5141

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Сборник задач

Рязань 2017

УДК 621.396

Электродинамика и распространение радиоволн: сборник задач/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: А.И. Бакулин, Б.В. Кагаленко, Г.Г. Юмашева. Рязань, 2017. 68 с.

Приведены теоретические сведения и набор задач по основным разделам соответствующей программы.

Предназначен для студентов второго курса и бакалавров направлений «Радиотехника» и «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» факультета радиотехники и телекоммуникаций.

Ил. 88. Библиогр.: 3 назв.

Электромагнитное поле, вектор Пойнтинга, плоская волна

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра радиоуправления и связи Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой С.Н.Кириллов)

Электродинамика и распространение радиоволн

Составители: Бакулин Анатолий Иванович

Кагаленко Борис Васильевич

Юмашева Галина Гавриловна

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор Н.А. Орлова

Подписано в печать 28.09.17. Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,25.

Тираж 150 экз. Заказ 3578.

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначение координат и единичных векторов

x, y, z – прямоугольные (декартовы) координаты;

$\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – единичные векторы в декартовых координатах;

r, φ, z – цилиндрические координаты;

$\vec{r}_0, \vec{\varphi}_0, \vec{z}_0$ – единичные векторы в цилиндрических координатах;

r, θ, φ – сферические координаты;

$\vec{r}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\varphi}_0$ – единичные векторы в сферических координатах.

Системы координат (рис. 1)

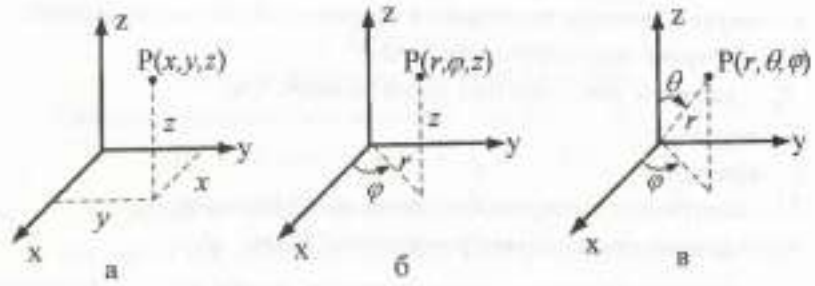


Рис. 1. Системы координат: а – декартова, б – цилиндрическая, в - сферическая

Обозначения величин

$\vec{A}$ – векторный потенциал поля;

$\vec{B}$ – магнитная индукция, Тл;

C – электрическая емкость, Ф;

c – скорость света ($3 \cdot 10^8$ м/с);

$\vec{D}$ – электрическое смещение, Кл/м^2;

$\vec{E}$ – напряженность электрического поля, В/м;

$э$ – электродвижущая сила, В;

f – частота, Гц;

$\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, А/м;

I – сила тока, А;

$\vec{\delta}$ – объемная плотность тока, А/м^2;

$\vec{\delta}_s$ – поверхностная плотность тока, А/м;

$\vec{i}$ – линейный ток, А;

L – индуктивность, Гн;

M – взаимная индуктивность, Гн;

P – мощность, Вт;

Q – добротность;

ρ – объемная плотность заряда, Кл/м^3;

ρ_s – поверхностная плотность заряда, Кл/м^2;

τ – линейная плотность заряда, Кл/м;

$\vec{r}$ – радиус–вектор;

r – текущее значение расстояния в сферической системе координат;

R – электрическое сопротивление, Ом;

R_s – удельное поверхностное сопротивление, Ом;

T – период, с;

t – время, с;

U – электрическое напряжение, разность потенциалов, В;

v_ϕ – фазовая скорость электромагнитной волны, м/с;

$v_{гр}$ – групповая скорость электромагнитной волны, м/с;

W – энергия, Дж;

$Z_в$ – волновое сопротивление, Ом;

Z_c – характеристическое сопротивление, Ом;

α – коэффициент затухания, 1/м;

β – коэффициент фазы, 1/м;

σ – удельная проводимость, См/м;

ε – диэлектрическая проницаемость (относительная);

ε_0 – диэлектрическая постоянная $(1/120\ \pi c) \approx$

$\approx 8{,}854 \cdot 10^{-12} \approx \dfrac{10^{-9}}{36\pi}$ Ф/м;

ε_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м;

λ – длина волны, м;

$\lambda_в$ – длина волны в волноводе, м;

μ – магнитная проницаемость (относительная);

μ_0 – магнитная постоянная $(120\ \pi/c)$, Гн/м = 1,2566·10^{-6} Гн/м;

μ_a – абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м;

k – коэффициент распространения волны, 1/м;

$\vec{\Pi}$ – вектор Пойнтинга, Вт/м^2;

Φ – магнитный поток, Вб;

φ – потенциал (скалярный), В;

Ψ – магнитное потокосцепление, Вб;

ω – круговая частота, рад/с;

R – коэффициент отражения;

T – коэффициент прохождения (преломления).

1. ВЕКТОРЫ

Некоторые формулы векторной алгебры

Скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\vec{A}\vec{B} = AB\cos\alpha = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z,$$

где α – угол между направлениями $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

Векторное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в декартовой системе координат:

$$\left[\vec{A}\vec{B}\right] = \vec{A}\times\vec{B} = \vec{n}_0 AB\sin\alpha =$$
$$= \vec{x}_0(A_yB_z - A_zB_y) + \vec{y}_0(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{z}_0(A_xB_y - A_yB_x),$$

где $\vec{n}_0$ – единичный вектор нормали к плоскости векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$, причем $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{n}_0$ образуют «правую тройку» векторов.

В краткой записи

$$\left[\vec{A}\vec{B}\right] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение некоммутативно $\left[\vec{B}\vec{A}\right] = -\left[\vec{A}\vec{B}\right]$.

Векторно-скалярное (смешанное) произведение $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$:

$$\vec{A}\left[\vec{B}\vec{C}\right]=\left[\vec{A}\vec{B}\right]\vec{C}=\left[\vec{C}\vec{A}\right]\vec{B}=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}.$$

Двойное векторное произведение векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$:

$$\left[\vec{A}\left[\vec{B}\vec{C}\right]\right]=\vec{B}\left(\vec{A}\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\vec{B}\right)$$

Операции векторного анализа

Для математического описания физического состояния точек пространства вводят понятия скалярных и векторных полей.

Одной из характеристик скалярного поля φ является градиент ($grad\ \varphi$) – вектор, показывающий величину и направление наибыстрейшего возрастания скалярного поля.

Направление градиента всегда перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности (поверхности равного уровня) и параллельно касательной к силовой линии поля в данной точке.

В декартовой системе координат (д.с.к.) (рис. 1, а)

$$grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_0+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0.$$

В цилиндрической системе координат (ц.с.к.) (рис. 1, б)

$$grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\vec{\varphi}_0+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0.$$

В сферической системе координат (с.с.к.) (рис. 1, в)

$$grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{\theta}_0+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\vec{\varphi}_0.$$

(Здесь «φ» в числителе обозначает потенциал, а «φ» в знаменателе – угловую координату в ц.с.к. и с.с.к.)

Дифференциальными характеристиками векторного поля $\vec{A}$ являются скалярная величина – дивергенция ($div\ \vec{A}$) и векторная величина – ротор ($rot\ \vec{A}$).

Значение дивергенции равно плотности источников рассматриваемого поля в заданной точке пространства.

Дивергенцию векторного поля $\vec{A}$ вычисляют путем дифференцирования его проекций по соответствующим координатам.

В декартовой системе координат

$$div\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z};$$

в цилиндрической системе координат

$$div\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z};$$

в сферической системе координат

$$div\vec{A}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)\right]+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right)\right].$$

Еще одной характеристикой векторного поля является ротор. В декартовой системе координат

$$rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{x}_0\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{y}_0\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{z}_0\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

В цилиндрической системе координат

$$rot\vec{A}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{r}_0+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{\varphi}_0+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\vec{z}_0.$$

В сферической системе координат

$$rot\vec{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\varphi\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{r}_0+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}\right]\vec{\theta}_0+$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{\varphi}_0.$$

Дивергенция произведения скаляра и вектора

$$div\left(\varphi\vec{A}\right)=\varphi\,div\vec{A}-\vec{A}\,grad\varphi.$$

Дивергенция векторного произведения

$$div\left[\vec{A}\vec{B}\right]=\vec{B}\,rot\vec{A}-\vec{A}\,rot\vec{B}.$$

Если $rot\vec{A}=0$, то поле является потенциальным. Векторное поле $\vec{A}$, удовлетворяющее во всех точках рассматриваемой области условию $div\vec{A}=0$, называется соленоидальным.

Соответствующими интегральными характеристиками векторного поля являются поток вектора через замкнутую поверхность и циркуляция вектора по контуру.

Потоком вектора $\vec{A}$ сквозь замкнутую поверхность S называется интеграл вида $\Pi=\oint\limits_S \vec{A}\,d\vec{s}$.

Циркуляцией вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру L независимо от физического смысла вектора $\vec{A}$ называется интеграл вида $Ц=\oint\limits_L \vec{A}\,d\vec{l}$.

Поток и циркуляция – величины скалярные. В частном случае, когда вектор $\vec{A}$ имеет смысл вектора силы, указанный интеграл выражает работу силы по контуру L.

Дифференциальные операции со скалярными и векторными полями удобно записывать с помощью оператора Гамильтона ∇. Применительно к скалярному полю $\nabla\varphi=grad\varphi$, относительно векторного поля $\nabla\vec{A}=div\vec{A}$, $\left[\nabla\vec{A}\right]=rot\vec{A}$. Ротор градиента $\left[\nabla(\nabla\varphi)\right]=0$. Дивергенция ротора $\nabla\left[\nabla\vec{A}\right]=0$.

Из дифференциальных операций второго порядка в электродинамике часто используется оператор Лапласа Δ. Для скалярного поля $\Delta\varphi=\nabla^2\varphi=div\ grad\varphi$, для векторного поля $\nabla^2\vec{A}=grad\ div\vec{A}-rot\ rot\vec{A}$.

Оператор Лапласа в различных координатных системах записывается следующим образом.

В декартовой системе:

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$

в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$

в сферической системе координат:

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}.$$

Графически векторные поля изображают с помощью силовых линий. В каждой точке силовой линии вектор поля касателен к ней. Густота силовых линий соответствует интенсивности поля. Дифференциальное уравнение силовых линий в декартовой системе координат имеет вид:

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}.$$

Для решения задач векторного анализа часто бывает удобно пользоваться формулой Грина $\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l}=\iint\limits_S\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dxdy$,

теоремой Стокса $\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l}=\int\limits_S rot\vec{A}d\vec{s}$,

теоремой Остроградского – Гаусса $\oint\limits_S \vec{A}d\vec{s}=\int\limits_V div\vec{A}dv$.

Задачи

1.1. Изобразить на координатной плоскости XOY вектор $\vec{A}=2\vec{x}_0-6\vec{y}_0$.

1.2. Показать, что векторы $\vec{A}=4\vec{x}_0-2\vec{y}_0-\vec{z}_0$ и $\vec{B}=\vec{x}_0+4\vec{y}_0-4\vec{z}_0$ ортогональны. Найти их сумму и разность.

1.3. Найти сумму и разность двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Показать, что эти векторы ортогональны. $\vec{A}=4\vec{x}_0+2\vec{y}_0-2\vec{z}_0$; $\vec{B}=2\vec{x}_0-5\vec{y}_0-\vec{z}_0$.

1.4. Заданы векторы $\vec{A}=2\vec{x}_0+4\vec{y}_0$; $\vec{B}=6\vec{y}_0-4\vec{z}_0$. Найти наименьший угол между ними.

Указание: 1) через векторное произведение;

2) через скалярное произведение.

1.5. Найти скалярное, векторное произведения и угол между

векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$: $\vec{A} = 2\vec{x}_0 - 3\vec{y}_0$; $\vec{B} = -2\vec{x}_0 - 3\vec{y}_0$.

1.6. Найти уравнение линии уровня, проходящей через точку M(2; -1) для скалярного поля $f(x, y) = 4x^2 - y^2$.

1.7. Найти уравнение силовой линии вектора $\vec{A} = \frac{y}{a}\vec{x}_0 + \frac{x}{a}\vec{y}_0$.

1.8. Найти уравнение силовой линии вектора $\vec{A} = -\frac{y}{a}\vec{x}_0 + \frac{x}{a}\vec{y}_0$.

Градиент функции

1.9. Найти градиент потенциала $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.10. Задан потенциал $\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Найти градиент этого потенциала. Определить форму эквипотенциальных поверхностей.

1.11. Задано скалярное поле $\varphi = 3x^2 y \cos z - 2z^2$. Найти *grad* φ.

1.12. Задано скалярное поле $\varphi = 7x^3 y^2 \sin z - 3z^2$. Найти *grad* φ.

1.13. Задан потенциал $\varphi = x^y - z^2$. Найти *grad* φ в точке M(2,7; 2; 2).

1.14. Найти градиент скалярного произведения векторов $\vec{A} = 3\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 - 5\vec{z}_0$ и $\vec{r} = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$.

1.15. Найти наибольшую скорость изменения поля, заданного функцией $\varphi = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1$, в точке M(1; -1; 0,5).

1.16. Найти наибольшую скорость изменения поля, заданного функцией $\varphi = x^3 - 4x^2 y + 5z^2 + 3$, в точке M(-1; 0,5; -1).

1.17. Найти наибольшую скорость изменения поля, заданного функцией $\varphi = x \cdot y^3 \cdot z^4$, в точке M(1; 1; 1).

Дивергенция вектора

1.18. Задано поле вектора $\vec{A} = x^2\vec{x}_0 + y \cdot z \cdot \vec{y}_0 + x \cdot y \cdot \vec{z}_0$. Найти $div\vec{A}$.

1.19. Задано поле вектора $\vec{A} = x^2\vec{x}_0 + (x \cdot y)^2\vec{y}_0 + 24x^2y^2z^3\vec{z}_0$. Найти $div\vec{A}$ в точке (2; 1; 1).

1.20. В области значений $0 \le r \le 2$ цилиндрической системы координат вектор $\vec{A} = \left(4r^{-1} + 2e^{-0,5r} + 4r^{-1}e^{-0,5r}\right)\vec{r}_0$, а при $r > 2$ $\vec{A} = \left(\frac{2,057}{r}\right)\vec{r}_0$. Найти $div\vec{A}$ в этих областях.

1.21. Задано поле вектора $\vec{A} = 5x^2\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\vec{x}_0$. Найти $div\vec{A}$ в точке $x = 1$.

1.22. В цилиндрической системе координат задано поле вектора $\vec{A} = r\sin\varphi \cdot \vec{r}_0 + r^2\cos\varphi \cdot \vec{\varphi}_0 + 2r \cdot e^{-5z}\vec{z}_0$. Найти дивергенцию вектора $\vec{A}$ в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}; 0\right)$.

1.23. В сферической системе координат задано поле вектора $\vec{A} = \frac{5}{r^2}\sin\theta \cdot \vec{r}_0 + r \cdot \mathrm{ctg}\theta \cdot \vec{\theta}_0 + r\sin\theta\cos\varphi \cdot \vec{\varphi}_0$. Найти $div\vec{A}$.

1.24. Задано поле вектора $\vec{A} = e^{-y}\left(\cos x \cdot \vec{x}_0 - \sin x \cdot \vec{y}_0\right)$. Найти $div\vec{A}$.

1.25. Задано поле вектора $\vec{A} = \left(x^2 + y^2\right)^{-1/2}\vec{x}_0$. Найти $div\vec{A}$ в точке (2; 2; 0).

1.26. В цилиндрической системе координат задано векторное поле $\vec{A} = r\sin\varphi \cdot \vec{r}_0 + 2r\cos\varphi \cdot \vec{\varphi}_0 + 2z^2\vec{z}_0$. Найти $div\vec{A}$.

1.27. В цилиндрической системе координат задано поле вектора $\vec{A} = 10\sin^2\varphi \cdot \vec{r}_0 + r \cdot \vec{\varphi}_0 + \frac{z^2\cos^2\varphi}{r}\vec{z}_0$. Найти $div\vec{A}$ $\vec{A}$ в точке $(2; \varphi; 5)$.

1.28. Задано векторное поле

$\vec{A} = \frac{5}{r^2}\vec{r}_0 + \frac{10}{\sin\theta}\vec{\theta}_0 - r^3\varphi \cdot \sin\theta \cdot \vec{\varphi}_0$. Найти $div\vec{A}$.

1.29. Задано векторное поле $\vec{A} = 5\sin\theta \cdot \vec{\theta}_0 + 5\sin\varphi \cdot \vec{\varphi}_0$. Найти

$div\vec{A}$ в точке $\left(0{,}5;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$.

1.30. Задано поле вектора $\vec{A}=e^{5x}\vec{x}_0+2\cos y\cdot\vec{y}_0+2\sin z\cdot\vec{z}_0$. Найти $div\vec{A}$ в точке (0; 0; 0).

1.31. Задано поле вектора $\vec{A}=\left(3x+y^2\right)\vec{x}_0+\left(x-y^2\right)\vec{y}_0$. Найти $div\vec{A}$.

1.32. Задано поле вектора $\vec{A}=2x\cdot y\cdot\vec{x}_0+z\cdot\vec{y}_0+y\cdot z^2\vec{z}_0$. Найти $div\vec{A}$ в точке (2; -1; 3).

