МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.Ф. УТКИНА»

Кафедра «Высшей математики»

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

по дисциплине

Б1.О.02.01 «Дополнительные главы высшей математики»

Направление подготовки – 02.03.01
«Математика и компьютерные науки»

ООП академического бакалавриата
«Математика и компьютерные науки»

Квалификация выпускника – бакалавр

Формы обучения – очная

Рязань 2024

Оценочные материалы – это совокупность учебно-методических материалов (контрольных заданий, описаний форм и процедур, оцениваемых ресурсов в дистанционных учебных курсах), предназначенных для оценки качества освоения обучающимися дисциплины «Дополнительные главы высшей математики» как части основной образовательной программы.

Цель – оценить соответствие знаний, умений и уровня приобретённых компетенций, обучающихся целям и требованиям основной образовательной программы в ходе проведения текущего контроля и промежуточной аттестации.

Основная задача – обеспечить оценку уровня сформированности общекультурных и профессиональных компетенций, приобретаемых обучающимся в соответствии с этими требованиями.

Контроль знаний, обучающихся проводится в форме текущего контроля и промежуточной аттестации.

Текущий контроль успеваемости проводится с целью определения степени усвоения учебного материала, своевременного выявления и устранения недостатков в подготовке обучающихся и принятия необходимых мер по совершенствованию методики преподавания учебной дисциплины (модуля), организации работы обучающихся в ходе учебных занятий и оказания им индивидуальной помощи.

К контролю текущей успеваемости относятся проверка знаний, умений и навыков обучающихся: на занятиях; по результатам выполнения РГР; по результатам проверки качества конспектов лекций и иных материалов. При оценивании (определении) результатов освоения дисциплины применяется традиционная шкала оценивания («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» на экзамене (или на зачете с оценкой) или «зачтено», «незачтено» на зачете).

Текущая аттестация студентов проводится на основании результатов выполнения ими расчетных графических работ (РГР) и оформляется в виде ведомостей по системе 0-1-2.

По итогам изучения разделов дисциплины «Дополнительные главы высшей математики» обучающиеся в конце каждого учебного семестра проходят промежуточную аттестации. Форма проведения аттестации – экзамен или зачет в устной, письменной формах или тест: электронный билет, формируемый случайным способом. Экзаменационные билеты и перечни вопросов, задач, примеров, выносимых на промежуточную аттестацию, составляются с учётом содержания тем учебной дисциплины и подписываются заведующим кафедрой.

В экзаменационный билет или вариант теста включаются два теоретических вопроса и до четырёх практических задач по темам дисциплины (протокол заседания кафедры Высшей математики №10 от от 26 апреля 2017г.).

Паспорт оценочных материалов по дисциплине

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или её части)	Вид, метод, форма оценочного мероприятия
1	Модуль 1. Введение в дисциплину. Элементы теории логики, множеств и отношений	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Экзамен
2	Модуль 2. Теория делимости в кольце целых чисел. Теория цепных дробей	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Экзамен
3	Модуль 3. Теория сравнений и ее арифметические приложения	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Экзамен
4	Модуль 4. Системы линейных алгебраических уравнений и численные методы линейной алгебры	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Экзамен
5	Модуль 5. Линейные пространства	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Зачет с оценкой
6	Модуль 6. Евклидовы пространства	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Зачет с оценкой
7	Модуль 7. Теория линейных операторов в конечномерных пространствах	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Зачет с оценкой
8	Модуль 8. Квадратичные формы и их приложения	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Зачет с оценкой
9	Модуль 9. Основные алгебраические структуры: алгебры и группы	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	Зачет
10	Модуль 10. Основные алгебраические структуры: кольца и поля. Кольцо многочленов. Поле рациональных дробей	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	Зачет
11	Модуль 11. Метрические пространства	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Зачет с оценкой
12	Модуль 12. Линейные нормированные пространства	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	Зачет с РГР, Зачет с оценкой
13	Модуль 13. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Зачет с оценкой

14	Модуль 14. Общая теория линейных операторов в бесконечномерных пространствах	ОПК – 1.1-З ОПК – 1.1-У ОПК – 1.1-В	РГР, Зачет с оценкой

Критерии оценивания компетенций (результатов)

1) Уровень усвоения материала, предусмотренного программой.
2) Умение анализировать материал, устанавливать причинно-следственные связи.
3) Качество ответа на вопросы: полнота, аргументированность, убежденность, логичность.
4) Содержательная сторона и качество материалов, приведенных в отчетах студента по типовым расчетам, практическим занятиям.
5) Использование дополнительной литературы при подготовке ответов.

