s = 24$ км, $\rho_0 = 41,67$ км, $\rho = 9$ км.

2.6. Точка движется по винтовой линии согласно уравнениям $x = 2\cos 4t$, $y = 2\sin 4t$, $z = 2t$, причем за единицу длины взят метр.

Определить радиус кривизны ρ траектории.

Ответ: $\rho = 2 \frac{1}{8}$ м.

*ТЕМА: «ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ
ТВЁРДОГО ТЕЛА».*

1. Поступательное движение твёрдого тела.
 - 1.1. Что является уравнением поступательного движения твёрдого тела?
 - 1.2. Свойства траекторий точек тела при поступательном его движении.
 - 1.3. Свойство скоростей и ускорений.
2. Вращательное движение твёрдого тела.
 - 2.1. Уравнение вращения.
 - 2.2. Алгебраические выражения угловой скорости и углового ускорения.
 - 2.3. Алгебраические выражения скорости точки тела, её касательного, нормального и полного ускорений.
 - 2.4. Векторные выражения углового ускорения (как производной от угловой скорости), скорости точки тела, касательного и нормального ее ускорений.
 - 2.5. Зависимость угловой скорости от времени и уравнение вращения при равномерном и равнопеременном вращении.

3.1. Написать уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален кубу времени и при $t = 3$ с угловая скорость диска равна $\omega = 27\pi$ рад/с.

Ответ: $\varphi = \pi t^3$ рад.

3.2. Тело, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, делает 3600 оборотов в первые 2 минуты. Определить угловое ускорение.

Ответ: $\varepsilon = \pi$ рад/с².

3.3. Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5 с он совершает 12,5 оборота. Какова его угловая скорость по истечении этих 5 с?

Ответ: $\omega = 10\pi$ рад/с.

3.4. Маховое колесо радиуса $0,5$ м вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна 2 м/с. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

Ответ: $n = 38,2$ об/мин.

3.5. Точка A шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью 50 см/с, а некоторая точка B , взятая на одном радиусе с точкой A , движется со скоростью 10 см/с;

расстояние $AB = 20$ см. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.

Ответ: $\omega = 2$ рад/с, $d = 50$ см.

3.6. Маховое колесо радиуса $R = 2$ м вращается равноускоренно из состояния покоя; через $t = 10$ с точки, лежащие на ободе, обладают линейной скоростью $v = 100$ м/с. Найти скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса для момента $t = 15$ с.

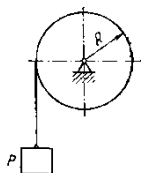
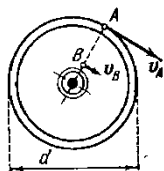
Ответ: $v = 150$ м/с, $\omega n = 11250$ м/с², $\omega_\tau = 10$ м/с².

3.7. Угол наклона полного ускорения точки обода махового колеса к радиусу равен 60° . Касательное ускорение ее в данный момент $\omega_\tau = 10\sqrt{3}$ м/с². Найти нормальное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии $r = 0,5$ м. Радиус махового колеса $R = 1$ м.

Ответ: $\omega_n = 5$ м/с².

3.8. Вал радиуса $R = 10$ см приводится во вращение гирей P , привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x = 100t^2$, где x - расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t - время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности вала в момент t .

Ответ: $\omega = 20t$ рад/с, $\varepsilon = 20$ рад/с², $w = 200\sqrt{1 + 400t^4}$ см/с².



К задаче 3.5.

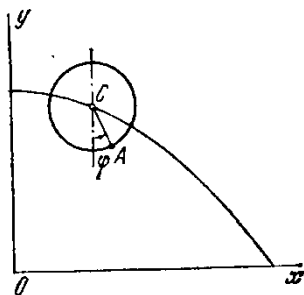
К задаче 3.8.