1.33. Задано поле вектора $\vec{A}=4x\cdot y\cdot\vec{x}_0-x\cdot y^2\vec{y}_0+5\sin z\cdot\vec{z}_0$. Найти $div\vec{A}$ в точке (2; 2; 0).

1.34. В цилиндрической системе координат задано поле вектора $\vec{A}=2r\cos^2\varphi\cdot\vec{r}_0+3r^2\sin z\cdot\vec{\varphi}_0+4z\sin^2\varphi\cdot\vec{z}_0$. Найти $div\vec{A}$.

1.35. В цилиндрической системе координат задано поле вектора $\vec{A}=\left(10/r^2\right)\vec{r}_0+5e^{-2z}\vec{z}_0$. Найти $div\vec{A}$ в точке (2; φ; 1).

1.36. Задано поле вектора $\vec{A}=10\vec{r}_0+5\sin\theta\cdot\vec{\theta}_0$. Найти $div\vec{A}$.

1.37. Задано поле вектора $\vec{A}=r\cdot\vec{r}_0-r^2\mathrm{ctg}\theta\cdot\vec{\theta}_0$. Найти $div\vec{A}$.

1.38. Задано поле вектора $\vec{A}=\left(\frac{10\sin^2\theta}{r}\right)\vec{r}_0$. Найти $div\vec{A}$ в точке $\left(2;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

1.39. Задано поле вектора $\vec{A}=r^2\sin\theta\cdot\vec{r}_0+13\varphi\cdot\vec{\theta}_0+2r\cdot\vec{\varphi}_0$. Найти $div\vec{A}$.

1.40. В области $r\le 2$ цилиндрической системы координат вектор $\vec{A}=\left(10r+\frac{r^2}{3}\right)\vec{r}_0$, а при $r>2$ $\vec{A}=\left(\frac{3}{128r}\right)\vec{r}_0$. Найти $div\vec{A}$ в обеих областях r.

1.41. Определить дивергенцию векторного поля $\vec{A}$, имеющего в сферической системе координат единственную составляющую

$A_\theta=8re^{-10r};\quad A_r=0;\quad A_\varphi=0$.

1.42. Найти дивергенцию вектора $\vec{B}=\vec{A}\cdot r$, где $\vec{A}=A_x\vec{x}_0+A_y\vec{y}_0+A_z\vec{z}_0$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1.43. В цилиндрической системе координат вектор $\vec{A}=\left(\frac{10r^3}{4}\right)\vec{r}_0$. Найти $div\vec{A}$.

Поток вектора

1.44. Подсчитать поток вектора $\vec{A}=x\cdot y\cdot\vec{x}_0+2y\cdot\vec{y}_0-z\cdot\vec{z}_0$ сквозь поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=9$.

Указание: использовать сферическую систему координат.

1.45. Подсчитать поток вектора $\vec{A}=\frac{5}{r^2}\vec{r}_0$ сквозь сферическую поверхность радиусом $r=a$ с центром в начале координат.

1.46. Подсчитать поток радиуса-вектора $\vec{r}=x\cdot\vec{x}_0+y\cdot\vec{y}_0+z\cdot\vec{z}_0$ сквозь полную поверхность прямого круглого цилиндра радиусом a, высотой h. Убедиться в справедливости теоремы Остроградского – Гаусса.

1.47. Задан вектор $\vec{A}=\left(\frac{10x^3}{3}\right)\vec{x}_0$. Найти поток этого вектора через поверхность куба с ребром 2 м ($-1\le x\le 1$); ($-1\le y\le 1$); ($-1\le z\le 1$). Убедиться в справедливости теоремы Остроградского – Гаусса.

1.48. Найти поток вектора $\vec{A}=30e^{-r}\vec{r}_0-2z\cdot\vec{z}_0$ сквозь поверхность прямого круглого цилиндра радиусом r = 2м, высотой h = 5 м. Убедиться в справедливости теоремы Остроградского – Гаусса.

1.49. Для поля $\vec{D}=\frac{5r^2}{4}\vec{r}_0$ оценить результаты вычислений при использовании левой и правой частей теоремы Остроградского для объема, заключенного между двумя сферическими поверхностями радиусами: $r_1=1$; $r_2=2$.

1.50. Найти поток вектора $\vec{A}=\frac{5r^2}{4}\vec{r}_0$ сквозь поверхность кону-

са, размеры которого указаны на рис. 1.1.

1.51. Используя теорему Остроградского – Гаусса, найти поток вектора $\vec{A}=\frac{10r^3}{4}\vec{r}_0$ сквозь поверхность, ограниченную координатами $r=2; z_1=0;\ z_2=10$ цилиндрической системы координат (рис. 1.2).

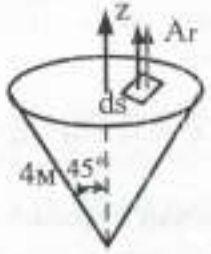


Рис. 1.1

Рис.1.2

1.52. Задан вектор $\vec{A}=x^2\vec{x}_0+(x\cdot y)^2\vec{y}_0+24x^2y^2z^3\vec{z}_0$. Вычислить поток этого вектора через поверхность куба с ребром, равным единице длины, и вершиной в начале координат. Вычислив интеграл $\int_V div\vec{A}dv$, где V – объем куба, убедиться в справедливости теоремы Остроградского – Гаусса.

1.53. Задан вектор $\vec{B}=rot\,\vec{A}$. Найти поток этого вектора через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1.54. Подсчитать поток радиуса вектора сквозь сферическую поверхность радиусом a с центром в начале координат.

Циркуляция вектора

1.55. Найти циркуляцию вектора $\vec{A}=-\frac{y}{a}\vec{x}_0+\frac{x}{a}\vec{y}_0$ по окружности $x^2+y^2=a^2$.

1.56. Вычислить циркуляцию радиуса-вектора по окружности $x^2+y^2=a^2$.

1.57. Найти циркуляцию вектора $\vec{A}=x\cdot\vec{x}_0+x^2z\cdot\vec{y}_0+y^2z\cdot\vec{z}_0$ по контуру L (рис. 1.3).

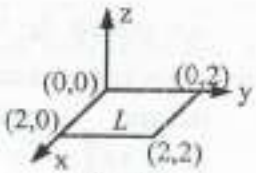


Рис. 1.3

1.58. Задан вектор $\vec{A}=grad\,\varphi$. Вычислить циркуляцию этого вектора по окружности $x^2+y^2=a^2$.

1.59. Подсчитать циркуляцию вектора $\vec{A}=(x-2z)\vec{x}_0+(x+3y+z)\vec{y}_0+(5x+y)\vec{z}_0$ по периметру треугольника abc с координатами вершин $a(1,0,0)$, $b(0,0,1)$, $c(0,1,0)$.

Ротор вектора

1.60. Найти ротор вектора $\vec{A}=x\cdot\vec{x}_0+x^2z\cdot\vec{y}_0+y^2z\cdot\vec{z}_0$.

1.61. Задано векторное поле $\vec{A}=(y\cdot\cos ax)\vec{x}_0+(y+e^x)\vec{z}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$ в начале координат.

1.62. Задано векторное поле $\vec{A}=(\cos x\cdot\sin y)\vec{x}_0+(\sin x\cdot\cos y)\vec{y}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$.

1.63. В цилиндрической системе координат задан вектор $\vec{A}=\sin 2\varphi\cdot\vec{\varphi}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$ в точке $\left(2;\frac{\pi}{4};0\right)$.

1.64. Задано векторное поле $\vec{A}=5e^{-r}\cos\varphi\cdot\vec{r}_0-5\cos\varphi\cdot\vec{z}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$ в точке $\left(2;\frac{3\pi}{2};0\right)$.

1.65. В сферической системе координат задан вектор $\vec{A}=8re^{-10r}\cdot\vec{\theta}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$.

1.66. В сферической системе координат задан вектор $\vec{A}=10\sin\theta\cdot\vec{\theta}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$ в точке $\left(2;\frac{\pi}{2};0\right)$.

1.67. В сферической системе координат задан вектор $\vec{A}=2{,}5\cdot\vec{\theta}_0+5\vec{\varphi}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$ в точке $\left(2;\frac{\pi}{6};0\right)$.

1.68. В цилиндрической системе координат задан вектор

$\vec{A} = 5r\sin\varphi \cdot \vec{z}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$ в точке $(2;\pi;0)$.

1.69. Доказать, что $rot\,rot\vec{\Delta} = grad\,div\,\vec{A} - \nabla^2 A$. Для доказательства использовать формулу векторной алгебры $\left[\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = b(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$.

1.70. Задан вектор $\vec{B} = rot\,\vec{A}$. Найти поток этого вектора через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

1.71. Определив ротор вектора $\vec{A} = (x-2z)\vec{x}_0 + (x+3y+z)\vec{y}_0 + (5x+y)\vec{z}_0$, найти его поток $\left(\int_S rot\vec{A}\,ds\right)$ через поверхность, опирающуюся на треугольник abc с координатами вершин $a(1, 0, 0)$, $b(0, 0, 1)$, $c(0, 1, 0)$.

1.72. В сферической системе координат задано векторное поле $\vec{A} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{r}_0 + \frac{\sin\theta}{r^3}\vec{\theta}_0$. Доказать, что $rot\,\vec{A} = 0$.

1.73. В цилиндрической системе координат задан вектор $\vec{A} = e^{-2z}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\vec{\varphi}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$ в точке $\left(0{,}8;\frac{\pi}{3};0{,}5\right)$.

1.74. В сферической системе координат вектор $\vec{A} = \sin\varphi\cdot\vec{r}_0 + \sin\theta\cdot\vec{\varphi}_0$. Найти $rot\,\vec{A}$ в точке $\left(2;\frac{\pi}{2};0\right)$.

2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ: ЗАРЯДЫ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ, ВЕКТОРЫ

Электромагнитное поле – это особый вид материи, способный распространяться в вакууме со скоростью света и оказывающий силовое воздействие на заряженные частицы. Оно представляет собой единство двух составляющих – электрического и магнитного полей. Основными характеристиками электромагнитного поля являются заряды, электрические токи, векторы поля.

Заряды

Заряды могут быть распределены по объему, по поверхности и по нити. Объемное распределение зарядов характеризуется объемной плотностью $\rho = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$. Размерность $[\rho]$ = Кл/м^3.

Полный заряд, сосредоточенный в объеме V, $Q = \int\limits_V \rho dV$.

Поверхностное распределение зарядов характеризуется поверхностной плотностью заряда $\rho_s = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds}$. Размерность $[\rho]$ = Кл/м^2.

Полный заряд поверхности $Q = \int\limits_S \rho_s ds$.

Связь между поверхностной и объемной плотностями зарядов

$$\rho_s = \rho dh,$$

где dh – толщина слоя заряженной поверхности.

Линейное распределение зарядов характеризуется линейной плотностью зарядов $\tau = \lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$. Размерность $[\tau]$ = Кл/м.

Полный заряд нити $Q = \int\limits_L \tau dl$.

Полный заряд системы точечных зарядов равен их сумме

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Электрические токи

Движущиеся заряды образуют электрический ток. Сила тока $I = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{dQ}{dt}$. Размерность $[I] = A$.

Элемент тока $d\vec{j} = dQ\vec{v}$, где $\vec{v}$ – вектор скорости движения заряда.

Различают несколько видов распределения токов. Объемное

распределение тока характеризуется вектором объемной плотности тока $\vec{\delta} = \frac{d\vec{j}}{dV} = \frac{dQ}{dV}\vec{v} = \frac{\rho dV}{dV}\vec{v} = \rho\vec{v}$. Размерность $[\vec{\delta}] = \text{А/м}^2$.

Сила тока, протекающего через некоторую поверхность S, $I = \int_S \vec{\delta}\, d\vec{s}$.

Направление вектора $\vec{\delta}$ совпадает с направлением движения положительных зарядов.

Поверхностное распределение тока характеризуется вектором поверхностной плотности тока $\vec{\delta}_s = \frac{d\vec{j}}{ds} = \frac{dQ}{ds}\vec{v} = \frac{\rho_s ds}{ds}\vec{v} = \rho_s\vec{v}$. Размерность $[\vec{\delta}_s] = \text{А/м}$.

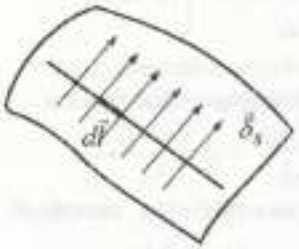


Рис. 2.1

Сила тока, текущего по поверхности (рис. 2.1), $I = \int_L \vec{\delta}_s d\vec{l}$, где l – линия, перпендикулярная к линиям тока, текущего по поверхности.

Линейный ток $\vec{i} = \frac{d\vec{j}}{dl} = \frac{dQ}{dl}\vec{v} = \tau\vec{v}$.

Размерность $[i] = \text{А}$.

Сила тока, текущего по нити, равна по величине линейной плотности тока: $I = \tau v$.

Векторы поля

Электромагнитное поле определено, если в каждой точке пространства известны величины и направления четырех векторов: $\vec{E}$ – напряженности электрического поля, $\vec{D}$ – электрического смещения (индукции), $\vec{H}$ – напряженности магнитного поля, $\vec{B}$ – магнитной индукции.

Векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$ являются функциями только источников поля и не зависят от параметров среды ε_a, μ_a. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ характеризуют силу, с которой поля действуют на заряды. Они зависят от параметров среды: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_a}$; $\vec{B} = \mu_a\vec{H}$. Количественная характеристика электрического поля экспериментально установлена законом Кулона,

определяющим силу взаимодействия между точечными зарядами, находящимися в однородной среде: $d\vec{F} = \frac{dq_1 dq_2}{4\pi\varepsilon_a r^2}\vec{r}_0$, где $\vec{r}_0$ – единичный вектор, направленный от первого заряда ко второму; $d\vec{F}$ – сила, действующая со стороны заряда dq_1 на заряд dq_2; r – расстояние между зарядами; ε_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_a = \varepsilon_0\,\varepsilon$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды. Коэффициент ε показывает, во сколько раз сила взаимодействия между зарядами в данной среде меньше, чем в вакууме.

Напряженность электрического поля равна силе, с которой поле действует на единичный положительный точечный заряд, внесенный в электрическое поле.

Размерность напряженности $[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

Напряженность поля точечного заряда $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_a r^2}\vec{r}_0$.

В каждой точке пространства вектор $\vec{E}$ поля точечного заряда направлен по прямой, соединяющей заряд с точкой наблюдения. Графически электрическое поле изображают с помощью силовых линий, густота которых пропорциональна напряженности поля.

Размерность вектора электрического смещения $[D] = \text{Кл/м}^2$.

Единица измерения магнитной индукции $[B] = \text{Вб/м}^2 = \text{Тл}$.

Размерность вектора напряженности магнитного поля $[H] = \frac{[B]}{[\mu_a]} = \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Здесь μ_a – абсолютная магнитная проницаемость среды; $\mu_a = \mu\mu_0$, где μ – относительная магнитная проницаемость среды, показывающая, во сколько раз сила взаимодействия между токами в данной среде больше, чем в вакууме; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Сила взаимодействия между проводниками с токами устанавливается законом Ампера:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_a}{4\pi r^2}\left[d\vec{j}_2\left[d\vec{j}_1\vec{r}_0\right]\right],$$

где $d\vec{F}_{12}$ – сила, действующая со стороны элемента тока $d\vec{j}_1$ на элемент тока $d\vec{j}_2$; r – расстояние между элементами тока.

Одинаково направленные элементы тока притягиваются, а направленные в противоположные стороны – отталкиваются.

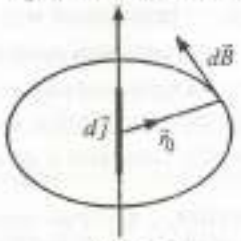


Рис. 2.2

Соотношение $d\vec{B} = \frac{\mu_a}{4\pi r^2}\left[d\vec{j}\vec{r}_0\right]$ носит название закона Био - Савара.

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ по величине равен силе, действующей на единичный элемент тока, а его направление перпендикулярно к этой силе и элементу тока (рис. 2.2). Векторы $\vec{B}$, $d\vec{j}$ и $\vec{r}_0$ образуют правую тройку векторов.

Задачи

2.1. Шар радиусом a заряжен с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \frac{r^2}{a^2}\sin\theta\left[\text{Кл/м}^3\right]$. Найти полный заряд шара Q.

2.2. Нить длиной l, направленная вдоль оси x, заряжена с плотностью $\tau = \tau_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$. Вычислить полный заряд нити Q при $l = a/4; a/2; 2a$.

Рис. 2.3

2.3. Шар радиусом a заряжен с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \frac{r}{a}\cos\theta$. Вычислить полный заряд шара Q.

2.4. Сфера радиусом a, заряженная с плотностью $\rho_s = \rho_0 \sin\theta\left[\text{Кл/м}^2\right]$, вращается со скоростью ω вокруг оси, проходящей через ее центр. Вычислить поверхностную плотность тока и полный ток I на ее поверхности (рис. 2.3).

2.5. Цилиндр радиусом a, высотой h, заряженный с плотностью $\rho_s = \rho_0 \frac{z^2}{a^2}\left[\text{Кл/м}^2\right]$, вращается вокруг оси z со скоростью ω. Вычислить силу тока на боковой поверхности цилиндра.