Уровень освоения сформированности знаний, умений и навыков по дисциплине оценивается в форме бальной отметки. Критерии оценивания промежуточной аттестации представлены в таблице.

Шкала оценивания	Критерии оценивания
«отлично»	студент должен: продемонстрировать глубокое и прочное усвоение знаний материала; исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно изложить теоретический материал; правильно формулировать определения; уметь сделать выводы по излагаемому материалу; безупречно ответить не только на вопросы билета, но и на дополнительные вопросы в рамках рабочей программы дисциплины; продемонстрировать умение правильно выполнять практические задания, предусмотренные программой;
«хорошо»	студент должен: продемонстрировать достаточно полное знание материала; продемонстрировать знание основных теоретических понятий; достаточно последовательно, грамотно и логически стройно излагать материал; уметь сделать достаточно обоснованные выводы по излагаемому материалу; ответить на все вопросы билета; продемонстрировать умение правильно выполнять практические задания, предусмотренные программой, при этом возможно допустить непринципиальные ошибки.
«удовлетворительно»	студент должен: продемонстрировать общее знание изучаемого материала; знать основную рекомендуемую программой дисциплины учебную литературу; уметь строить ответ в соответствии со структурой излагаемого вопроса; показать общее владение по-

	нятийным аппаратом дисциплины; уметь устранить допущенные погрешности в ответе на теоретические вопросы и/или при выполнении практических заданий под руководством преподавателя, либо (при неправильном выполнении практического задания) по указанию преподавателя выполнить другие практические задания того же раздела дисциплины.
«неудовлетворительно»	**ставится в случаях:** а) если студент выполнил не все задания, предусмотренного учебным графиком (не зачтен хотя бы один РГР); б) если студент после начала экзамена отказался его сдавать или нарушил правила сдачи экзамена (списывал, подсказывал, обманом пытался получить более высокую оценку и т.д.); в) незнания значительной части программного материала; не владения понятийным аппаратом дисциплины; существенных ошибок при изложении учебного материала; неумения строить ответ в соответствии со структурой излагаемого вопроса; неумения делать выводы по излагаемому материалу

Для каждой из тем дисциплины «Дополнительные главы высшей математики» фонд оценочных средств включает:

- задачи для практических занятий;
- варианты контрольных работ;
- варианты РГР;
- оценочные средства промежуточной аттестации;
- варианты тестовых заданий в дистанционных учебных курсах;
- задачи для проверки остаточных знаний.

Задачи для практических занятий

В ходе практических занятий происходит решение задач, представленных в сборниках задач для практических занятий и самостоятельной работы, которые доступны для скачивания в электронном виде с сайта кафедры или из системы дистанционного обучения РГРТУ:

1. Гришина В.В., Зенин А.А., Ципоркова К.А. Алгебра и теория чисел: методические указания / Рязан. Гос. Радитехн. ун-т. Рязань, 2014. – 52 с.
2. Мурзов Н.В. Основные алгебраические структуры. Учебное пособие. Рязань РГРТА, 1997.
3. Нелюхин, С.А. Элементы функционального анализа: учеб. пособие / С.А. Нелюхин; РГРТУ. - Рязань, 2018. – 84 с. - Библиогр.: с. 83 (11 назв.). - 84-00.
4. Нелюхин, С.А., Сюсюкалов, А.И., Сюсюкалова, Е.А. Элементы функционального анализа: линейные операторы, уравнения в банаховых пространствах:

учеб. пособие / С.А. Нелюхин, А.И. Сюсюкалов, Е.А. Сюсюкалова; РГРТУ. - Рязань, 2019. – 84 с. - Библиогр.: с. 83 (12 назв.). - 84-00.
5. Нелюхин, С.А. Элементы линейной алгебры: линейные пространства, линейные операторы, квадратичные формы : метод. указ. и список заданий по дисц. "Линейная алгебра" / С. А. Нелюхин ; РГРТУ. - Рязань, 2009. - 32с. - Библиогр.: с.32 (6 назв.). - б/ц.
6. Новиков, А.И. Элементы функционального анализа : Учеб.пособие / Новиков Анатолий Иванович ; РГРТА. - Рязань, 1995.
7. Новиков А.И, Нелюхин С.А. Основные алгебраические структуры. Численные методы линейной алгебры. Рязань, РГРТУ, 2021.

Варианты контрольных работ

Текущая проверка знаний, умений и навыков предусматривает в течение каждого семестра периодические опросы и выполнение контрольных работ на практических занятиях. Типовые контрольные работы реализуется в виде типовых вариантов контрольных работ по отдельным темам, которые выполняются студентами в аудиториях. Контрольные опросы производятся на основании соответствующих типовых вопросов промежуточной аттестации.