*ТЕМА: «ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ДВИЖЕНИЕ
ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ В ЕЕ ПЛОСКОСТИ. СКОРОСТЬ И
УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО
ТЕЛА».*

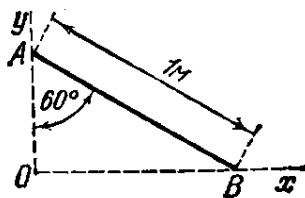
1. Определение плоского движения тела.
2. Уравнения плоского движения тела.
3. Основная теорема о скоростях точек тела (формула).
4. Свойство проекции скоростей двух точек тела при плоском его движении на линию, соединяющую эти точки (формулировка).
5. Свойство деления прямой, соединяющей концы векторов $\vec{V}$ двух точек А и В тела вектором $\vec{V}_C$ третьей (промежуточной) точки С (точки А, В и С лежат на одной прямой).
6. Мгновенный центр скоростей (М.Ц.С.).
 - 1) Определение и правило его нахождения.
 - 2) Правила определения положения М.Ц.С. в различных частных случаях.
 - 3) Расчёт скорости точки тела через М.Ц.С.

4.1. При движении диска радиуса $r = 20$ см в вертикальной плоскости xy его центр C движется согласно уравнениям $x_c = 10t$ м, $y_c = (100 - 4,9t^2)$ м. При этом диск вращается вокруг горизонтальной оси C , перпендикулярной плоскости диска, с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi/2$ рад/с. Определить в момент времени $t=0$ скорость точки А, лежащей на ободе диска. Положение точки А на диске определяется углом $\varphi = \omega t$, отсчитываемым от вертикали против хода часовой стрелки.

Ответ: Скорость направлена по горизонтали вправо и равна по модулю 10,31 м/с.



К задаче 4.1.



К задаче 4.3.

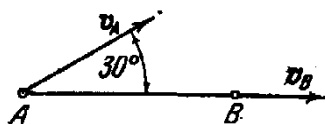
4.2. Сохранив условие предыдущей задачи, определить скорость точки A в момент времени $t = 1$ с.

Ответ: $v_{Ax} = 10$ м/с, $v_{Ay} = -9,49$ м/с, $v_A = 13,8$ м/с.

4.3. Стержень AB длины 1 м движется, опираясь все время своими концами на две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy. Найти координаты x и мгновенного центра скоростей в тот момент, когда угол $OAB = 60^\circ$.

Ответ: $x = 0,866$ м, $y = 0,5$ м.

4.4. Прямая AB движется в плоскости рисунка. В некоторый момент времени скорость v_A точки A составляет с прямой AB угол 30° и равна 180 см/с, направление скорости точки B в этот момент совпадает с направлением прямой AB. Определить скорость v_B точки B. Ответ: $v_B = 156$ см/с.



К задаче 4.4.

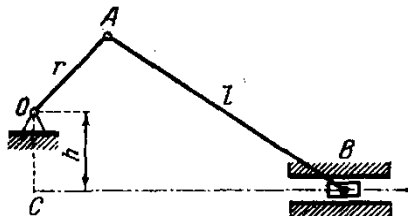


К задаче 4.5.

4.5. Стержень AB длины 0,5 м движется в плоскости рисунка. Скорость v_A ($v_A = 2$ м/с) образует угол 45° с осью x, совмещенной со стержнем. Скорость v_B точки B образует угол 60° с осью x. Найти модуль скорости точки B и угловую скорость стержня.

Ответ: $v_B = 2,82$ м/с, $\omega = 2,06$ рад/с.

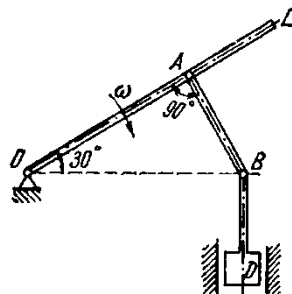
4.6. Найти скорость ползуна B нецентрального кривошипного механизма при двух горизонтальных и двух вертикальных положениях кривошипа, вращающегося вокруг вала O с угловой скоростью $\omega = 1,5$ рад/с, если $OA = 40$ см, $AB = 200$ см, $OC = 20$ см.



Ответ: $v_1 = v_3 = 6,03$ см/с,
 $v_2 = v_4 = 60$ см/с.

К задаче 4.6.

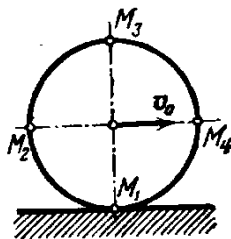
4.7. Поршень D гидравлического пресса приводится в движение посредством шарнирно-рычажного механизма $OABD$. В положении, указанном на рисунке, рычаг OL имеет угловую скорость $\omega = 2$ рад/с. Определить скорость поршня D и угловую скорость звена AB , если $OA = 15$ см.