2.6. Вычислить силу взаимодействия на единицу длины двух параллельных бесконечных нитей, равномерно заряженных с линейной плотностью τ_1 и τ_2 и расположенных на расстоянии d в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε_0.

2.7. Электрон с зарядом $e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл и массой $m = 9{,}11\cdot10^{-28}$ г, летящий вдоль оси z со скоростью $v = 10^{-7}$ м/с, попадает в зону, где одновременно существуют электрическое и магнитное поля $\vec{E} = E_x\vec{x}_0;\ E_x = 10^{-6}$ В/м; $\vec{B} = B_y\vec{y}_0;\ B_y = 4\cdot10^{-2}$ Вб/м^2. Определить направление и величину силы, воздействующей на электрон, и его ускорение.

2.8. Бесконечно тонкий диск радиусом a, заряженный с плотностью $\rho_s = \rho_0 \frac{r}{a}\left[\text{Кл/м}^2\right]$, вращается вокруг оси со скоростью ω. Вычислить поверхностную плотность тока $\vec{\delta}_s$ и полный ток I на поверхности диска (рис. 2.4).

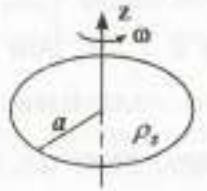


Рис. 2.4

2.9. Сравнить $d\vec{F}_{12}$ и $d\vec{F}_{21}$ для следующих комбинаций элементов токов (рис. 2.5).

Указание: использовать формулу векторной алгебры для двойного векторного произведения $\left[\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$.

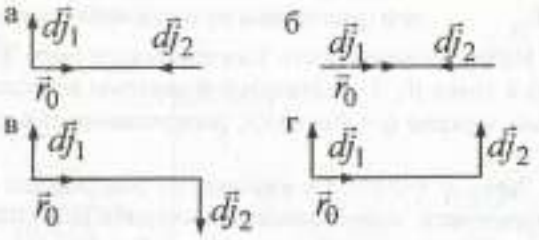


Рис. 2.5

2.10. Определить силу взаимодействия на единицу длины двух бесконечных параллельных проводов с токами $I_1 = 2$А и $I_2 = 5$А, протекающими в одном направлении. Провода находятся в воздухе на расстоянии 10 см.

2.11. По круглому цилиндрическому проводнику диаметром 4 мм протекает ток I силой 2 А. Провод выполнен из меди ($\sigma = 5{,}7\cdot10^7$ См/м). Определить тангенциальную составляющую вектора

напряженности электрического поля на поверхности проводника.

2.12. Круглый диск радиусом $a = 4$ м заряжен с поверхностной плотностью $\rho_s = \frac{\sin^2\varphi}{2r}\left[\text{Кл/м}^2\right]$. Найти полный заряд диска.

2.13. Найти полный заряд, находящийся между двумя сферами 1 м $\le r \le$ 2 м, если объемная плотность заряда в сферической системе координат $\rho = \frac{5\cos^2\varphi}{r^4}\left[\text{Кл/м}^3\right]$.

2.14. Найти полный ток, текущий по цилиндрическому проводнику радиусом a = 2 мм, если объемная плотность тока $\vec{\delta} = \frac{10^3}{r}\vec{z}_0\left[\text{А/м}^2\right]$.

2.15. Найти полный ток, протекающий через площадку, лежащую в плоскости $x = 0$ и ограниченную значениями $-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$ и $-0{,}01$ м $\le z \le 0{,}01$ м, если $\vec{\delta} = 100\cdot\cos 2y\cdot\vec{x}_0\left[\text{А/м}^2\right]$.

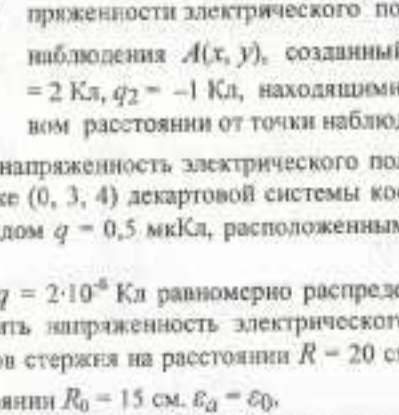


Рис. 2.6

2.16. Построить суммарный вектор напряженности электрического поля $\vec{E}_\Sigma$ в точке наблюдения $A(x, y)$, созданный зарядами q_1 = = 2 Кл, q_2 = –1 Кл, находящимися на одинаковом расстоянии от точки наблюдения (рис. 2.6).

2.17. Найти напряженность электрического поля $\vec{E}$ (модуль и направление) в точке (0, 3, 4) декартовой системы координат, созданную точечным зарядом q = 0,5 мкКл, расположенным в начале координат.

2.18. Заряд $q = 2\cdot10^{-6}$ Кл равномерно распределен по тонкому стержню. Определить напряженность электрического поля в точке, отстоящей от концов стержня на расстоянии R = 20 см, а от середины стержня – на расстоянии R_0 = 15 см. $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

2.19. В цилиндрическом проводнике радиусом 2 мм объемная плотность тока $\vec{\delta} = 10^3 e^{-400r}\vec{z}_0\left[\text{А/м}^2\right]$. Найти полный ток в проводнике.

2.20. Два заряда в вакууме взаимодействуют на расстоянии 11 см с такой же силой, как в скипидаре на расстоянии 7,4 см. Определить относительную диэлектрическую проницаемость скипидара ($\varepsilon_{ск}$).

2.21. Заряды q_1 = 50 мкКл и q_2 = 10 мкКл расположены в точках (-1, 1, -3) и (3, 1, 0) соответственно. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_a = \varepsilon_0$. Найти силу, действующую на заряд q_1 со стороны заряда q_2.

2.22. Найти силу взаимодействия между зарядами q_1 = 20 мкКл и q_2 = –300 мкКл, расположенными в точках (0, 1, 2) и (2, 0, 0) соответственно (рис. 2.7). Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

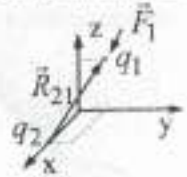


Рис. 2.7

2.23. Найти напряженность электрического поля E в точке (0, 0, 5) (рис. 2.8), созданную зарядами q_1 = 0,35 мкКл, расположенным в точке (0, 4, 0), и q_2 = - 0,55 мкКл, расположенным в точке (3, 0, 0).

2.24. На рис 2.9 показаны две параллельные бесконечные заряженные с линейной плотностью τ = 4 пКл/м нити, расположенные вдоль оси z в плоскости $x = 0$ на расстоянии $y = \pm 4$ м. Найти напряженность поля $\vec{E}$ в точке P (4, 0, z) м.

2.25. Вывести выражение для напряженности электрического поля $\vec{E}$ в точке P на оси z, созданного бесконечной плоскостью xoy, заряженной равномерно с поверхностной плотностью ρ_s (рис. 2.10). Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

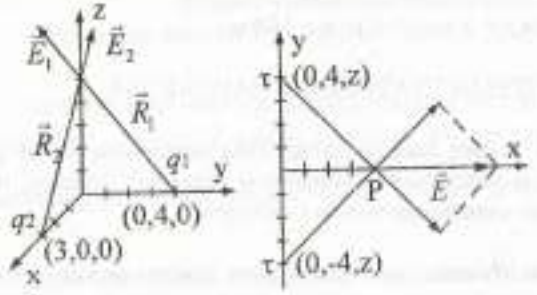


Рис. 2.8

Рис. 2.9

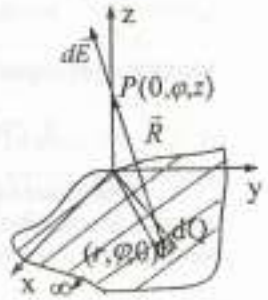


Рис. 2.10

2.26. Два одинаковых заряда, находящиеся на маленьких шариках, отстоящих друг от друга на расстоянии 10 см, взаимодействуют в воздухе с силой $F = 5\cdot10^{-4}$ Н. Определить величины зарядов.

2.27. Точечный заряд q_1 = 300 мкКл, находящийся в точке (1, -1,

-3), действует с силой $\vec{F}_1 = 8\vec{x}_0 - 8\vec{y}_0 + 4\vec{z}_0$ Н на точечный заряд q_2, находящийся в точке (3, -3, 2). $\varepsilon_a = \varepsilon_0$. Найти заряд q_2.

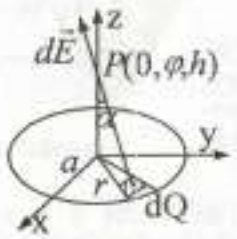


Рис. 2.11

2.28. Найти напряженность электрического поля $\vec{E}$ в точке P на оси круглого диска радиусом $r = a$, равномерно заряженного с поверхностной плотностью ρ_s (рис. 2.11).

2.29. Точечные заряды $q_1 = 250$ мкКл и $q_2 = -300$ мкКл расположены в точках (5, 0, 0) м и (0, 0, -5) м соответственно. Найти силу, действующую на заряд q_2.

2.30. Точечные заряды $q_1 = 30$ мкКл и $q_2 = -100$ мкКл расположены в точках (2, 0, 5) м и (-1, 0, -2) м соответственно. Найти силу, действующую на заряд q_1.

2.31. В свободном пространстве в области $r \le a$ сферической системы координат известно электрическое поле напряженностью $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{r}_0$. Приняв $r = b \le a$, убедиться в справедливости теоремы Остроградского – Гаусса.

2.32. Шар радиусом $r = 2$ м заряжен с объемной плотностью $\rho = -\frac{200}{r^2}$ мкКл/м^3. Найти поток $\oint \vec{D}d\vec{s}$ сквозь сферические поверхности радиусами $r = 1$ м; $r = 4$ м; $r = 100$ м.

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Классическая теория электромагнетизма основывается на уравнениях Максвелла, являющихся обобщением опытных данных, полученных при изучении электромагнитных явлений.

Первое уравнение Максвелла – обобщение закона полного тока

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ по замкнутому контуру L равна полному току, протекающему через поверхность S, ограниченную контуром L (рис. 3.1):

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{\delta}d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}d\vec{s} + \int_S \vec{\delta}_{cm}d\vec{s},$$

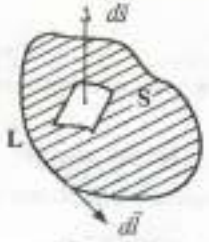


Рис. 3.1

где $\vec{\delta}$ – объемная плотность тока проводимости;

$\vec{\delta}_{cm}$ – объемная плотность стороннего тока;

$\vec{D}$ – вектор электрического смещения.

Дифференциальная форма записи этого уравнения имеет вид:

$$rot\,\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\delta}_{cm},$$

где $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\delta}_{cm}$ – объемная плотность тока смещения.

Изменение электрического поля во времени $(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$ приводит к появлению магнитного поля в пространстве ($rot\,\vec{H}$).

Введение тока смещения связало уравнения Максвелла в систему, решением которой в общем случае является электромагнитная волна.

Второе уравнение Максвелла – обобщение закона электромагнитной индукции Фарадея

Циркуляция вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ по замкнутому контуру L равна скорости изменения магнитного потока Φ, взятой с обратным знаком: $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{s}$.

При изменении магнитной индукции $\vec{B}$ или деформации и перемещении проводящего контура L в нем возникает ЭДС индукции.

Дифференциальная форма записи этого уравнения $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Изменение магнитного поля во времени $(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$ вызывает появление вихревого электрического поля в пространстве ($rot\,\vec{E}$).

Третье уравнение Максвелла –
теорема о потоке вектора электрической индукции (смещения)

Поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ сквозь замкнутую поверхность S равен полному заряду Q, находящемуся в объеме V, ограниченном поверхностью S (рис. 3.2):

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dv = Q,$$

Рис. 3.2

где ρ – объемная плотность заряда;

$d\vec{s}$ – внешняя нормаль к поверхности.

Дифференциальная форма записи этого уравнения $div\vec{D} = \rho$. Источником силовых линий электрического поля являются электрические заряды.

Четвертое уравнение Максвелла –
закон непрерывности магнитного поля

Поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через замкнутую поверхность S равен нулю: $\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$.

В дифференциальной форме $div\vec{B} = 0$. В природе нет магнитных зарядов, которые являлись бы источниками или стоками силовых линий магнитного поля, поэтому магнитные силовые линии поля всегда замкнуты.

Из первого и третьего уравнений Максвелла вытекает закон сохранения заряда $\oint_S \vec{\delta} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dv$ или $I = -\frac{\partial Q}{dt}$. Минус обозначает, что при вытекании тока из объема заряд в последнем уменьшается.

Дифференциальная форма записи этого уравнения: $div\vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Материальные уравнения: $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$.

Обобщенный закон Ома: $\vec{\delta} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{cm}\right)$, где σ – удельная проводимость среды.

Задачи

3.1. Определить циркуляцию вектора $\vec{H}$ по контуру с координатами (0,0); (0,1); (1,1); (1,0), если плотность тока проводимости $\vec{\delta} = \vec{\delta}_0 \frac{xy}{a^2}$, $\vec{\delta}_0 \perp$ плоскости XOY; плотность тока смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$.

3.2. Определить циркуляцию вектора $\vec{H}$ по контуру (см. 3.1), если объемная плотность тока проводимости $\vec{\delta}_0 = 0$, а вектор электрического смещения $\vec{D} = \vec{D}_0 y(\sin xt)/x$; $\vec{D}_0 \perp$ плоскости XOY.

3.3. Квадратная рамка со стороной $a = 1$ м находится в поле $H = H_0 \sin \omega t$. Магнитная проницаемость среды $\mu_a = \mu_0$, плоскость рамки перпендикулярна к $\vec{H}$. Определить ЭДС, наводимую в рамке.

3.4. Дано $\vec{E} = E_x \vec{x}_0$. Доказать, что для переменных во времени полей в однородной изотропной среде без свободных токов и зарядов $\vec{E} \perp \vec{H}$. Считая $\vec{\delta} = \delta_z \vec{z}_0$, показать, что $\vec{H} \perp \vec{\delta}$.

3.5. Проводник длиной l движется со скоростью $\vec{v}$ в равномерном магнитном поле, напряженность которого равна $\vec{H}$, пересекая силовые линии под углом α. Вычислить ЭДС между концами проводника (рис. 3.3).

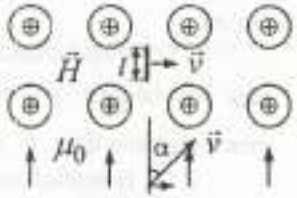


Рис. 3.3

3.6. Вычислить напряженность магнитного поля $\vec{H}$ на расстоянии r от прямолинейного бесконечного проводника с током I.

3.7. Пластины плоского конденсатора, подключенного к источнику ЭДС $U = const$, сближаются со скоростью v. Вычислить плотность тока смещения и величину тока во внешней цепи, если площадь пластин S, а расстояние между пластинами при $t = 0$ равно d_0. $\varepsilon_a = \varepsilon_0$. Краевой эффект не учитывать.

3.8. Некоторое тело с диэлектрической проницаемостью ε_a и проводимостью σ в начальный момент времени заряжено с объемной

плотностью $\rho = \rho_0$. Определить, за какое время во внутренней части тела объемная плотность заряда ρ уменьшится вдвое. Нарушается ли закон сохранения заряда?

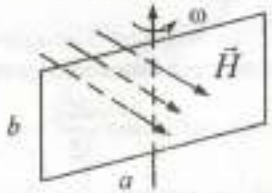


Рис. 3.4

3.9. В однородном магнитном поле с напряженностью $\vec{H}$ (рис. 3.4) вращается прямоугольная рамка со скоростью $\omega = 2\pi n$. Длины сторон a и b, число витков N, магнитная проницаемость среды $\mu_a = \mu_0$. n – число оборотов в секунду. Вычислить ЭДС в рамке.

3.10. Задано поле $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \begin{cases} k\vec{r} & \text{при } 0 \le r \le a; \\ k\dfrac{a^3}{r^3}\vec{r} & \text{при } a < r \le \infty, \end{cases}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор. Найти распределение зарядов, образовавших такое поле.

3.11. В некоторой области с диэлектрической проницаемостью ε_0 задано поле $\vec{E} = k\left(x^2\vec{x}_0 + y^3\vec{y}_0\right)$. Вычислить объемную плотность заряда.

3.12. В проводящей среде с проводимостью $\sigma = 8$ См/м постоянный ток создает магнитное поле $\vec{H} = 2y\cdot\vec{x}_0 - 6x\cdot\vec{y}_0$. Определить электрическое поле $\vec{E}$ в среде.

3.13. В свободном пространстве (ε_0, μ_0) электромагнитное поле задано своими составляющими $\vec{E} = E_0 e^{-jkx}\vec{y}_0$, $\vec{H} = H_0 e^{-jkx}\vec{z}_0$. При каких значениях k и $\dfrac{E_0}{H_0}$ это поле удовлетворяет уравнениям Максвелла?

3.14. Самолет летит горизонтально со скоростью $v = 200$ м/с. Вычислить разность потенциалов между концами крыльев, если расстояние между ними 30 м, а вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли $H_B = 0.02$ А/м.

3.15. При какой частоте отношение плотностей токов смещения и проводимости в меди ($\sigma_м = 5{,}7\cdot10^7$ См/м, $\varepsilon_м = \varepsilon_0$) будет таким же, как и в сухой почве ($\sigma_п = 10^{-4}$ См/м, $\varepsilon_п = 2\varepsilon_0$) на частоте $f = 10^3$ Гц?