Примеры вариантов контрольных работ приведены ниже.

Семестр 1. Элементы теории логики, множеств и отношений

Вариант 1

1. Построить таблицу истинности для высказывания $S=\left(x_1\vee x_2\to\overline{x_2}\right)\wedge\left(x_1\to x_2\right)$, упростить данное высказывание. Проверить результат, построив таблицу истинности для упрощенного высказывания.
2. Даны произвольные элементарные высказывания x_1, x_2, x_3. Построить таблицу истинности для высказывания $D=\left(\left(x_2\to x_1\right)\vee x_3\right)\wedge\overline{x_1}\wedge\left(x_3\to x_2\right)$, упростить, оценить его степень истинности и проверить результат, построив таблицу истинности для упрощенного высказывания D.
3. Упростить множество $E=\left(A\cap\left(B\setminus\overline{A}\right)\right)\setminus\left(\overline{A}\cap\left(A\setminus B\right)\right)$, используя свойства (законы) операций над множествами ($A,B,C\subset\Omega$).
4. Какими свойствами (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, транзитивность, эквивалентность) обладает данное бинарное отношение ρ на множестве X: $X=\mathbf{N}$, $x\rho y\leftrightarrow\left(2x+y\right)$ - делится на 3.
5. Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность, эквивалентность) обладает данное бинарное отношение ρ на множестве X: $X=\left\{1,2,3,4\right\}$, отношение ρ задано на множестве пар: (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 1), (2; 3), (2; 4), (3; 1), (3; 2), (3; 4),(4; 1),(4; 2),(4; 3), (1; 1), (2; 2), (4; 4).
6. Биективные соответствия. Равномощные множества. Построив биективное соответствие между множествами X, Y, доказать равномощность этих множеств: $X_3=\left[-6,\ 0\right)$, $Y_3=\left[-1,\ +\infty\right)$.

Семестр 1. Теория делимости в кольце целых чисел.
Цепные дроби. Теория сравнений. Вариант 1

Задание 1. Линейные уравнения в целых числах с двумя неизвестными (диофантовы уравнения). Решить уравнение в целых числах.

$$\boxed{23x+50y=34}$$

Задание 2. НОД, НОК целых чисел. Найти НОД $d=(a,\ b)$ и НОК двух целых чисел $a,\ b$ и выразить НОД через числа $a,\ b$ в виде линейной комбинации $d=(a,\ b)=k_1a+k_2b$ (решить уравнение $d=k_1a+k_2b$ в целых числах).

1495, 1104

Задание 3. Конечные цепные дроби. Записать для рациональной дроби соответствующую ей конечную цепную дробь. Заменить рациональную дробь подходящей дробью с точность до 0,001.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{1211}{232}}$$

Задание 4. Конечные цепные дроби. Найти рациональное число, которое обращается в данную цепную дробь.

$$\boxed{\frac{a}{b}=[3;\ 1,2,4,5]}$$

Задание 5. Бесконечные цепные дроби. Представить число в виде периодической цепной дроби. Заменить соответствующей подходящей дробью с точностью до 0,001.

$$\boxed{\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

Задание 6. Периодические цепные дроби. Найти действительное число, которое имеет данное представление в виде периодической цепной дроби.

$$\boxed{\alpha=\left[2;1,(2,5)\right]}$$

Задание 7. Задано сравнение первой степени.

1) Используя основную теорему о разрешимости сравнения первой степени, выяснить, имеет ли сравнение решение. В случае совместности указать количество решений сравнения;

2) если сравнение имеет решение (решения), то найти решение сравнения путем сведения его к уравнению в целых числах.

$$\boxed{25x\equiv 120\ (\mathrm{mod}\ 15)}$$

Задание 8. Найти остаток от деления числа $\alpha=a^b$ на число m (случай взаимной простоты a,m, теорема Эйлера или Ферма $\boxed{a^{\varphi(m)}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\, m\right)}$).

$$\boxed{\alpha=31^{291},\ m=19}$$

Задание 9. Найти остаток от деления числа $\alpha=a^b$ на число m (случай невзаимной простоты a,m, сведение к теореме Эйлера или Ферма).

$$\boxed{\alpha = 22^{560},\ m = 220}$$

Задание 10. Найти остаток от деления числа на число m.

$$\boxed{\alpha = 12^{203} + 5^{111},\ m = 11}$$

Задание 11. Задано сравнение первой степени.