Ответ: $v_D = 34,6$ см/с, $\omega_{AB} = 2$ рад/с.

К задаче 4.7.

4.8. Колесо радиуса $R = 0,5$ м катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна $v_0 = 10$ м/с. Найти скорости концов M_1 , M_2 , M_3 и M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса. Определить его угловую скорость.



Ответ: $v_1 = 0$, $v_2 = 14,14$ м/с, $v_3 = 20$ м/с, $v_4 = 14,14$ м/с, $\omega = 20$ рад/с.

К задаче 4.8.

«РАСЧЁТ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ ЕГО ДВИЖЕНИИ».

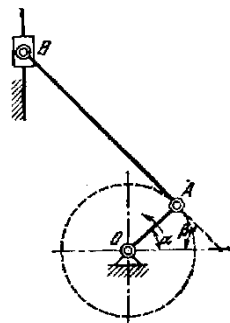
1. Основная теорема об ускорении точки тела при плоском его движении (векторная формула).
2. Векторные и алгебраические формулы вращательной и центростремительной составляющих.
3. Формулировки первого и второго следствий из основной теоремы.
4. Методы определения мгновенного центра ускорений (М.Ц.У).
5. Методы расчёта ускорений точек тела посредством М.Ц.У.

6.1. При движении диска радиуса $r = 20$ см в вертикальной плоскости xy его центр C движется согласно уравнениям $x_c = 10t$ м, $y_c = (100 - 4,9t^2)$ м. При этом диск вращается вокруг горизонтальной оси C , перпендикулярной плоскости диска, с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi/2$ рад/с (см. рисунок к задаче 4.1.). Определить в момент времени $t=0$ ускорение точки A , лежащей на ободе диска. Положение точки A на диске определяется углом $\varphi = \omega t$, отсчитываемым от вертикали, против хода часовой стрелки.

Ответ: Ускорение направлено по вертикали вниз и равно по модулю $9,31$ м/с².

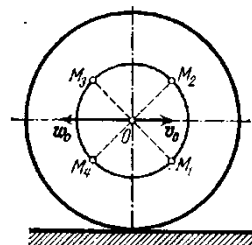
6.2. Кривошип OA длины 20 см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ рад/с и приводит в движение шатун AB длины 100 см; ползун B движется по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Ответ: $\omega = 2$ рад/с, $\varepsilon = 16$ рад/с², $\omega_B = 565,6$ см/с².



К задаче 6.2.

6.3. Вагон трамвая движется по прямолинейному горизонтальному участку пути с замедлением $\omega_0 = 2$ м/с², имея в данный момент скорость $v_0 = 1$ м/с. Колеса катятся по рельсам без скольжения. Найти ускорения концов двух диаметров ротора, образующих с вертикалью углы по 45° , если радиус колеса $R = 0,5$ м, а ротора $r = 0,25$ м.



Ответ: $\omega_1 = 2,449 \text{ м/с}^2$, $\omega_2 = 3,414 \text{ м/с}^2$, $\omega_3 = 2,449 \text{ м/с}$, $\omega_4 = 0,586 \text{ м/с}^2$.
К задаче 6.3.

Литература

а) основная:

1. Митюшов, Е. А. Теоретическая механика [Текст] : учебник для студентов вузов / Е. А. Митюшов, С. А. Берестова. - 2-е изд. ; перераб. - Москва : Академия, 2011. - 320 с. - (Бакалавриат).

2. Лачуга, Ю. Ф. Теоретическая механика [Текст] : учебник для студентов высших аграрных заведений, обучающихся по агроинженерным специальностям / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. - 3-е изд. ; перераб. и доп. - М. : КолосС, 2010. - 576 с. : ил. - (Учебники и учебные пособия для студентов высших учебных заведений).

б) дополнительная:

1. Ксендзов, В. А. Теоретическая механика. Курс лекций [Текст] : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению "Агроинженерия" / В. А. Ксендзов, А. В. Паршков. - Рязань : РГАТУ, 2012. - 380 с.

2. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика [Текст] : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. - 12-е изд. ; стер. - СПб. : Лань, 2013. - 672 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).