3.16. По бесконечному прямолинейному проводнику протекает постоянный ток I. Плоская рамка размерами a и b (рис. 3.5) удаляется от проводника со скоростью $\vec{v}$. Вычислить ЭДС в рамке, если число витков в ней равно N, начальное расстояние r_0, а параметры среды ε_0, μ_0.

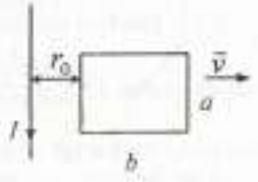


Рис. 3.5

3.17. Определить частоту f_0, при которой амплитуды объемной плотности тока смещения и плотности тока проводимости будут равны: 1) среда – медь ($\sigma_м = 5{,}7\cdot10^7$ См/м, $\varepsilon = 1$); 2) среда – морская вода ($\sigma_в = 4$ См/м, $\varepsilon = 80$).

3.18. Вычислить, на какой частоте плотности токов смещения и проводимости будут одинаковыми в среде с $\sigma = 10^{-2}$ См/м, $\varepsilon_a = 3\varepsilon_0$.

3.19. По прямолинейному проводнику протекает ток $I = I_0 \cos\omega t$ (рис. 3.6). Вычислить ЭДС, наведенную в рамке, состоящей из 10 витков, если $r = 0{,}5$ м; $a = 5$ см; $b = 10$ см; $I_0 = 1$ А; $\omega = 10^3$ 1/с; $\mu_a = \mu_0$.

3.20. Металлический стержень длиной l вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле $\vec{B}$. Вычислить ЭДС в стержне (рис. 3.7).

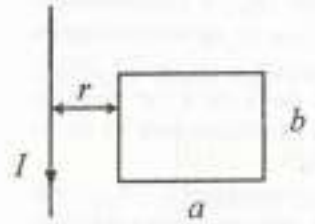


Рис. 3.6

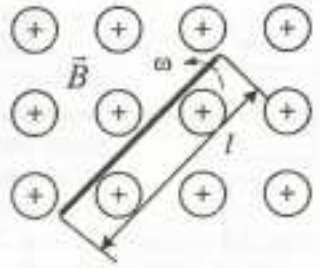


Рис. 3.7

3.21. Показать, что уравнение непрерывности тока (закон сохранения заряда) вытекает из первого и третьего уравнений Максвелла при условии, что $\delta_{стр} = 0$.

3.22. Определить силу тока смещения между квадратными пластинами воздушного конденсатора со стороной 5 см, если напряжен-

ность электрического поля в нем изменяется со скоростью $4{,}52\cdot10^6$ В/мс. Краевой эффект не учитывать.

3.23. Внутри цилиндрического проводника радиусом $r_0 = 10^{-2}$ м магнитное поле $\vec{H} = \frac{10^4}{r}\left(\frac{1}{a^2}\sin ar - \frac{r}{a}\cos ar\right)\vec{\varphi}_0$ (А/м), где $a = \frac{\pi}{2r_0}$. Найти силу тока в проводнике.

3.24. Магнитное поле бесконечного прямолинейного проводника с током I радиусом a:

$$\vec{H} = \left(\frac{Ir}{2\pi a^2}\right)\vec{\varphi}_0 \text{ при } r \le a;$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{\varphi}_0 \text{ при } r \ge a.$$

Найти объемную плотность тока $\vec{\delta}$ в обеих областях.

3.25. По медному проводнику ($\sigma_м = 5{,}7\cdot10^7$ См/м) диаметром 2 мм протекает постоянный ток силой 7,5 А. Определить касательную составляющую вектора напряженности электрического поля на поверхности провода.

3.26. В однородном постоянном магнитном поле с индукцией $B = 5\cdot10^{-6}$ Т вращается виток провода радиусом $a = 0{,}2$ м с угловой скоростью 50 об/с. Сопротивление витка $R = 5$ Ом. Ось вращения перпендикулярна к вектору $\vec{B}$. Найти максимальное значение тока в витке и выразить зависимость тока от времени.

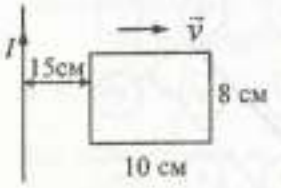


Рис. 3.8

3.27. Вычислить ЭДС в удаляющейся со скоростью $v = 5$ м/с от прямолинейного бесконечного проводника с током $I = 100$ А рамке размерами 10 см×8 см в тот момент, когда она находится на расстоянии 15 см от проводника (рис. 3.8).

3.28. В области значений $0 \le r \le 2$ цилиндрической системы координат задано поле вектора электрического смещения $\vec{D} = \left(4r^{-1} + 2e^{-0.5r} + 4re^{-0.5r}\right)\vec{r}_0$, а в области $r > 2$ $\vec{D} = \left(\frac{2{,}057}{r}\right)\vec{r}_0$. Найти объемную плотность заряда в обеих областях.

3.29. Найти ЭДС, наводимую в проводящем стержне, движущемся в постоянном магнитном поле $\vec{B} = 0{,}04\,\vec{y}_0$ Т со скоростью $\vec{v} = 2{,}5\sin10^3 t\cdot\vec{z}_0$. Длина стержня l = = 0,2 м (рис. 3.9).

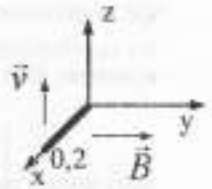


Рис. 3.9

3.30. Поле вектора электрического смещения в сферической системе координат задано выражением $\vec{D} = \frac{10}{r^2}\left[1 - e^{2r}\left(1 + 2r + 2r^2\right)\right]\vec{r}_0$. Найти объемную плотность заряда ρ, создавшего данное поле.

3.31. В среде с параметрами $\sigma = 5$ См/м и $\varepsilon = 1$ напряженность электрического поля $E = 250\ \sin10^{10}\ t$ В/м. Найти плотности токов проводимости и смещения и частоту, на которой они равны.

4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Граничные условия – это форма уравнений Максвелла для точек, принадлежащих граничной поверхности, в которых параметры среды меняются скачком или существуют поверхностные токи либо заряды. В этих точках уравнения Максвелла в дифференциальной форме теряют смысл и должны быть дополнены условиями, определяющими поведение векторов поля при переходе через границу сред.

Граничные условия получаются из интегральных уравнений Максвелла с использованием предельных переходов. Исходя из первого уравнения Максвелла, определяющего циркуляцию напряженности магнитного поля:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{\delta}d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}d\vec{s}\,, \qquad (4.1)$$

получают граничные условия для касательных составляющих вектора $\vec{H}$:

$$\left[\vec{n}_0\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)\right] = \vec{\delta}_s \text{ или } \vec{H}_{\tau 1} - \vec{H}_{\tau 2} = \left[\vec{\delta}_s\cdot\vec{n}_0\right], \qquad (4.2)$$

где $\vec{n}_0$ – единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный в первую среду.

Это означает, что разность между касательными составляющими вектора $\vec{H}_\tau$ на границе раздела сред равна поверхностному току. При отсутствии последнего

$$\vec{H}_{\tau 1} = \vec{H}_{\tau 2}\,, \qquad (4.3)$$

т.е. составляющие непрерывны.

Исходя из второго уравнения Максвелла, определяющего циркуляцию напряженности электрического поля:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{s}, \qquad (4.4)$$

получают граничные условия для касательных составляющих напряженности электрического поля:

$$\left[\vec{n}_0 \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\right] = 0 \text{ или } \vec{E}_{\tau 1} = \vec{E}_{\tau 2}, \qquad (4.5)$$

которые на границе раздела сред непрерывны.

Третье уравнение Максвелла, определяющее поток вектора электрического смещения:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dv, \qquad (4.6)$$

позволяет получить граничные условия для нормальных компонент вектора $\vec{D}$:

$$\vec{n}_0 \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \rho_s \text{ или } D_{n1} - D_{n2} = \rho_s. \qquad (4.7)$$

Аналогично из четвертого уравнения Максвелла о потоке вектора магнитной индукции

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 \qquad (4.8)$$

получаются граничные условия для нормальных составляющих вектора $\vec{B}$:

$$\vec{n}_0 \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0 \text{ или } B_{n1} = B_{n2}. \qquad (4.9)$$

Записанные выше граничные условия являются основными, они получаются непосредственно из уравнений Максвелла. Граничные условия для составляющих H_n, E_n, B_τ и D_τ получают, используя соотношения (4.2), (4.5), (4.7), (4.9) и материальные уравнения состояния среды при отсутствии поверхностных токов или зарядов:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}. \qquad (4.10)$$

Задачи

4.1. По границе раздела сред протекает ток $\vec{\delta}_s$. В первой среде $\vec{H}_1 = 0$. Определить магнитное поле во второй среде вблизи поверхности.

4.2. По плоской поверхности раздела металл-диэлектрик течет поверхностный ток $\vec{\delta}_s = -y\vec{x}_0 + x\vec{y}_0$. Найти уравнение силовых линий вектора $\vec{H}_\tau$.

4.3. У поверхности раздела двух сред задано значение вектора $\vec{B}_2$ ($\left|\vec{B}_2\right|$ и α_2). Определить вектор $\vec{B}_1$ у поверхности в первой среде при условии, что поверхностный ток отсутствует, $\vec{\delta}_s = 0$ (рис. 4.1).

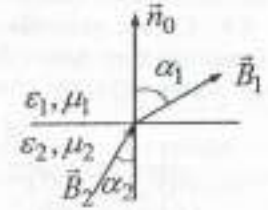


Рис. 4.1

4.4. У поверхности раздела двух сред задано значение вектора $\vec{E}_2$ ($\left|\vec{E}_2\right|$ и α_2). Определить вектор $\vec{E}_1$ у поверхности в первой среде, если на границе раздела отсутствуют свободные заряды ($\rho_s = 0$) (рис. 4.2).

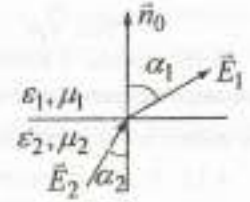


Рис. 4.2

4.5. Среды разделены заряженной поверхностью, и в одной из них поле отсутствует. Каково электрическое поле в другой среде, если поверхностная плотность заряда ρ_s, а диэлектрическая проницаемость второй среды ε_2?

4.6. На каком рисунке (рис. 4.3, а, б, в) изображены силовые линии электрического поля, магнитного поля, если вторая среда - идеальный проводник?

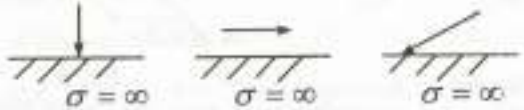


Рис. 4.3

4.7. У поверхности идеального проводника, совпадающей с плоскостью XOY, задан электрический потенциал $\varphi = -Az$. Определить поверхностную плотность заряда, если среда над проводником – вакуум.

4.8. Определить, по какому закону преломляются силовые ли-

нии вектора $\vec{B}$ при переходе из среды с параметрами ε_0, μ_0 в среду с параметрами ε_a, μ_a. Показать, что силовые линии на входе и выходе плоскопараллельной пластины параллельны (рис. 4.4).

4.9. Среды различаются магнитными проницаемостями (рис. 4.5). Какая из сред имеет большую магнитную проницаемость, если силовые линии идут, как показано на рис. 4.5?

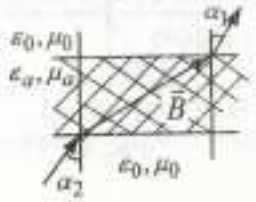


Рис. 4.4

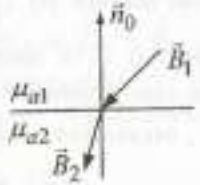


Рис. 4.5

4.10. Среды с плоской границей раздела различаются диэлектрическими проницаемостями. Угол преломления $\varphi_2 = \pi/2$ (рис. 4.6). Какое соотношение при этом должно выполняться между ε_{a1} и ε_{a2}?

4.11. У поверхности идеального проводника в плоскости XOY задано магнитное поле $\vec{H} = 3\vec{y}_0$ А/м (рис. 4.7). Чему равен ток, протекающий по участку поверхности XOY в виде ленты, расположенной по оси X, ширина которой $l = 0{,}2$ м?

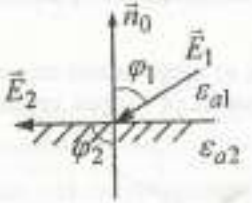


Рис. 4.6

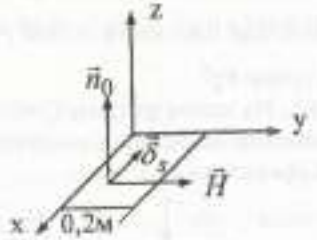


Рис.4.7

4.12. Определить напряженность электрического поля на расстоянии h от бесконечной заряженной плоскости. Плотность поверхностного заряда ρ_s.

4.13. Показать, что на поверхности раздела двух проводников линии тока испытывают преломление по закону $\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, где α_1, α_2 – углы между линиями тока и нормалью к поверхности раздела $\vec{n}_0$,

а σ_1, σ_2 – проводимости сред.

Показать, что на поверхности раздела двух диэлектриков линии вектора $\vec{D}$ преломляются по закону $\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$.

4.14. По бесконечной плоскости XOY течет ток с плотностью $\vec{\delta}_s = \delta_s \vec{y}_0$. Считая плоскость бесконечно тонкой, определить напряженность магнитного поля в точке, отстоящей от нее на расстоянии h.

4.15. Плоский конденсатор заполнен двухслойным диэлектриком. Диэлектрическая проницаемость первого слоя $\varepsilon_{a1} = 2\varepsilon_0$, удельная проводимость $\sigma_1 = 10^{-8}$ См/м. Для второго слоя – $\varepsilon_{a2} = 4\varepsilon_0$, $\sigma_2 = 10^{-7}$ См/м. Толщина слоев $d_1 = 2\ d_2 = 4$ см. Разность потенциалов между обкладками $U = 100$ В. Найти поверхностную плотность зарядов ρ_s на границе раздела диэлектриков в установившемся режиме и плотность тока проводимости. При каких параметрах диэлектриков $\rho_s = 0$? Поле считать однородным.

4.16. Цилиндр радиусом a, заряженный равномерно с поверхностной плотностью ρ_s, вращается вокруг оси со скоростью ω. Вычислить напряженность магнитного поля у поверхности цилиндра, если $a = 10$ см; $\omega = 8\pi$ 1/с; $\rho_s = 10^{-17}$ Кл/м^2.

4.17. На границе раздела двух сред ($\varepsilon_1 = 2$; $\varepsilon_2 = 5$) известен вектор $\vec{E}_1 = 2\vec{x}_0 - 3\vec{y}_0 + 5\vec{z}_0$ В/м. Найти вектор $\vec{D}_2$ и углы α_1 и α_2, если $\rho_s = 0$ (рис. 4.8).

4.18. В области 1 задан вектор $\vec{H}_1 = 4\vec{x}_0 + 3\vec{y}_0 - 6\vec{z}_0$ А/м. Найти $|\vec{H}_2|$ и α_2 при условии, что поверхностный ток отсутствует; $\mu_1 = 3$; $\mu_2 = 5$ (рис. 4.9).

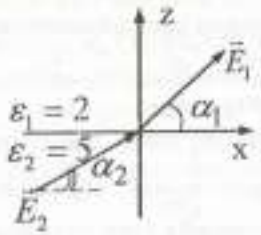


Рис. 4.8

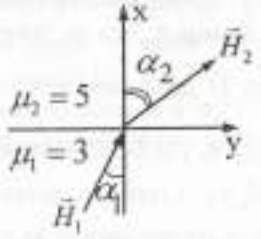


Рис. 4.9

4.19. В области 1 ($z < 0$) известен вектор $\vec{E}_1 = -3\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 - 2\vec{z}_0$ В/м; $\varepsilon_1 = 6$. Найти $\vec{E}_2$ в области 2 ($z > 0$), если $\varepsilon_2 = 2$, а поверхностная плотность заряда на границе раздела $\rho_S = 0$.

4.20. В области 1 ($z < 0$) $\mu_1 = 3$, а вектор $\vec{H}_1 = \frac{1}{\mu_0}(0{,}2\vec{x}_0 + 0{,}5\vec{y}_0 + \vec{z}_0)$ А/м (рис. 4.10). Найти μ_2, $\vec{H}_2$, если $\alpha_2 = 45°$; $\vec{\delta}_s = 0$.

4.21. По поверхности раздела двух сред ($z = 0$) течет ток с поверхностной плотностью $\vec{\delta}_s = 9\vec{y}_0$ (рис. 4.11). Известен вектор $\vec{H}_2 = 14{,}5\vec{x}_0 + 8\vec{z}_0$. Найти вектор $\vec{H}_1$, если $\mu_1 = 4$; $\mu_2 = 3$.

4.22. В плоскости $x = 0$ течет поверхностный ток с плотностью δ_s (рис. 4.12). В области 1 ($x < 0$) вектор $\vec{B}_1 = 6\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 + 10\vec{z}_0$ Т, $\mu_{a1} = 2\mu_0$. В области 2 ($x > 0$) $-\vec{B}_2 = 6\vec{x}_0 - 50{,}96\vec{y}_0 + 8{,}96\vec{z}_0$ Т, $\mu_{a2} = 7\mu_0$. Найти $\vec{\delta}_s$.