1) Используя основную теорему о разрешимости сравнения первой степени, доказать, что сравнение имеет решение. Указать количество решений сравнения;
2) найти решения сравнения способом Эйлера;
3) найти решения сравнения при помощи конечных цепных дробей.

$$\boxed{22x \equiv 7 \pmod{39}}$$

Задание 12. Задано сравнение первой степени.

1) Используя основную теорему о разрешимости сравнения первой степени, доказать, что сравнение имеет решение. Указать количество решений сравнения;
2) найти решения сравнения при помощи конечных цепных дробей.

$$\boxed{12x \equiv 54 \pmod{21}}$$

Задание 13. Решить систему сравнений:

1) при помощи китайской теоремы об остатках;
2) без использования китайской теоремы об остатках.

$$\boxed{\begin{cases} 7x \equiv 8 \pmod{5}, \\ 5x \equiv -7 \pmod{3}, \\ -3x \equiv 11 \pmod{4}. \end{cases}}$$

Семестр 2. Линейные пространства. Евклидовы пространства. Линейные операторы. Вариант 1

Задание 1 (линейная зависимость систем векторов). Исследовать на линейную зависимость систему векторов. В случае линейной зависимости выразить какой-нибудь вектор через остальные векторы системы:

$$\overline{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overline{a_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ \overline{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Задание 2 (формулы преобразования координат при переходе от базиса к базису). Написать матрицу перехода от базиса $\mathbf{B} = (e_1, e_2)$ к базису $\mathbf{B}' = (e_1', e_2')$, если связь между ними имеет вид $\begin{cases} e_1' = e_1 - 2e_2, \\ e_2' = -e_1 + e_2. \end{cases}$

Написать формулы преобразования координат при переходе от $\mathbf{B}$ к $\mathbf{B}'$. Пользуясь полученными формулами, найти координаты вектора $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ в $\mathbf{B}'$.

Задание 3 (процесс ортогонализации Грамма-Шмидта). Даны векторы в пространстве $\mathbf{R}^3$. Провести для этих векторов процесс ортогонализации Грамма-Шмидта (построить ортонормированный базис)

$$\overline{a_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overline{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 4 (собственные значения и собственные векторы линейного оператора). Найти все собственные значения и любой собственный вектор линейного оператора, заданного матрицей в некотором базисе. Выполнить проверку.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 5 (собственные значения и собственные векторы линейного оператора). Найти все собственные значения и любой собственный вектор линейного оператора, заданного матрицей в некотором базисе. Выполнить проверку.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Семестр 3. Основные алгебраические структуры. Вариант 1

Задание 1. Алгебры, бинарные операции. Выяснить, определены ли на множествах $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{2Z}, \mathbf{2Z+1}$, $\mathbf{R}^{+}$ бинарная операция $\bullet$, заданная правилом $a \bullet b = a + b + 1$. Проверить операцию на коммутативность, ассоциативность. Найти нейтральный, симметричный элементы.

Задание 2 (группы). Выяснить, является ли алгебра $\overset{\circ}{\mathbf{G}} = \langle G, \text{g}\ ' \rangle$ с введенными бинарной операцией умножения (g) и унарной операцией перехода к симметричному элементу на множестве G, группой.

$$G = \mathbf{R},\ a \bullet b = ab - a - b + 2$$

Задание 3 (поля). Рассмотрим алгебру $\overset{\circ}{P} = \langle \mathbf{R}, \oplus, -, \text{e}\ , 1_K \rangle$, где основным множеством является множество $\mathbf{R}$, бинарные операции $\oplus$, e определяются по правилам ($+, \cdot$ есть обычные арифметические операции сложения и умножения действительных чисел):

$$a \oplus b = a + b + 1,\ a \text{ e } b = a \cdot b + a + b.$$

Доказать, что алгебра $\overset{\circ}{P}$ является полем.

Задание 4 (метод математической индукции). Пользуясь методом математической индукции (ММИ), доказать равенство или утверждение.

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Варианты РГР (типовых расчётов, индивидуальных домашних заданий)

В процессе изучения каждой темы студенты обязаны самостоятельно выполнить типовые расчёты (или индивидуальные домашние задания) по отдельным темам.

Типовые расчёты реализуется в виде типовых вариантов расчётных заданий по отдельным темам, которые выполняются студентами самостоятельно во внеаудиторное время. Контрольные опросы при защите типового расчёта производятся на основании соответствующих типовых вопросов промежуточной аттестации.

1 семестр

ТР 1 «Элементы теории логики, множеств, отношений».

ТР 2 «Теория делимости во множестве целых чисел. Теория цепных дробей. Теория сравнений, ее арифметические приложения».

ТР 3 «Системы линейных алгебраических уравнений. Численные методы линейной алгебры».

2 семестр

ТР 1 «Линейные и евклидовые пространства».

ТР 2 «Линейные операторы в конечномерных пространствах. Квадратичные формы».

ТР 3 «Квадратичные формы, ее приложения».

3 семестр

ТР 1 «Основные алгебраические структуры: группы».

ТР 2 «Основные алгебраические структуры: кольца».

ТР 3 «Основные алгебраические структуры. поля».

4 семестр

ТР 1 «Элементы функционального анализа. Метрические пространства. Линейные нормированные пространства».

ТР 2 «Элементы функционального анализа. Пространства со скалярным произведением».

ТР 3 «Теория линейных операторов в бесконечномерных пространствах».

Все задания типовых расчетов представлены в электронном виде и доступны для скачивания с кафедры высшей математики по адресу:

URL: http://rsreu.ru/faculties/faitu/kafedri/vm/menu-1193

Оценочные средства промежуточной аттестации

Фонд оценочных средств промежуточной аттестации, проводимой в форме экзамена или теста, включает типовые теоретические вопросы; дополнительные вопросы; типовые практические задачи. Оценочные средства приведены ниже для каждого из семестров обучения. Разрешается и иная формулировка вопроса или примера, без изменения его смысла или содержания, например, дробление, изменение условий или иное.

Примеры типовых вопросов, соответствующих продвинутому и эталонному уровням сформированности компетенций (оценки отлично или хорошо)

Семестр 1

Модуль 1. Введение в дисциплину

1. Высказывания, операции над ними. Таблицы истинности.
2. Законы теории логики (тавтологии).
3. Понятие множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.
4. Свойства операций над множествами.
5. Законы де-Моргана для множеств.
6. Понятие бинарного отношения. Композиция двух отношений.
7. Понятие инверсии, ее свойства.
8. Понятие функции. Композиция функций.
9. Понятие инъективной функции. Основные теоремы.
10. Виды бинарных отношений (реф, антиреф, симм, транз).
11. Отношение эквивалентности. Примеры отношений эквивалентности.

Модуль 2. Теория делимости в кольце целых чисел. Теория цепных дробей

1. Разложение целых чисел на простые множители. Свойства делимости простых чисел.
2. Основные теоремы о разложении чисел на простые множители.
3. НОК и НОД целых чисел, их свойства. Свойства НОД и НОК.
4. Алгоритм Евклида нахождения НОД двух целых чисел. Обобщенный алгоритм Евклида.
5. Решение линейных уравнений в целых числах (диофантовы уравнения). Основная теорема о разрешимости диофантова уравнения (доказательство).
6. Матричный метод решения диофантова уравнения.
7. Теорема Дирихле о приближении действительного числа рациональными. Конечные цепные дроби.
8. Свойства конечных цепных дробей.
9. Цепная дробь действительного числа. Периодические цепные дроби.
9. Квадратичные иррациональности и цепные дроби. Периодические и чисто периодические цепные дроби. Теорема Эйлера-Лагранжа о квадратичной иррациональности.

Модуль 3. Теория сравнений и ее арифметические приложения

1. Сравнения и их основные свойства.
2. Классы вычетов. Основная лемма. Функция Эйлера. Кольцо классов вычетов по модулю.
3. Полная и приведенная системы вычетов по данному модулю. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма (теоремы с доказательством).
4. Сравнения первой степени, основные определения, основная теорема о разрешимости сравнения первой степени с одной неизвестной (с доказательством).
5. Китайская теорема об остатках, ее применение к решению систем сравнений.
6. Полиномиальные сравнения по простому модулю. Теорема 1 (Лагранжа, доказать). Теорема 2.
7. Полиномиальные сравнения по простому модулю. Теорема 3 (доказать).
8. Полиномиальные сравнения по составному модулю. Основная теорема (ее формулировка). Пример решения сравнения.

Модуль 4. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и численные методы линейной алгебры

1. Запись и решение СЛАУ в матричном виде.
2. Метод исключения переменных Гаусса для решения СЛАУ: теорема Кронекера-Капелли.
3. Метод Гаусса. Условия несовместности СЛАУ. Условие единственности решения СЛАУ.
4. Метод Гаусса для решения СЛАУ. Условие существования бесконечного множества решений СЛАУ (нахождение общего решения СЛАУ).
5. Однородные системы линейных алгебраических уравнений (ОСЛАУ), свойства решений. Понятие фундаментальной системы решений (ФСР) ОСЛАУ.
6. Частные методы решения СЛАУ. Метод квадратных корней (для СЛАУ симметричной основной матрицей),
7. Частные методы решения СЛАУ. Метод прогонки (для трехдиагональной СЛАУ).
8. Понятия вычислительной устойчивости и неустойчивости методов при решении СЛАУ на ЭВМ. Понятия хорошей и плохой обусловленности СЛАУ.
9. Методы и примеры оценивания вычислительной сложности алгоритмов. Проблемы, возникающие при решении переопределенных СЛАУ и способы их решения.
10. Метод LU-разложения для решения СЛАУ.