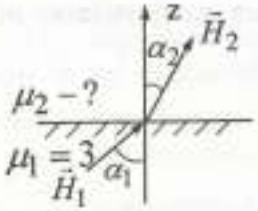


Рис. 4.10

Рис. 4.11

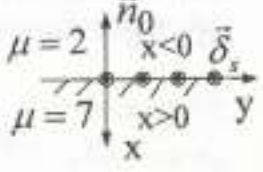


Рис. 4.12

4.23. В области 1 ($\varepsilon = 1$) задан вектор $\vec{D}_1 = 3\vec{x}_0 - 4\vec{y}_0 + 6\vec{z}_0$ Кл/м^2 (рис. 4.13). Найти вектор $\vec{E}_2$ и углы θ_1 и θ_2, если во второй среде $\varepsilon_2 = 2{,}4$, а поверхностная плотность заряда на границе раздела равна 0.

4.24. В свободном пространстве 1 напряженность электрического поля $\vec{E}_1 = 3\vec{x}_0 - 5\vec{y}_0 + 3\vec{z}_0$ В/м. Область 2 – диэлектрик с $\varepsilon_2 = 3{,}6$ (рис. 4.14). Найти угол θ_2, если $\rho_S = 0$.

4.25. В области 1 ($z < 0$) с $\varepsilon_1 = 2$ напряженность электрического поля $\vec{E}_1 = -3\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 - 2\vec{z}_0$ В/м (рис. 4.15). Найти напряженность электрического поля в области 2 ($z > 0$) с $\varepsilon_2 = 8$, если $\rho_S = 0$.

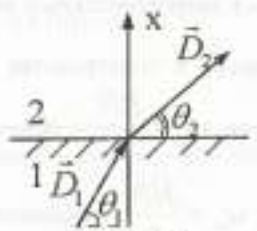


Рис. 4.13

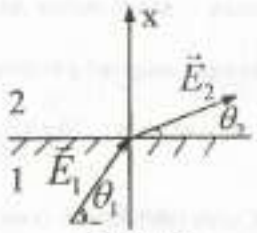


Рис. 4.14

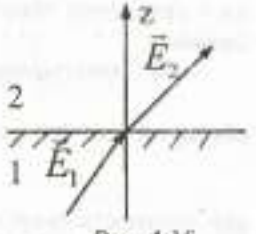


Рис. 4.15

4.26. На границе раздела двух сред ($\varepsilon_1 = 2$; $\varepsilon_2 = 5$) известна напряженность электрического поля $\vec{E}_1 = 2\vec{x}_0 - 3\vec{y}_0 + 5\vec{z}_0$ В/м (рис. 4.16). Найти $\vec{D}_2$, θ_1 и θ_2, если $\rho_S = 0$.

4.27. В области 1 ($\mu_1 = 15$) (рис. 4.17) задан вектор $\vec{B}_1 = 1{,}2\vec{x}_0 + 0{,}8\vec{y}_0 + 0{,}4\vec{z}_0$ (Т). Найти вектор $\vec{H}_2$ во 2-й области ($\mu_2 = 1$) и углы α_1 и α_2.

4.28. На границе раздела двух сред (ε_1 и ε_2) силовые линии электрического поля образуют угол φ_1 с направлением нормали к границе раздела (рис. 4.18). Найти ориентацию силовых линий $\vec{E}_2$ во второй среде (φ_2), если $\rho_S = 0$.

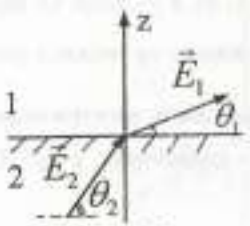


Рис. 4.16

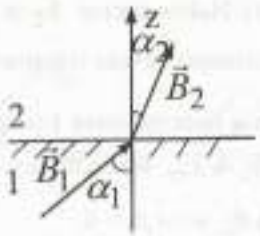


Рис. 4.17

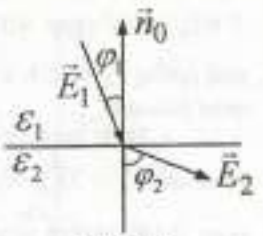


Рис. 4.18

5. ТЕОРЕМА ПОЙНТИНГА

В макроскопической электродинамике система основных аксиом – уравнений Максвелла – дополняется двумя энергетическими аксиомами:

1) электромагнитная энергия распределена в пространстве с объемной плотностью $w = w_э + w_м$, Дж/м^3, где $w_э = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}$ - объемная плотность энергии электрического поля; $w_м = \frac{\vec{H}\vec{B}}{2}$ - объемная плотность энергии магнитного поля;

2) величина и направление потока электромагнитной энергии характеризуется вектором Пойнтинга $\vec{\Pi} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]$.

С учетом этого закон сохранения энергии для электромагнитных процессов, происходящих в некотором объеме V, ограниченном поверхностью S (теорема Пойнтинга), имеет следующий вид:

$$P_{ст} = P_{пол} + \frac{dW}{dt} + P_\Sigma,$$

где $P_{ст} = -\int_V \vec{E}\vec{\delta}_{ст} dv$ - мощность сторонних сил; $P_{пол} = \int_V \vec{E}\vec{\delta} dv$ - мощность тепловых потерь; $W = \int_V w dv$ - электромагнитная энергия, запасенная в объеме V; $P_\Sigma = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{s}$ - мощность, переносимая электромагнитным полем через поверхность S; $d\vec{s} = \vec{n}_0 ds$ - вектор, по

направлению совпадающий с внешней нормалью; $\vec{n}_0$ - внешняя нормаль к поверхности S.

Таким образом, теорема Пойнтинга утверждает, что мощность сторонних сил, действующих в объеме V, расходуется на тепловые потери, изменение электромагнитной энергии и излучение за пределы объема.

Отметим, что слагаемые dW/dt и P_Σ могут быть как положительными, так и отрицательными; $P_{ст}$ и $P_{пол}$ всегда положительны.

Для полей, записанных в виде комплексных амплитуд, вводится комплексный вектор Пойнтинга $\dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{E}}\dot{\vec{H}}^*\right]$. Среднее значение вектора Пойнтинга

$$\vec{\Pi}_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{\Pi} dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\dot{\vec{H}}^*\right],$$

где T – период колебаний.

Задачи

5.1. Вычислить энергию, запасенную в плоском конденсаторе. Разность потенциалов между пластинами U, площадь S, расстояние между пластинами d. Поле считать однородным. Вывести формулу для емкости конденсатора. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε_a.

5.2. Определить, с какой стороны к линии подключены генератор и нагрузка. Объяснить полученный результат (рис. 5.1).

5.3. Двухпроводная линия проходит через отверстия в идеально проводящем экране. Построить силовые линии вектора Пойнтинга вблизи экрана (рис. 5.2).

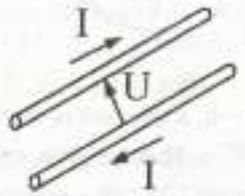


Рис. 5.1

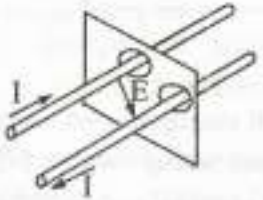


Рис. 5.2

5.4. Какого радиуса должны быть пластины плоского конденса-

тора, чтобы запасенная в нем энергия равнялась 0,5 Дж? Конденсатор заряжен до напряжения 10^3 В, расстояние между пластинами $d = 2$ мм, $\varepsilon_a = 18\varepsilon_0$.

5.5. По прямолинейному бесконечному проводнику радиусом a течет постоянный ток, плотность которого $\vec{\delta}$. Проводник находится в вакууме. Чему равна плотность энергии магнитного поля на расстоянии $2a$ от оси проводника? Построить зависимость $W_u = W(a)$.

5.6. Магнитная и электрическая составляющие поля электромагнитной волны заданы формулами:

$$\left.\begin{aligned}\vec{H} &= H_0 e^{j(\omega t - ky)}\vec{z}_0;\\ \vec{E} &= -120\pi H_0 e^{j(\omega t - ky)}\vec{x}_0.\end{aligned}\right\}$$

Записать выражение для мгновенного значения вектора Пойнтинга и найти его среднее значение, если $H_0 = 2$ А/м.

5.7. Плоский конденсатор подключается к источнику ЭДС величиной э. Определить направление вектора Пойнтинга в точках 1, 2, 3, 4 в процессе заряда (рис. 5.3).

5.8. По цилиндрическому проводнику радиусом a, длиной l протекает ток с объемной плотностью $\vec{\delta}$. Проводимость материала проводника σ. Определить вектор Пойнтинга у поверхности проводника и его поток через эту поверхность. Объяснить полученный результат (рис. 5.4).

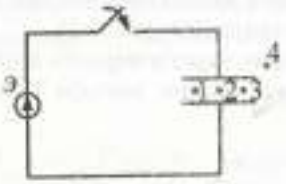


Рис. 5.3

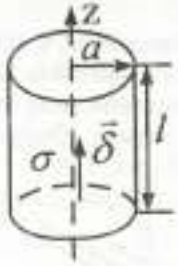


Рис. 5.4

5.9. В изолированной системе $P_{ст} = 0$, а мощность потерь пропорциональна запасу энергии ($P_{пот} = \alpha W$). Найти закон изменения энергии во времени, считая, что при $t = 0$ $W = W_0$. Построить зависимость $W(t)$.

5.10. Внутри области происходит преобразование энергии сто-

ронних сил в электромагнитную, однако поток вектора Пойнтинга через границу области отрицателен. Описать возможные варианты баланса энергии.

5.11. Воздух начинает ионизироваться при напряженности электрического поля $E_{доп} = 3$ кВ/мм. Определить плотность потока мощности плоских электромагнитных волн, при которой наступает ионизация. Частота колебаний достаточна мала для того, чтобы считать процесс ионизации безынерционным.

5.12. Показать с помощью вектора Пойнтинга, что вся энергия, передаваемая от источника к нагрузке в единицу времени по коаксиальному кабелю, канализируется по диэлектрику. Проводимость материала жилы и оболочки принять бесконечно большими.

5.13. Определить тангенс угла, составляемого вектором напряженности электрического поля с нормалью к поверхности жилы коаксиального кабеля. Жила и внешний проводник, выполненные из меди ($\sigma = 5{,}8\cdot10^7$ См/м), имеют радиусы $r_1 = 0{,}3$ см, $r_2 = 1$ см. Напряжение U между жилой и оболочкой 10 кВ. Протекающий по кабелю постоянный ток $I = 50$ А.

5.14. Существует ли различие между значениями вектора $\vec{\Pi}$ для электромагнитных волн, поляризованных по кругу и линейно поляризованных, если амплитуды $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для них равны? Результаты связать с принципом суперпозиции для энергий, учитывая, что волна, поляризованная по кругу, есть сумма двух линейно поляризованных волн.

5.15. В плоском конденсаторе с размерами сторон 0,5 м и 1,0 м и расстоянием между пластинами 2 см разность потенциалов $U = 10$ В. Найти запасенную в конденсаторе энергию и его емкость, если $\varepsilon_a = 2\varepsilon_0$.

5.16. Вектор $\vec{E}$ в декартовой системе координат имеет единственную составляющую E_x, отличную от нуля. Показать, что вектор Пойнтинга не может иметь составляющую вдоль оси x.

5.17. В некоторой точке пространства заданы векторы $\vec{E} = 2\vec{y}_0$ В/м и $\vec{\Pi} = 4\vec{x}_0 + 6\vec{z}_0$ Вт/м^2. Определить вектор $\vec{H}$ в этой точке.

5.18. Напряженность электрического поля распространяющейся в полиэтилене ($\varepsilon = 2{,}25$) волны $E = 50$ мВ/м. Определить вектор Пойнтинга этой волны.

5.19. Комплексные амплитуды векторов электромагнитного по-

ля в некоторой точке пространства заданы выражениями:

$$\dot{\vec{E}} = 0{,}85 \cdot e^{j0{,}6}\vec{x}_0 - 1{,}3 \cdot e^{-j0{,}7}\vec{y}_0;$$

$$\dot{\vec{H}} = 4{,}2 \cdot 10^{-3} e^{-j1{,}2}\vec{z}_0.$$

Определить комплексный вектор Пойнтинга $\dot{\vec{\Pi}}$ и его среднее значение $\vec{\Pi}_{cp}$.

5.20. В свободном пространстве в направлении оси z распространяется плоская волна с напряженностью электрического поля $\vec{E}(z,t) = 50\cos(\omega t - kz)$ В/м. Найти среднее значение вектора Пойнтинга и его поток через площадку радиусом 2,5 м, лежащую в плоскости $z = const$ ($\perp$ к оси z).

5.21. Среднее значение вектора Пойнтинга в процессе распространения электромагнитной волны на расстоянии $z = 2$ м уменьшается на 10 %. Определить коэффициент затухания волны.

5.22. Заряженный цилиндр с поверхностной плотностью ρ_S вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси. Изобразить силовые линии вектора Пойнтинга у поверхности цилиндра.

5.23. Измерения световой энергии показали, что через каждый квадратный сантиметр поверхности, перпендикулярной к солнечным лучам, проходит 1 Вт/с. Считая поток параллельных лучей плоской электромагнитной волной, определить напряженности электрического и магнитного полей.

6. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Основные уравнения и определения электростатического поля

Система уравнений электростатики – частный случай системы уравнений Максвелла, когда $\partial/\partial t = 0$:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0; \quad \oint_S \vec{D}d\vec{s} = \int_V \rho dv;$$

$$rot\vec{E} = 0; \quad div\vec{D} = \rho.$$

Для описания электростатического поля вводится скалярная функция – потенциал φ. Напряженность электрического поля связана с потенциалом зависимостью $\vec{E} = -grad\varphi$.

Введенный таким образом потенциал неоднозначен и не имеет

физического смысла. Знак «-» показывает, что электрическое поле направлено из области положительного потенциала в область отрицательного потенциала.

Разность потенциалов между двумя точками численно равна работе по перемещению единичного положительного заряда между ними:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}.$$

Эта величина не зависит от пути, по которому перемещается заряд.

Как следует из вышеприведенных формул, понятие разности потенциалов является точным лишь для полей, не зависящих от времени.

Для точечного заряда $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r}$, $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2}\vec{r}_0$, где r – расстояние от заряда до точки наблюдения.

Для линейно распределенного заряда $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int_L \frac{\tau dl}{r}$; для зарядов, распределенных по поверхности и объему, – $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int_S \frac{\rho_s ds}{r}$ и $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int_V \frac{\rho dv}{r}$ соответственно. В этих формулах τ, ρ_s и ρ – линейная, поверхностная и объемная плотность зарядов.

Сила, действующая на заряд q, $\vec{F} = q\vec{E}$.

Граничные условия электростатики у поверхности проводника:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n_s} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon_a}.$$

Это означает, что поверхность проводника в электростатическом поле эквипотенциальна.

Энергия электростатического поля $W_э = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2}\int_v \rho\varphi\, dv$, где V – полный объем, v – объем, занимаемый зарядами, φ – потенциал относительно бесконечно удаленной точки.

Емкость заряженного тела определяется как коэффициент пропорциональности между его потенциалом относительно бесконечно удаленной точки и зарядом, сосредоточенным на этом теле: $q = C\varphi$.

Конденсатор представляет собой систему двух проводников, несущих равные по величине и противоположные по знаку заряды. Его емкость $C = \dfrac{|q|}{|\Delta\varphi|}$, где q – величина заряда одного из тел; $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между ними.

В ряде электростатических задач для нахождения распределения зарядов, создающих в пространстве потенциал φ, полезно использовать уравнение Пуассона $\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_a}$ и уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$.

Задачи

6.1. Потенциал некоторой области $\varphi = \sum_{n=1}^{k} A_n \sin mx \operatorname{sh} ny$. Является ли данная функция решением уравнения Лапласа?

6.2. На внутренней сфере расположен заряд $+q$. Вычислить поверхностную плотность заряда и полный заряд внешней сферы, выполненной из идеального проводника (рис. 6.1).

Рис. 6.1

6.3. Определить радиус уединенной сферы емкостью 1 Ф. Среда – вакуум.

6.4. Заряд с объемной плотностью $\rho = \rho_0 r/a$ распределен в объеме шара радиусом a. Определить закон изменения напряженности и индукции электрического поля внутри и вне шара. Описать поведение векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ при переходе границы шар – воздух. Вычислить энергию электрического поля, создаваемую заряженным шаром. Диэлектрическая проницаемость материала шара ε_a, среды – ε_0.

6.5. Определить емкость, разность потенциалов между обкладками, напряженность поля и индукцию в диэлектриках с ε_{a1} и ε_{a2}, заполняющих двухслойный сферический конденсатор, имеющий заряд q (рис. 6.2).

6.6. Определить погонную емкость, разность потенциалов между обкладками, напряженность поля и индукцию в диэлектриках, заполняющих двухслойный цилиндрический конденсатор. На единицу длины конденсатора приходится заряд q (рис. 6.3). Диэлектрические проницаемости слоев ε_{a1} и ε_{a2}.

Рис. 6.2

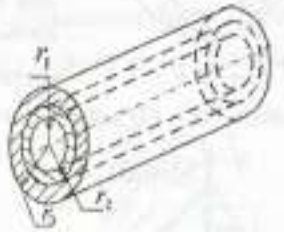


Рис. 6.3

6.7. Положительный заряд равномерно распределен по кольцевой линии радиусом a. Диэлектрическая проницаемость среды ε_a. Линейная плотность заряда τ. Найти потенциал и напряженность поля в точках, лежащих на оси кольца. Построить $E(z)$ и $\varphi(z)$ (рис. 6.4).