Семестр 2

Модули 5, 6. Линейные и евклидовые пространства

1. Понятие линейного пространства (аксиомы), его простейшие свойства.
2. Примеры линейных пространств.
3. Линейная зависимость и независимость системы векторов в линейном пространстве (основные теоремы).
4. Базис и размерность конечномерного линейного пространства. Примеры базисов в линейных пространствах.

5. Переход от базиса к базису, свойства матрицы перехода. Формулы преобразования координат при переходе от базиса к базису.
6. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка.
Два способа описания подпространства в пространстве $\mathbf{R}^n$.
7. Сумма и пересечение подпространств. Построение базисов в сумме и пересечении подпространств.
8. Понятие евклидового линейного пространства. Неравенство Коши-Буняковского.
9. Примеры евклидовых пространств.
10. Линейные нормированные пространства.
11. Ортогональные и ортонормированные базисы, их свойства.
12. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
13. Ортогональное дополнение к подпространству. Задача о перпендикуляре.

Модуль 7. Теория линейных операторов в конечномерных пространствах

1. Понятие линейного оператора, его простейшие свойства. Теорема об однозначном задании линейного оператора.
2. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о размерностях ядра и образа линейного оператора.
3. Матрица линейного оператора. Матрицы линейного оператора в разных базисах.
4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, основные понятия.
5. Свойства собственных векторов линейного оператора.
6. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
7. Сопряженный линейный оператор, его простейшие свойства.
8. Самосопряженный линейный оператор. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора.
9. Ортогональные матрицы, их свойства.
10. Ортогональные операторы, их свойства.
11. Методы нахождения собственных значений и собственных векторов оператора (матрицы). Сингулярное разложение матриц.

Модуль 8. Квадратичные формы

1. Квадратичные формы (КФ), основные понятия, виды записи.
2. Изменение КФ при линейных пребразованиях. Канонический вид КФ.
3. Приведение КФ к каноническому виду методом Лагранжа (выделением полных квадратов).
4. Ортогональные преобразования. Приведение КФ к каноническому виду методом ортогональных преобразований.
5. Нормальный вид КФ. Сигнатура КФ.
6. Закон инерции КФ.
7. Знакоопределенные и знакопеременные КФ. Основные теоремы.
8. Критерий Сильвестра, следствие из него. Критерии знакопостоянства КФ.

9. Применение КФ к исследованию функций многих переменных на экстремум.

Семестр 3

Модули 9, 10. Основные алгебраические структуры

1. Бинарные операции, их виды. Примеры бинарных операций.
2. Нейтральный, регулярный, симметричный элементы. Основные теоремы.
3. Понятие алгебры. Однотипные алгебры. Ранг алгебры. Определение гомоморфизма алгебр.
4. Понятие изоморфизма двух алгебр. Основные теоремы.
5. Понятие группы. Абелева группа. Примеры групп.
6. Свойства групп. Гомоморфизмы групп.
7. Пример гомоморфизма групп.
8. Понятие кольца (аксиомы кольца). Коммутативное кольцо. Привести пример кольца.
9. Свойства колец.
10. Гомоморфизм колец. Привести пример гомоморфизма колец.
11. Понятие поля (аксиомы поля). Примеры полей.
11. Кольцо многочленов. Основная теорема алгебры.
12. Неприводимые множители (многочлены) над полем. Теорема Безу. Разложение многочлена на неприводимые множители.
13. Поле рациональных дробей. Выделение целой части.
14. Простейшие дроби. Теорема о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.

Семестр 4

Модуль 11. Метрические пространства

1. Понятие метрического пространства (определение, аксиомы, примеры метрических пространств).
2. Основные понятия, связанные с метрикой.
3. Анализ сходимости в конкретных пространствах ($\left(\mathbf{R}_p^n,\ \rho_p\right), \left(C\left[a,b\right],\ \rho_{\max}\right)$, $\left(l_p,\ \rho_p\right)$, $\left(s,\ \rho_p\right)$, $\left(C\left[a,b\right],\ \rho_1\right)$).
4. Полные метрические пространства. Банаховы пространства. Фундаментальные последовательности элементов. Примеры банаховых пространств. Пример неполного пространства ($\mathring{L}_2\left[-1,\ 1\right]$).
5. Принцип сжимающих отображений (теорема Банаха, доказательство).
6. Обобщенный принцип сжимающих отображений, его применение к доказательству существования интегрального уравнения Вольтерра.
7. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом простых итераций.
8. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода, доказательство существования решения при помощи принципа сжимающих отображений.

Модуль 12. Линейные нормированные пространства

1. Определение линейного нормированного пространства, его свойства.
2. Банаховы пространства.
3. Примеры нормированных пространств (R^m, $l_p^{(m)}$, m, $C[a,b]$), понятие сходимости в среднем.
4. Линейные нормированные пространства $V[a,\ b]$, $C^n[a,\ b]$, нормы в них.
5. Подпространства линейного нормированного пространства, приближение элементами подпространства. Понятие расстояния от элемента до подпространства.

Модуль 13. Пространства со скалярным произведением

1. Понятие пространства со скалярным произведением. Свойства скалярного произведения.
2. Понятие пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского в пространстве со скалярным произведением.
3. Примеры пространств со скалярным произведением: $\mathbf{R}^n, l_2, L_2[a,b], \mathbf{W}_2^1[a,b]$.
4. Ортогональные и ортонормированные системы элементов. Основные свойства.
5. Процесс Грамма-Шмидта ортогонализации системы элементов в пространстве со скалярным произведением.
6. Гильбертовы пространства. Примеры гильбертовых пространств.
7 Расстояние от элемента до подпространства в гильбертовом пространстве. Ортогональное дополнение подпространства.
8. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя.
9. Полные ортогональные системы. Примеры.

Модуль 14. Общая теория линейных операторов (в бесконечномерных пространствах)

1. Общее определение оператора. Предел и непрерывность оператора в нормированном пространстве. Определение линейного оператора.
2. Определение линейного оператора. Теорема о линейном многообразии множества значений линейного оператора.
3. Непрерывные и ограниченные линейные операторы, эквивалентность этих понятий для линейного оператора (основная теорема).
4. Примеры линейных операторов в конечномерных пространствах.
5. Интегральный оператор в пространствах функций.
6. Пространство линейных операторов. Нормированное пространство $L(X,Y)$ линейных операторов. Норма линейного оператора.
7. Обратные линейные операторы. Множество $N(A)$ нулей оператора, его свойства. Теорема Банаха.
8. Примеры обратных операторов.
9. Классификация и свойства интегральных уравнений Вольтера и Фредгольма

Варианты тестовых заданий в дистанционных учебных курсах

Текущий контроль знаний студентов в может проводится в виде компьютерного тестирования по различным модулям (темам) программы.

Компьютерные тесты представлены в дистанционных учебных курсах на базе системы управления обучением Moodle: http://cdo.rsreu.ru/

Доступ к курсам предоставляется по паролю из внутренней информационной системы организации и из глобальной сети Интернет.

Внутри каждой учебной темы сформирован обширный банк разнообразных вопросов, которые разбиты на категории. Каждая категория содержит однотипные задачи, объединенные одним учебным вопросом. Тест формируется на основе выбора случайного вопроса из каждой указанной категории.

Тесты для проверки остаточных знаний

При проверке остаточных знаний студентам разрешается использовать конспекты лекций и справочную литературу.

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
ОПК-1: способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	**ОПК-1.1:** применяет фундаментальные знания в области математических наук в профессиональной деятельности

а) типовые тестовые вопросы закрытого типа:

1. Дано высказывание $D = x_1 \vee x_2 \to \overline{x_2}$. Чему равно логическое значение этого высказывания при значениях $x_1 = 1,\ x_2 = 0$?

а) 1, б) 0.

2. Заданы множества $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, $A = \{1; 3; 5\}$, $B = \{2;\ 5\}$, $C = \{1;\ 3\}$. Найти множество $D = (A \cap B) \cup C$.

а) $D = \varnothing$, б) $D = \{1;\ 3;\ 5\}$, в) $D = \{1;\ 2;\ 3;\ 5\}$.

3. Найти НОД $d = (a,\ b)$ двух целых чисел $a = 420,\ b = 270$.

а) 60; б) 10; в) 30.

4. Дано линейное диофантово уравнение (уравнение в целых числах) $4x + 8y = 11$. Найти его решение.

а) $x = 2 + t,\ y = -t\ (t \in \mathbf{Z})$

б) уравнение не имеет решений во множестве целых чисел, в) $x=2-t,\ \ y=-t\ \ (t\in\mathbf{Z})$.

5. Решить сравнение $7x\equiv 8(\mathrm{mod}\,9)$.