6.8. Положительный заряд q равномерно распределен на плоском круглом диске радиусом a. Найти напряженность электрического поля $\vec{E}$ и потенциал φ точек, лежащих на оси z, нормальной к диску и проходящей через ее центр (рис. 6.5). Диэлектрическая проницаемость среды ε_a.

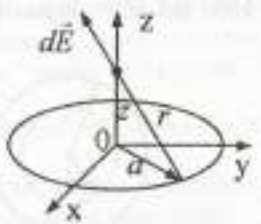


Рис. 6.4

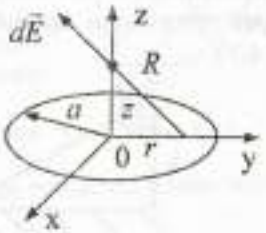


Рис. 6.5

6.9. В поле заряженного шара найти радиусы эквипотенциальных поверхностей, потенциалы которых отличаются друг от друга на 10 В; $r_ш = 1$ мм; $q = 8{,}89 \cdot 10^{-11}$ Кл. Шар находится в воздухе.

6.10. Используя теорему Гаусса, показать, что напряженность электрического поля на расстоянии r от бесконечного тонкого провода $E_r = \tau/2\pi\varepsilon_0 r$, где τ – линейная плотность заряда.

Рис. 6.6

6.11. Объемный заряд с плотностью ρ_0 равномерно распределен между двумя концентрическими сферическими поверхностями. Радиус внешней поверхности b, радиус внутренней поверхности a. Диэлектрическая проницаемость среды между сферическими поверхностями ε_a, окружающей среды – ε_0 (рис. 6.6). Найти $D(r)$, $E(r)$, $\varphi(r)$. Построить графики поля.

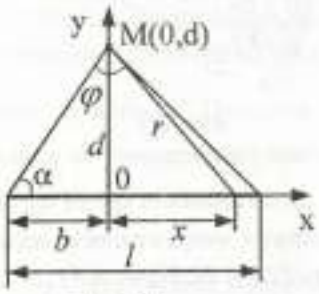


Рис. 6.7

6.12. Вдоль прямолинейного отрезка длиной l распределен заряд с линейной плотностью τ. Найти потенциал поля в точке M, отстоящей на расстоянии d от заряженной нити. Диэлектрическая проницаемость среды ε_0 (рис. 6.7).

6.13. Точечный заряд q находится на расстоянии h от бесконечно проводящей плоскости. Определить плотность электрического заряда, образовавшегося в различных точках плоскости вследствие электростатической индукции (рис. 6.8).

6.14. Определить величину заряда сферического конденсатора, при котором будет обеспечен трехкратный запас по пробивному напряжению диэлектрик – воздух. Напряженность поля в воздухе, при которой происходит пробой, равна 3000 В/мм. Радиусы сфер r_1 и r_2 (рис. 6.9).

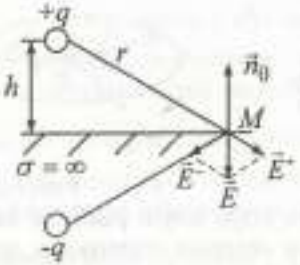


Рис. 6.8

Рис. 6.9

6.15. Металлический шар радиусом 0,2 м несет на себе заряд q = =6·10^{-5} Кл. Диэлектрическая проницаемость среды ε_a =3ε_0. Подсчитать энергию электрического поля.

6.16. Найти распределение зарядов $\rho(r)$, создающих в вакууме потенциал $\varphi = q\dfrac{\exp(-r/a)}{r}$. Указание: использовать уравнение Пуассона.

6.17. Вычислить энергию равномерно заряженного шара радиусом a. Диэлектрическая проницаемость шара ε_a, заряд q, окружающая среда – вакуум.

6.18. Вывести формулы для определения напряженности поля и емкости двухслойного плоского конденсатора, а также построить графики изменения модулей векторов напряженности электрического поля, модуля вектора электрической индукции $\vec{D}$ и потенциала φ в функции расстояния x. Толщина первого слоя диэлектрика d_1, второго – d_2. Диэлектрическая проницаемость первого слоя – ε_{a1}, второго – ε_{a2}. Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна u. Площадь пластин конденсатора – S (рис 6.10).

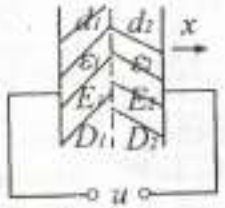


Рис. 6.10

6.19. Заряд равномерно с линейной плотностью $\tau = 10^{-9}$ Кл/м распределен по периметру квадрата со стороной 6 м (рис. 6.11). $\varepsilon_a = \varepsilon_0$. Найти потенциал в точке (0,0,5) м.

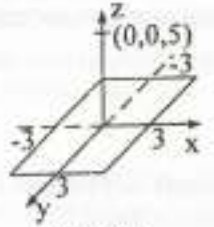


Рис. 6.11

6.20. Полный заряд круглого равномерно заряженного диска радиусом 2 м равен $\dfrac{40}{3}$ пКл. Найти потенциал в точке на оси диска (0,0,2 м). Найти потенциал в этой же точке, если весь заряд сосредоточен в начале координат.

6.21. В кубе с размером сторон, равным 1 м, задан потенциал $\varphi = 3x^2 + 4y^2$ (В). $\varepsilon_a = \varepsilon_0$. Найти энергию, запасенную в кубе.

6.22. В воздушном пространстве между соосными цилиндрическими поверхностями радиусами r_1 = 0,01 м и r_2 = 0,05 м электрическое поле $\vec{E} = \left(\dfrac{10^3}{r}\right)\vec{r}_0$. Найти энергию, сосредоточенную между

этими цилиндрами высотой 0,5 м.

6.23. Положительный заряд q равномерно распределен по объему шара радиусом a. Найти напряженность электрического поля $\vec{E}$ и потенциал φ внутри и вне шара. Диэлектрическая проницаемость материала шара и среды - ε_a.

6.24. Определить емкость и электрическую энергию поля плоского конденсатора с площадью обкладок S = 100 см^2 и расстоянием между ними d = = 1 мм. Конденсатор заряжен до напряжения U = 400 В и заполнен диэлектриком с $\varepsilon_a = 3\varepsilon_0$. Краевым эффектом пренебречь.

Рис. 6.12

6.25. Нить длиной $2L$ равномерно заряжена с линейной плотностью τ. Точки 1 и 2 лежат в плоскости, перпендикулярной к нити и проходящей через ее середину (рис. 6.12). Найти разность потенциалов φ_{12}, если $L >> r_1$, $L >> r_2$, $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

6.26. Шар радиусом a с центром в начале сферической системы координат имеет потенциал:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 & \text{при } r \le a, \\ \dfrac{\varphi_0 a}{r} & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Составить выражение для запасенной энергии и полного заряда на поверхности шара.

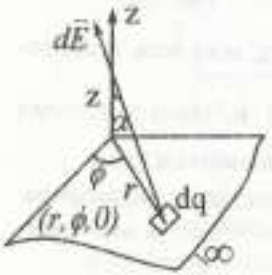


Рис. 6.13

6.27. Вывести выражение для напряженности электрического поля $\vec{E}$, созданного бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью ρ_s, на оси z (рис. 6.13). $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

6.28. На поверхностях концентрических цилиндрических проводников радиусами r_1 = 1 мм и r_2 = 20 мм потенциалы соответственно равны φ_1 = 75 В, φ_2 = 0 В. Используя уравнение Лапласа, определить вектор электрического смещения в

пространстве между проводниками, если ε = 3,6.

6.29. В декартовой системе координат потенциал φ зависит только от x. При x = - 2 см φ = 25,0 В, $\vec{E} = 1{,}5 \cdot 10^3 (-\vec{x}_0)$ В/м. Используя уравнение Лапласа, найти φ при x = 3 см.

6.30. Найти зависимость потенциала φ и напряженности электрического поля $\vec{E}$ от расстояния r в пространстве между двумя концентрическими цилиндрами, если при r_1 = 1 мм φ_1 = 0, а при r_2 = = 20 мм φ_2 = 150 В (рис. 6.14). Краевой эффект не учитывать. Указание: использовать уравнение Лапласа.

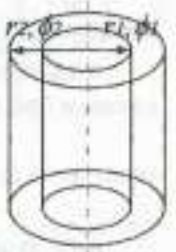


Рис. 6.14

6.31. В декартовой системе координат потенциал плоскости z = 3 см, φ = 0. Найти потенциал и поверхностную плотность заряда плоскости z = 0,если напряженность поля между плоскостями $\vec{E} = 6{,}67 \cdot 10^3 \vec{z}_0$ В/м, а ε = 4,5.

6.32. В сферической системе координат потенциал зависит только от r. При r = 15 мм φ = 0 В, а при r = 110 мм $\vec{E} = -334{,}7\vec{r}_0$ В/м. Используя уравнение Лапласа, найти потенциал φ при r = 200 мм.

6.33. Воспользовавшись уравнением Лапласа, найти зависимость векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ от расстояния r в пространстве между двумя сферическими концентрическими поверхностями, если известно, что при r = 0,1 м φ = 0, при r = 2 м φ = 100 В, $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

6.34. В заряженном цилиндре объемная плотность заряда $\rho = 5r\exp(-2r)$ Кл/м^3. Используя теорему Остроградского – Гаусса, найти $D(r)$.

6.35. Найти разность потенциалов между конусами с углами θ_1= 30^0 и θ_2 = 45^0, если при r = 0,25 м и θ = 30^0 напряженность поля $\vec{E} = -2{,}3 \cdot 10^3 \vec{\theta}_0$ В/м (рис. 6.15). Потенциал зависит только от θ. Указание: использовать уравнение Лапласа.

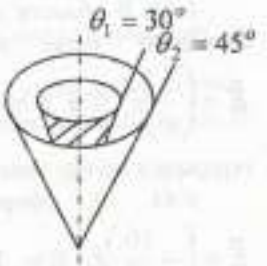


Рис. 6.15

6.36. В пространстве между двумя круглыми концентрическими цилиндрами известна объемная плотность заряда $\rho(r)$. Используя уравнение Пуассона, записать выражение для потенциала

$\varphi(r)$ с точностью до постоянных интегрирования A и B.

6.37. Найти зависимости $\vec{E}(r)$ и $\vec{D}(r)$ в пространстве между двумя сферическими концентрическими поверхностями, если при r = 2 см φ = -25 В, при r = 35 см φ = 150 В, $\varepsilon_a = 3{,}12\varepsilon_0$. Определить поверхностную плотность заряда ρ_s на каждом проводнике.

6.38. Найти работу по перемещению точечного заряда q=3·10^{-6} Кл из точки (4м, π, 0) в точку (2м, π/2, 2м) цилиндрической системы координат, если напряженность поля $\vec{E} = \left(\frac{10^5}{r}\right)\vec{r}_0 + 10^5 z \cdot \vec{z}_0$.

6.39. В свободном пространстве потенциал $\varphi = 2x + 4y$. Найти энергию кубического метра объема с вершиной куба в начале координат.

6.40. В области значений $0 \le \psi \le \frac{\pi}{6}$ цилиндрической системы координат известно распределение потенциала $\varphi = \left(-\frac{60\psi}{\pi}\right)$ В. Найти энергию, запасенную в объеме, ограниченном $0{,}1 \le r \le 0{,}6$; $0 \le z \le 1$; $0 \le \Psi \le \pi/6$.

6.41. Точечный заряд q = 0,4 нКл расположен в точке (2, 3, 3) м в декартовой системе координат. Найти разность потенциалов между точками A (2, 2, 3) м и B (-2, 3, 3) м.

6.42. Найти потенциал точки A (r_A = 5 м) относительно точки B (r_B = 15 м), созданный точечным зарядом q = 500 рКл, а также потенциал каждой точки относительно бесконечности.

6.43. В области значений $0 < r \le 2{,}7$ м цилиндрической системы координат задан вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = \left(\frac{5}{r}\right)\vec{r}_0$ В/м, а при $r > 2{,}7$ м $\vec{E} = 2{,}5\vec{r}_0$ В/м. Найти разность потенциалов между точками A (1м, 0, 0) и B (4м, 0, 0).

6.44. В сферической системе координат задано поле $\vec{E} = \left(-\frac{16}{r^2}\right)\vec{r}_0$ В/м. Найти разность потенциалов между точками A (2м, π, π/2) и B (4м, 0, π) и потенциалы этих точек относительно бесконечности.

6.45. Расстояние l между двумя точечными зарядами q_1 = 2 нКл и q_2 = - 3 нКл, расположенными в вакууме, равно 20 см (рис. 6.16). Определить напряженность E и потенциал φ поля, создаваемого этими зарядами в точке A, удаленной от первого заряда на расстояние r_1 = 15 см и от второго заряда на r_2 = 10 см.

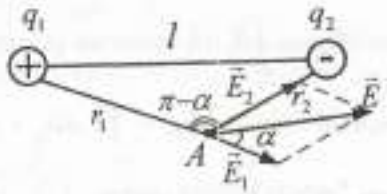


Рис. 6.16

6.46. В пространстве между двумя сферическими поверхностями задана объемная плотность заряда ρ. Используя уравнение Пуассона, записать выражение для вектора $\vec{E}$, если потенциал зависит только от r.

7. СТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Основные уравнения стационарного магнитного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{\delta}\, d\vec{s}; \quad rot\vec{H} = \vec{\delta};$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0; \quad div\vec{B} = 0; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Закон Био - Савара $d\vec{H} = \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}_0\right]}{4\pi r^2}$, где I – линейный ток; dl – длина элемента тока; r – расстояние от элемента тока до точки, в которой определяется $d\vec{H}$; $\vec{r}_0$ – единичный вектор, направленный от элемента тока к точке, в которой определяется $d\vec{H}$ (точке наблюдения).

Магнитный поток через поверхность S, ограниченную контуром L:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s}.$$

Индуктивность витка с током, равным I:

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Взаимная индукция двух витков с токами I_1 и I_2:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = M_{21},$$

где $\Phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_2 d\vec{s}_1$ – поток вектора $\vec{B}_2$, создаваемый током I_2 через первый контур; $\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{s}_2$ – поток вектора $\vec{B}_1$, создаваемый током I_1 через второй контур.

Задачи

7.1. Рассчитать напряженность магнитного поля на оси круглого плоского витка радиусом a, по которому протекает ток I (рис. 7.1).

7.2. Рассчитать напряженность магнитного поля коаксиального кабеля, приняв, что по центральному проводнику и оболочке текут одинаковые токи I в разных направлениях (рис. 7.2). Построить $H(r)$.

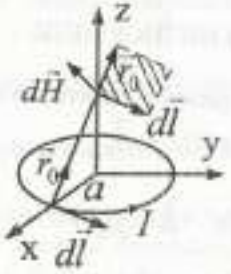
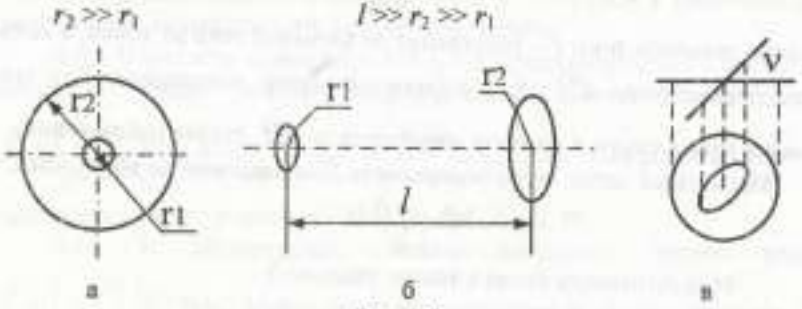


Рис. 7.1

Рис.7.2

7.3. Найти взаимную индуктивность двух витков (рис. 7.3, а,б,в).



а б в

Рис. 7.3

7.4. Рассчитать напряженность магнитного поля цилиндрической трубы, по которой протекает ток I (рис. 7.4). Построить $H(r)$.

7.5. Определить напряженность магнитного поля на оси длинного соленоида, содержащего n витков на единицу длины. Сила тока в соленоиде I, радиус витка a, длина $l >> a$ (рис. 7.5).

7.6. Длинный провод согнут в форме шпильки, показанной на рисунке. Найти точное выражение для магнитного поля в точке 0 (рис. 7.6).

Рис. 7.4

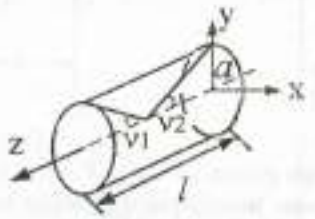


Рис. 7.5

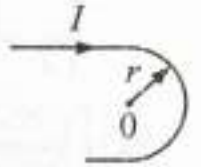


Рис. 7.6

7.7. Вычислить магнитную энергию, сосредоточенную внутри цилиндрического проводника единичной длины, по которому протекает ток I. Магнитная проницаемость проводника μ_0. Построить $H(r)$.

7.8. Три параллельных провода радиусом r расположены так, что расстояния между ними равны r_{12}, r_{23}, r_{13}. Определить погонную взаимную индуктивность M_{12}, M_{13}, т.е. петли 12 и петли 13 (рис. 7.7).

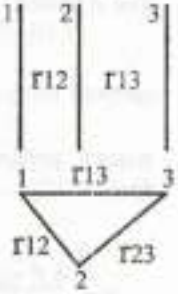


Рис. 7.7

7.9. Определить взаимную индуктивность на 1 км длины двух параллельных двухпроводных линий передачи, провода которых расположены в углах квадрата со стороной 1 м.

7.10. Полый медный провод имеет радиусы r_1 и r_2. Определить собственную индуктивность отрезка провода длиной l, полагая плотность тока одинаковой по всему сечению проводника (рис. 7.3).

7.11. Проволочная рамка в форме равнобедренной трапеции находится в воздухе в одной плоскости с длинным проводом, по которому течет ток I. Определить взаимную индуктивность между проводом и рамкой (рис. 7.8).

7.12. Определить индуктивность двухпроводной линии передачи длиной l = 10 км при расстоянии d = 2 м между проводами, считая, что по ним протекают равные токи в противоположных направлениях. Радиус проводов r = 6 мм.

7.13. Определить взаимную индуктивность треугольной петли и бесконечного одиночного проводника с током I (рис. 7.9).

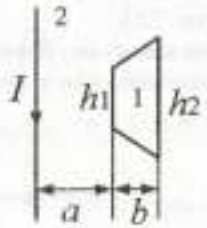


Рис. 7.8

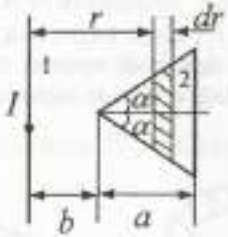


Рис. 7.9

7.14. Квадратная рамка с током $I = 0{,}2$ А, площадью $S = 9$ см^2, состоящая из 50 витков, находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 10$ А/м. Угол между нормалью $\vec{n}_0$ рамки и вектором $\vec{H}$ составляет 50°. Определить момент пары сил, действующих на рамку (рис. 7.10).

7.15. Определить взаимную индуктивность двухпроводной линии и рамки, лежащей в плоскости линии (рис. 7.11).

7.16. В цилиндрической системе координат задан вектор магнитной индукции $\vec{B} = \left(\frac{2}{r}\right)\vec{\varphi}_0$. Найти поток этого вектора через площадку, ограниченную координатами 0,5 м $\le r \le$ 2,5 м; $0 \le z \le 2$ м (рис. 7.12).

Рис. 7.10

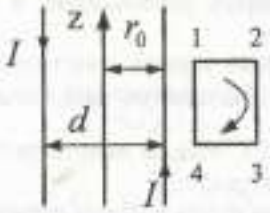


Рис. 7.11

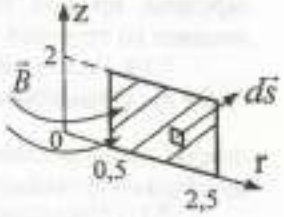


Рис. 7.12

7.17. Найти магнитный поток через площадку, ограниченную координатами $\varphi = \pi/4$; 0,01 м $< r <$ 0,05 м; $0 < z <$ 2 м, если ток, протекающий по прямолинейному проводнику вдоль оси z, равен $I =$ = 2,5 А. $\mu_a = \mu_0$ (рис. 7.13).

7.18. Найти индуктивность коаксиального кабеля единичной длины по данным, указанным на рис. 7.14.

7.19. В свободном пространстве в цилиндрической системе координат вектор $\vec{H}$ имеет одну составляющую $\vec{H} = \frac{2{,}39 \cdot 10^6}{r}\cos\vec{r}_0$. Найти магнитный поток через поверхность, ограниченную $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$; $0 \le z \le 1$ (рис. 7.15).

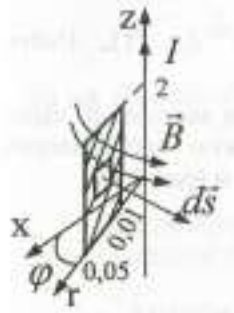


Рис 7.13

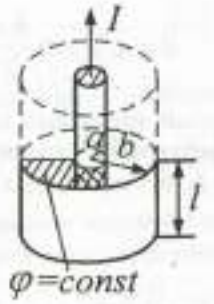


Рис. 7.14

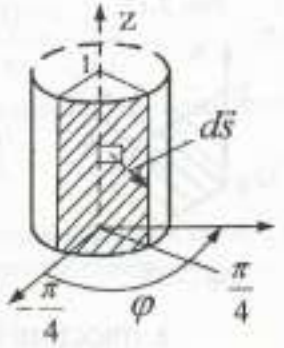


Рис.7.15

7.20. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми d=15 см, текут токи $I_1 = 70$ А и $I_2 = 50$ А в одном направлении. Определить магнитную индукцию B в точке P, удаленной на $r_1 = 10$ см от первого и на $r_2 = 20$ см от второго проводника (рис. 7.16.)

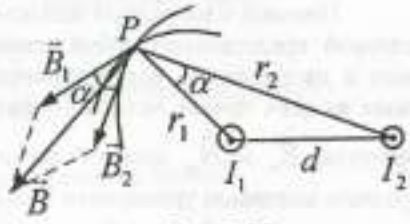


Рис. 7.16

7.21. Магнитная индукция B на оси тороида без сердечника (внешний диаметр тороида $d_1 = 60$ см, внутренний – $d_2 = 40$ см), содержащего $N = 200$ витков, составляет 0,16 мТл. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, определить силу тока в обмотке тороида.

7.22. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл помещена квадратная рамка площадью $S = 24$ см^2. Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол 60°. Определить момент пары сил (вращающий момент), если по рамке протекает ток $I = 1$ А.

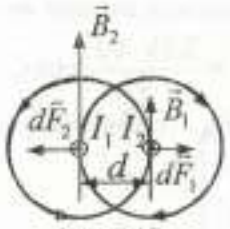


Рис. 7.17

7.23. По двум параллельным прямым проводникам длиной $l = 2$ м каждый, находящимся в вакууме на расстоянии $d = 10$ см, в противоположных направлениях текут токи $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А (рис. 7.17). Определить силу взаимодействия токов.

7.24. Задано поле вектора

$$\vec{B} = 2{,}5\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)e^{-2y}\vec{z}_0 \quad (\text{Т}).$$

Найти полный магнитный поток вектора $\vec{B}$ через поверхность, ограниченную координатами $z = 0$; $0 < y < \infty$; $0 \le x \le 2$ м (рис. 7.18).

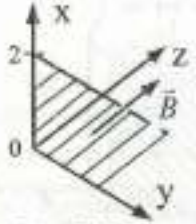


Рис. 7.18

8. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Плоской однородной называют волну, поверхности равных фаз которой представляют собой семейство плоскостей, перпендикулярных к направлению распространения волны, а амплитуды векторов поля во всех точках волнового фронта неизменны. Комплексные амплитуды $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ плоской однородной волны удовлетворяют однородным волновым уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{\vec{E}}_m + k^2\dot{\vec{E}}_m = 0; \quad \nabla^2\dot{\vec{H}}_m + k^2\dot{\vec{H}}_m = 0 \qquad (8.1)$$

и в случае отсутствия потерь могут быть представлены в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m = E_0 e^{-jkz}\vec{e}_0, \quad \dot{\vec{H}}_m = \left(E_0 / Z_c\right)e^{-jkz}\vec{h}_0, \quad \vec{e}_0 \perp \vec{h}_0 \perp \vec{z}_0, \qquad (8.2)$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$ - волновое число;

ω – круговая частота;

$Z_c = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$ - волновое сопротивление среды;

z – координата точки на направлении, вдоль которого распространяется волна.

Векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг к другу и к направлению распространения волны, они колеблются в фазе и образуют

с вектором Пойнтинга правую винтовую тройку. Вектор Пойнтинга является чисто вещественной величиной. Среднее за период значение его величины равно

$$\vec{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\dot{\vec{H}}^*\right] = \frac{1}{2}H_m^2 Z_c\vec{z}_0. \qquad (8.3)$$

Фазовая скорость и скорость переноса энергии плоской однородной волны совпадают со скоростью света в данной среде

$$\left|\vec{v}_\phi\right| = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}; \quad \left|\vec{v}^{\,\prime}\right| = \frac{\Pi}{w} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (8.4)$$

где w – плотность энергии электрического и магнитного полей, равная

$$w = \frac{\varepsilon_a\left|E\right|^2}{2} + \frac{\mu_a\left|H\right|^2}{2}. \qquad (8.5)$$

При распространении плоской однородной волны в среде с потерями волновое число k становится комплексной величиной

$$\dot{k} = \beta - j\alpha,$$

где $\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+tg^2\Delta}+1\right)}$ - коэффициент фазы,

$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+tg^2\Delta}-1\right)}$ - коэффициент затухания,

$tg\Delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a}$ - тангенс угла электрических потерь;

σ - проводимость среды.

Комплексные амплитуды векторов поля $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ плоской однородной волны в среде с потерями при условии ориентации вектора $\vec{H}$ вдоль оси y декартовой системы координат могут быть представлены в виде:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_m &= H_m Z_c\sqrt{\cos\Delta}\,e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}e^{j\Delta/2}\vec{x}_0,\\ \dot{\vec{H}}_m &= H_m e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\vec{y}_0.\end{aligned}\right\} \qquad (8.6)$$

Поверхности равных фаз и равных амплитуд совпадают, отношение комплексных амплитуд векторов $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ становится величиной

комплексной

$$\dot{Z}_c = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\cos\Delta e^{j\Delta/2}, \qquad (8.7)$$

что говорит о том, что между векторами $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ имеет место сдвиг по фазе, равный по величине $\Delta/2$ и меняющийся в пределах от 0 до $\pi/4$ в зависимости от величины удельной проводимости среды σ. Фазовая скорость становится меньше скорости света

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\mathrm{Re}\,\dot{k}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+tg^2\Delta}+1\right)}}, \qquad (8.8)$$

причем имеет место зависимость фазовой скорости от частоты. Такое свойство носит название дисперсии, а среды, обладающие таким свойством, называются диспергирующими. Вектор Пойнтинга в этом случае оказывается комплексной величиной

$$\dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{E}}\dot{\vec{H}}^*\right] = \frac{1}{2}H_m^2\left|\dot{Z}_c\right|e^{-2\alpha z}e^{j\Delta/2}\vec{z}_0. \qquad (8.9)$$

Комплексная амплитуда плоской однородной волны, распространяющейся в произвольном направлении l (рис. 8.1), может быть представлена в виде:

$$\dot{\vec{H}}_m = H_m e^{-\dot{\gamma}l} = H_m e^{-jk\left(x\cos\varphi_x + y\cos\varphi_y + z\cos\varphi_z\right)}\vec{y}_0, \qquad (8.10)$$

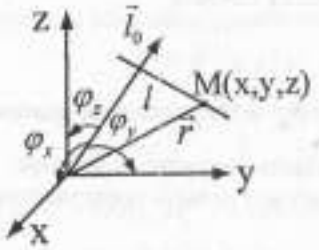


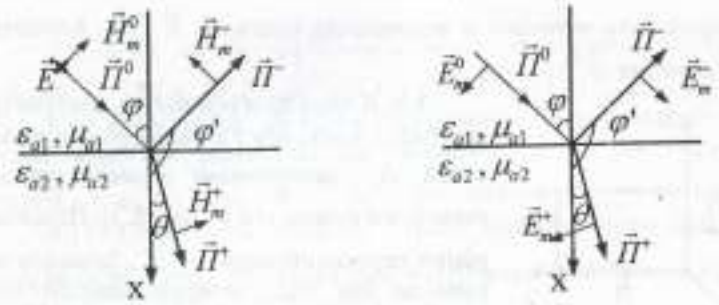
Рис. 8.1

где x, y, z – координаты точки наблюдения M;

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – углы, образованные направлением распространения волны и соответствующими осями декартовой системы координат.

При падении плоской однородной волны на плоскую границу раздела сред коэффициенты отражения R и прохождения T определяются формулами Френеля. При этом следует различать нормально поляризованную волну – вектор $\vec{E}$ перпендикулярен к плоскости падения (рис. 8.2, а) и параллельно поляризованную волну – вектор $\vec{E}$ параллелен плоскости падения (рис. 8.2, б). Под плоскостью падения понимают плоскость, проходящую через нормаль к

границе раздела и направление распространения волны (вектор Пойнтинга).



а б

Рис. 8.2

Для нормально поляризованной волны формулы Френеля имеют вид:

$$R_\perp = \frac{Z_{c2}\cos\varphi - Z_{c1}\cos\theta}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\theta}; \quad T_\perp = \frac{2Z_{c2}\cos\varphi}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\theta}; \qquad (8.11)$$

для параллельно поляризованной соответственно:

$$R_\parallel = \frac{Z_{c1}\cos\varphi - Z_{c2}\cos\theta}{Z_{c1}\cos\varphi + Z_{c2}\cos\theta}; \quad T_\parallel = \frac{2Z_{c2}\cos\varphi}{Z_{c1}\cos\varphi + Z_{c2}\cos\theta}. \qquad (8.12)$$

В приведенных выше формулах φ – угол падения, θ – угол преломления. Связь между ними устанавливается законами Снеллиуса:

1) угол падения равен углу отражения $\varphi = \pi - \varphi'$;

2) отношение синуса угла преломления к синусу угла падения для диэлектриков без потерь равно отношению показателей преломления сред (для диэлектрических сред без потерь):

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}. \qquad (8.13)$$

Задачи

8.1. Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в неограниченном пространстве в направлении z. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, магнитная проницаемость $\mu_a = \mu_0$. Удельная проводимость $\sigma = 0$. Ампли-

туда напряженности электрического поля E_m = 50 мВ/м. Угловая частота $\omega = 10^8$ 1/с. Составить уравнение волны и определить ее параметры. Определить величину и направление векторов $\vec{E}$, $\vec{\Pi}$, плотности тока смещения $\vec{\delta}^{см}$.

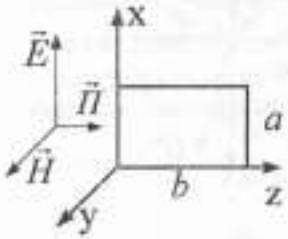


Рис. 8.3

8.2. В поле плоской волны, распространяющейся вдоль оси z с частотой ω и амплитудой E_0, расположена плоская рамка с размерами сторон a и b (рис. 8.3). Плоскость рамки перпендикулярна к $\vec{H}$. Записать выражение для ЭДС, которую наводит электромагнитная волна в этой рамке.

8.3. Плотность потока мощности эллиптически поляризованной волны равна 20 Вт/м^2. Вычислить плотность потока мощности для ортогональных компонент, если отношение осей эллипса поляризации 0,5, а сдвиг фаз между ортогональными составляющими 90°.

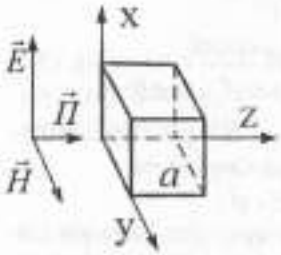


Рис. 8.4

8.4. На пути волны выделен кубический объем со стороной a = 1 м (рис. 8.4). Найти заключенную в нем среднюю энергию электромагнитного поля, если амплитуда вектора $\vec{E}$ составляет 1 В/м.

8.5. Плоская электромагнитная волна распространяется в сухой почве с параметрами: удельная проводимость σ = 0,0010 См/м, диэлектрическая относительная проницаемость ε = 4. Определить коэффициент затухания, фазовую скорость и длину волны для частоты $15 \cdot 10^5$ Гц. Найти расстояние, на котором амплитуда поля убывает в 100 раз.

8.6. Показать, что заданные выражения не описывают составляющие плоской волны в вакууме:

$$\dot{\vec{E}} = 10e^{-jkz}\vec{x}_0, \quad \dot{\vec{H}} = 3 \cdot 10^{-2} e^{-jkz}\vec{y}_0.$$

8.7. Записать мгновенное значение вектора Пойнтинга плоской волны, распространяющейся в среде с параметрами $\omega = 10^7$ рад/с, $\varepsilon_a = 2\varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, σ = 2 См/м. Определить моменты изменения направления вектора Пойнтинга волны на противоположное.

8.8. Определить параметры среды без потерь, в которой распространяется волна, если E_m / H_m = 40 Ом, $\lambda = 0{,}25\lambda_0$, λ_0 – длина волны в вакууме.

8.9. Вычислить коэффициенты затухания для меди и стекла на частотах f = 10 Гц, 10^5 Гц, 10^{10} Гц. $\sigma_м = 5{,}6 \cdot 10^7$ См/м; $\sigma_{ст} = 10^{-12}$ См/м.

8.10. Определить, на каком расстоянии от источника плотность потока мощности плоской волны уменьшится в 100 раз. Параметры среды: $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 10^{-2}$ См/м. Рабочая частота $f = 10^6$ Гц.

8.11. Определить толщину экрана, ослабляющего напряженность поля на 60 дБ. Проводимость материала $\sigma = 10^{-6}$ См/м; $\mu_a = \mu_0$; $f = 10^6$ Гц.

8.12. Длина волны, распространяющейся в воздухе, составляет 1 м. Какова длина волны на той же частоте f в меди, свинце? $\sigma_м$ = $= 5{,}6 \cdot 10^7$ См/м; $\sigma_{св} = 0{,}48 \cdot 10^7$ См/м.