а) $x\equiv 5(\mathrm{mod}\,9)$; б) $x\equiv 4(\mathrm{mod}\,9)$; в) $x\equiv 6(\mathrm{mod}\,9)$; г) $x\equiv -1(\mathrm{mod}\,9)$.

6. Какое из утверждений **не выполняется** для элементов x, y, z линейного пространства V:

а) $x+y=y+x$;

б) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

в) для любого вектора $x\in V$ существует единственный противоположный вектор $-x\in V$ такой, что $x+(-x)=\theta$;

г) существует вектор $\theta\in V$ такой, что для любого вектора $x\in V$: $x+\theta=\theta$.

7. Матрица T перехода от базиса $\mathbf{B}=(e_1,e_2)$ к базису $\mathbf{B}'=(e_1',e_2')$ имеет вид $T=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Связь между этими базисами описывается системой:

а) $\begin{cases} e_1=e_1'+2e_2', \\ e_2=-e_1'+e_2'. \end{cases}$ б) $\begin{cases} e_1'=e_1-e_2, \\ e_2'=2e_1+e_2. \end{cases}$ в) $\begin{cases} e_1'=e_1+2e_2, \\ e_2'=-e_1+e_2. \end{cases}$ г) $\begin{cases} e_1=e_1'-e_2', \\ e_2=2e_1'+e_2'. \end{cases}$

8. В линейном пространстве $\mathbf{R}^3$ вектор-столбцов заданы два вектора $\overline{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$, $\overline{a_2}=\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$. Тогда евклидовы нормы $\|\overline{a_1}\|$, $\|\overline{a_2}\|$ этих векторов равны соответственно

а) $\|\overline{a_1}\|=3,\ \|\overline{a_2}\|=5$, б) $\|\overline{a_1}\|=2,\ \|\overline{a_2}\|=4$,

в) $\|\overline{a_1}\|=1,\ \|\overline{a_2}\|=3$, г) $\|\overline{a_1}\|=9,\ \|\overline{a_2}\|=25$.

9. Собственные значения матрицы $A=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ линейного оператора:

а) $\lambda_1=6, \lambda_2=-1$; б) $\lambda_1=-6, \lambda_2=-1$;

в) $\lambda_1=6, \lambda_2=1$; г) $\lambda_1=-6, \lambda_2=1$.

10. Матрица квадратичной формы $F(x_1,x_2)=2x_1^2-6x_1x_2+9x_2^2$ имеет вид

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -6 & 9\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$.

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ответ	**а**	**б**	**в**	**б**	**а**	**г**	**в**	**а**	**г**	**б**

б) типовые тестовые вопросы открытого типа:

1. Дано высказывание $D = \overline{x_1 \vee x_2} \to x_2$. Чему равно логическое значение этого высказывания при значениях $x_1 = 0,\ x_2 = 1$?

2. Заданы множества $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, $A = \{1; 3; 5\}$, $B = \{2;\ 4\}$, $C = \{1;\ 5\}$. Найти множество $E = A \setminus (B \cap C)$.

3. Найти НОД $d = (a,\ b)$ двух чисел $a = 540,\ b = 280$.

4. Дано линейное диофантово уравнение (уравнение в целых числах) $2x + 3y = 8$. Найти его общее решение.

5. Решить сравнение $3x \equiv 7(\mathrm{mod}\,5)$.

6. Исследовать на линейную зависимость систему векторов. В случае линейной зависимости выразить какой-нибудь вектор через остальные векторы системы:

$$\overline{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overline{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{a_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Даны векторы $\overline{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ \overline{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathbf{R}^2$. Записать соответствующие им нормированные вектора $\overline{e_1},\ \overline{e_2}$ (норма - евклидова).

8. Найти сумму собственных значений матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ некоторого линейного оператора.

9. Вычислить определитель матрицы квадратичной формы $F(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

10. Исследовать квадратичную форму $L(x_1,\ x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2$ на знакоопределенность, пользуясь критерием Сильвестра.

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
ответ	**1**	$\{1;\ 3;\ 5\}$	**20**	$x = 1 - 3t$, $y = 2 + 2t\ (t \in \mathbf{Z})$	$x \equiv 4(\mathrm{mod}\,5)$, $\overline{4}$, $x = 4 + 5t$
№	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ответ	Система линейно зависима, $\overline{a_3} = 2\overline{a_1} + \overline{a_2}$	$\overline{e_1} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$, $\overline{e_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$	-1	1	Форма положительно-определена

Составил
профессор кафедры ВМ
д.т.н. А.И. Новиков

Заведующий кафедрой ВМ
к.ф.-м.н., доцент К.В.Бухенский