8.13. Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с параметрами $\varepsilon_a = 16\varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 10^{-2}$ См/м. Определить, во сколько раз уменьшится амплитуда поля волны на каждые 10 м пройденного расстояния. $f = 10^5$ Гц.

8.14. Определить, на каком расстоянии от начала координат амплитуда напряженности электрического поля уменьшится до 0,01 своего первоначального значения. Параметры среды $\varepsilon = 10$, $\mu = 1$, $f = 10^8$ Гц, $\sigma = 10^{-2}$ См/м, $E_m(0,0,0) = 5 \cdot 10^{-3}$ В/м.

8.15. Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в среде с параметрами $\varepsilon_a = 4\varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$, падает нормально (рис. 8.5) на плоскую границу раздела с идеальным проводником. Определить плотность поверхностного тока на граничной плоскости. Амплитуда падающей волны – E_m.

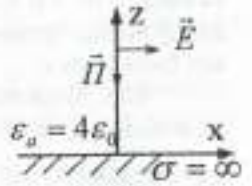


Рис. 8.5

8.16. Волна, поляризованная по кругу, падает на границу двух диэлектриков. Чему равняется отношение волновых сопротивлений сред, если отраженная волна линейно поляризована, а угол падения $\varphi = 30°$? Записать выражение для отраженной волны.

8.17. Плоская параллельно поляризованная волна, распространяющаяся в воздухе, падает под углом $\pi/4$ на плоскую границу раздела с идеальным проводником (рис. 8.6). Определить плотность поверхно-

стного тока на граничной плоскости. Амплитуда падающей волны E_m.

8.18. Плоская нормально поляризованная электромагнитная волна, распространяющаяся в среде с параметрами ε_0, μ_0, падает под углом 45° на плоскую границу раздела с идеальным проводником (рис. 8.7). Определить плотность поверхностного тока на граничной поверхности, если амплитуда падающей волны E_m.

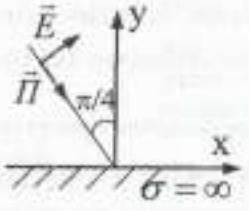


Рис. 8.6

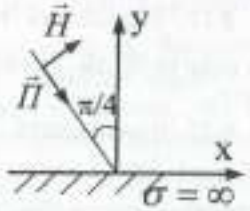


Рис. 8.7

8.19. В свободном пространстве заданы мгновенные значения векторов электромагнитного поля: $\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - ky)\vec{z}_0$; $\vec{E} = -120\pi H_0 \cos(\omega t - ky)\vec{x}_0$. Записать выражение для мгновенного значения вектора Пойнтинга и найти его среднее значение за период колебания, если $H_0 = 2$ А/м.

8.20. Определить глубину проникновения плоской волны с частотой $f = 10^5$ Гц в серебро ($\sigma = 6{,}14 \cdot 10^7$ См/м; $\mu_a = \mu_0$). Определить длину волны, фазовую скорость, коэффициент затухания и коэффициент фазы волны.

8.21. Определить, во сколько раз уменьшится амплитуда плоской волны с частотой $f = 2 \cdot 10^6$ Гц при распространении ее в среде с параметрами $\sigma = 10^{-3}$ См/м, $\varepsilon_a = 2$, $\mu_a = 1$ на расстоянии в 1м.

8.22. В среде с относительной магнитной проницаемостью $\mu = 1$ найти ε и ω, если в этой среде $\vec{E} = 30\pi \exp\left(j\left(\omega t - \frac{4}{3}y\right)\right)\vec{z}_0$ В/м; $\vec{H} = 1{,}0 \exp\left(j\left(\omega t - \frac{4}{3}y\right)\right)\vec{x}_0$ А/м.

8.23. В свободном пространстве вектор магнитной индукции

$\vec{B} = B_m e^{j(\omega t + kz)}\vec{y}_0$. Используя второе уравнение Максвелла (закон электромагнитной индукции Фарадея), показать, что $\vec{E} = -\frac{\omega}{k} B_m e^{j(\omega t + kz)}\vec{x}_0$.

8.24. В неограниченном пространстве с параметрами $\mu = 1$, $\varepsilon = 50$ вектор $\vec{E} = 20\pi e^{j(\omega t - kz)}\vec{x}_0$, вектор $\vec{B} = \mu_0 H_m e^{j(\omega t - kz)}\vec{y}_0$. Найти ω и H_m, если длина волны $\lambda = 1{,}78$ м.

8.25. В свободном пространстве задан вектор $\vec{E} = E_m \sin(\omega t - kz)\vec{y}_0$. Используя второе уравнение Максвелла, найти вектор $\vec{H}$. Изобразить $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $t = 0$.

8.26. В свободном пространстве с проводимостью $\sigma = 0$ известно поле $\vec{H} = H_m e^{j(\omega t + kz)}\vec{x}_0$. Используя первое уравнение Максвелла, найти электрическое поле $\vec{E}$.

8.27. В свободном пространстве вектор $\vec{D} = D_m \sin(\omega t + kz)\vec{x}_0$. Используя уравнение Максвелла, показать, что вектор магнитной индукции $\vec{B} = -\frac{\omega \mu_0 D_m}{k} \sin(\omega t + kz)\vec{y}_0$.

8.28. В свободном пространстве в направлении оси z распространяется плоская волна с напряженностью $\vec{E}(z,t) = 40\cos(\omega t - kz)\vec{x}_0$ В/м. Найти среднее значение вектора Пойнтинга и его поток через площадку радиусом 3,0 м, перпендикулярную к оси z.

8.29. Найти фазовую скорость, коэффициент распространения, а также глубину проникновения волны в алюминий на частоте $f = 1{,}6$ МГц, если $\mu = 1$, $\sigma = 38{,}2 \cdot 10^6$ См/м.

8.30. В среде с параметрами $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ распространяется плоская электромагнитная волна, комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля которой в плоскости $z = 0$ $\dot{\vec{E}} = 0{,}5\vec{x}_0 + 0{,}2\vec{y}_0$. Определить комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля, если $z > 0$.

8.31. Определить постоянную распространения плоской волны,

распространяющейся в среде с параметрами $\varepsilon = 8$, $\mu = 1$, $\sigma = 0{,}25\cdot10^{-12}$ См/м, если частота волны $f = 1{,}6$ МГц.

Рис. 8.8

8.32. Плоская электромагнитная волна с электрической составляющей $\vec{E} = 1{,}0e^{-\alpha z}e^{j(\omega t - kz)}\vec{x}_0$ В/м и частотой $f = 100$ МГц падает из свободного пространства на медную среду ($\sigma_м = 58\cdot10^6$ См/м) в направлении $z > 0$ (рис. 8.8). Оценить затухание волны в проводнике (в %) на расстоянии глубины проникновения d и $5d$.

8.33. Определить длину волны λ и фазовую скорость v_ϕ электромагнитной волны, распространяющейся в среде без потерь с $\varepsilon = \mu = 10$, если $f = 10$ МГц.

8.34. Вычислить фазовую скорость, коэффициент затухания и глубину проникновения для плоской волны, распространяющейся с частотой 10 МГц в металле с параметрами $\sigma = 5\cdot10^7$ См/м, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$.

8.35. В волне, распространяющейся в свободном пространстве с фазовой постоянной 30 рад/м в направлении оси $(-\vec{z}_0)$, известна амплитуда вектора $H = \dfrac{1}{3\pi}$ А/м. Записать выражения для мгновенных значений векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, если при $t = 0$ и $z = 0$ вектор $\vec{H}$ направлен по оси $(-\vec{y}_0)$. Определить частоту и длину волны.

Ответы

Глава 1. Векторы

1.4. 41,9°; 1.6. $4x^2 - y^2 = 15$; 1.9. $\vec{r}_0$; 1.10. $-\dfrac{x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$;

1.13. $5{,}4\vec{x}_0 + 7{,}3\vec{y}_0 - 4\vec{z}_0$; 1.14. $\vec{A}$; 1.15. $\sqrt{149}$; 1.16. $\sqrt{165}$;

1.17. $\sqrt{26}$; 1.18. $2x + z$; 1.19. 300; 1.20. $-e^{-0{,}5r}$; 0; 1.21. 10;

1.22. -3,5; 1.23. -1 - sin φ; 1.24. 0; 1.25. $-8{,}84\cdot10^{-2}$; 1.26. $4z$; 1.27. 5;
1.28. $-r$; 1.29. 24,14; 1.30. 7; 1.31. $3 - 2y$; 1.32. -8; 1.33. 5; 1.34. 4;
1.35. $-2{,}6$; 1.36. $\dfrac{10}{r}\left(2+\cos\theta\right)$; 1.37. $3 + r$; 1.38. 1,25;
1.39. $4r\sin\theta + \dfrac{13\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta$; 1.40. $20 + r$, 0; 1.41. $8e^{-10r}\operatorname{ctg}\theta$;
1.42. $\vec{A}\vec{r}/r$; 1.44. 36 π; 1.45. 20 π; 1.46. $3\pi a^2 h$; 1.47. 80/3;
1.48. 129,4; 1.49. 75 π; 1.50. 589,1; 1.51. 800 π; 1.52. 4; 1.54. $4\pi a^3$;
1.55. $2\pi a$; 1.56. 0; 1.57. 0; 1.58. 0; 1.59. 3; 1.60. $\left(2yz - x^2\right)\vec{x}_0 + 2xz\vec{z}_0$;
1.61. $\vec{x}_0 - \vec{y}_0 - \vec{z}_0$; 1.62. 0; 1.63. $0{,}5\vec{z}_0$; 1.64. $-2{,}5\vec{r}_0 - 0{,}34\vec{z}_0$;
1.65. $16e^{-10r}\left(1-5r\right)\vec{\varphi}_0$; 1.66. $5\vec{\varphi}_0$; 1.67. $4{,}33\vec{r}_0 - 2{,}5\vec{\theta}_0 + 1{,}25\vec{\varphi}_0$;
1.68. $-5\vec{r}_0$; 1.70. 0; 1.71. 3; 1.73. $0{,}368\vec{r}_0 + 0{,}23\vec{z}_0$; 1.74. 0.

Глава 2. Основные характеристики электромагнитного поля: заряды, электрические токи, векторы

2.1. $\rho_0\pi^2a^3/5$ Кл; 2.2. $\dfrac{\tau_0 a}{\pi}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Кл; $\dfrac{\tau_0 a}{\pi}$ Кл; $2\tau_0 a/\pi$ Кл;
2.3. 0; 2.4. $\rho_0\omega a\sin^2\theta\vec{\varphi}_0$ А/м; $\rho_0\omega\pi a^2/2$ А; 2.5. $\rho_0\omega h^3/3a$ А;
2.6. $\tau_1\tau_2/2\pi\varepsilon_0 d$ Н; 2.7. $-0{,}96\cdot10^{-13}$ Н; $-1{,}05\cdot10^{17}$ м/с^2;
2.8. $\dfrac{\rho_0\omega r^2}{a}\vec{\varphi}_0$ А/м; $\dfrac{\rho_0\omega a^2}{3}$ А; 2.9. $d\vec{F}_{12} = -\dfrac{\mu_0 d\vec{j}_2}{4\pi r^2}d\vec{j}_1$; $d\vec{F}_{21} = 0$;
2.10. $20\cdot10^{-6}$ Н/м; 2.11. 0,0021 В/м; 2.12. 2π К; 2.13. 5π К; 2.14. 4π А;
2.15. 2,0 А; 2.17. $\left(108\vec{y}_0 + 144\vec{z}_0\right)$ В/м; 2.18. 6000 В/м; 2.19. 7,51 мА;
2.20. 2,2; 2.21. $(-0{,}144\vec{x}_0 - 0{,}108\vec{z}_0)$ Н; 2.22. $2\left(2\vec{x}_0 - \vec{y}_0 - 2\vec{z}_0\right)$ Н;
2.23. $74{,}9\vec{x}_0 - 48\vec{y}_0 - 64{,}9\vec{z}_0$ В/м; 2.24. $18\vec{x}_0$ В/м;
2.25. $\left(\rho_s/2\varepsilon_0\right)\vec{z}_0$ В/м; 2.26. $2{,}3\cdot10^{-8}$ Кл; 2.27. $-40\cdot10^{-9}$ Кл;

2.28. $\frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{1}{h}\right)\vec{z}_0$; 2.29. $13{,}5\left(\frac{\vec{x}_0+\vec{z}_0}{\sqrt{2}}\right)$ Н;

2.30. $0{,}465\left(\frac{-3\vec{x}_0-7\vec{z}_0}{\sqrt{58}}\right)$ Н; 2.31. $\frac{4\pi\rho b^3}{3\varepsilon_0}$;

2.32. -800 π; -1600 π; -1600 π.

Глава 3. Система уравнений Максвелла

3.1. $\delta_0/4a^2$; 3.3. $\mathcal{E}=-\mu_0 H_0\omega\cos\omega t\cdot a^2$;

3.5. $\mathcal{E}=-\mu_0 Hlv\sin\alpha$; 3.6. $\vec{H}=(I/2\pi r)\vec{\varphi}_0$;

3.7. $\delta_{см}=\frac{\varepsilon_0\mu v}{(d_0-vt)^2}$; $I=\frac{\varepsilon_0\mu vs}{(d_0-vt)^2}$; 3.8. $t=\frac{\varepsilon_0}{\sigma}\ln 2$;

3.9. $\mathcal{E}=N\mu_0 Hab\sin\omega t\cdot\omega$; 3.10. $\rho=3k$ при $0\le r\le a$;

$\rho=0$ при $a<r\le\infty$; 3.11. $\rho=\varepsilon_0 k(2x+3y^2)$; 3.12. $\vec{E}=-\vec{z}_0$;

3.13. $k=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$; $\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$; 3.14. $\Delta\varphi=1{,}5\cdot10^{-4}$ В;

3.15. $f=11{,}4\cdot10^{14}$ Гц; 3.16. $\mathcal{E}=-\frac{\mu_0 Iav}{2\pi}\left[\frac{1}{r_0+vt+b}-\frac{1}{r_0+vt}\right]N$;

3.19. $\mathcal{E}=\frac{5\mu_0 I_0 b\sin\omega t\cdot\omega}{\pi}\ln\frac{r+a}{r}$; 3.20. $\mathcal{E}=-\frac{B\omega l^2}{2}$;

3.22. $I_{см}=0{,}1\cdot10^{-6}$ А; 3.23. $I=8/\pi$ А; 3.24. $\vec{\delta}=\frac{I}{\pi a^2}\vec{z}_0$ при $r\le a$;

$\vec{\delta}=0$ при $r>a$; 3.25. $E_r=0{,}0042$ В/м; 3.26. $I_{max}=39{,}5\cdot10^{-6}$ А;

$i=I_{max}\cdot\sin\omega t$; 3.27. $\mathcal{E}=21{,}3\cdot10^{-6}$ В; 3.28. $\rho=-e^{-0{,}5r}$ при $0<r\le 2$;

$\rho=0$ при $r>2$; 3.29. $\mathcal{E}=-0{,}02\sin10^3 t$ В; 3.30. $\rho=40e^{-2r}$;

3.31. $\delta=1250\sin10^{10}t$ А/м^2; $\delta_{см}=22{,}1\cos10^{10}t$ А/м^2; $f=89{,}9\cdot10^9$ Гц.

Глава 4. Граничные условия

4.2. $y=cx$; 4.3. $B_1=B_2\sqrt{\sin^2\alpha_2(\mu_{a1}/\mu_{a2})^2+\cos^2\alpha_2}$;

$\alpha_1=\operatorname{arctg}[(\mu_{a1}/\mu_{a2})\operatorname{tg}\alpha_2]$; 4.7. $\rho_s=\varepsilon_0 A$; 4.10. $\varepsilon_{a2}=\varepsilon_{a1}\sin^2\varphi_1$;

4.11. $I=0{,}6$ А; 4.16. $H_r=0{,}25\cdot10^{-16}$ А/м;

4.17. $\vec{D}_2=\varepsilon_0(10\vec{x}_0-15\vec{y}_0+10\vec{z}_0)$; $\alpha_1=54{,}2^\circ$; $\alpha_2=29^\circ$;

4.18. $H_2=7{,}12$ А/м; $\alpha_2=70{,}3^\circ$; 4.19. $\vec{E}_2=-3\vec{x}_0+4\vec{y}_0-6\vec{z}_0$;

4.20. $\mu_2=5{,}57$; $\vec{H}_2=(1/\mu_0)(0{,}2\vec{x}_0+0{,}5\vec{y}_0+0{,}54\vec{z}_0)$;

4.21. $\vec{H}_1=5{,}5\vec{x}_0+6\vec{z}_0$; 4.22. $\vec{\delta}_s=(1/\mu_0)(3{,}72\vec{y}_0-9{,}28\vec{z}_0)$;

4.23. $\vec{E}_2=(1/\varepsilon_0)(1{,}25\vec{x}_0-4\vec{y}_0+6\vec{z}_0)$; $\theta_1=22{,}6^\circ$; $\theta_2=9{,}83^\circ$;

4.24. $\theta_2=8{,}13^\circ$; 4.25. $\vec{E}_2=-3\vec{x}_0+4\vec{y}_0-0{,}5\vec{z}_0$;

4.26. $\vec{D}_2=5\varepsilon_0(2\vec{x}_0-3\vec{y}_0+2\vec{z}_0)$; $\theta_1=54{,}2^\circ$; $\theta_2=29^\circ$;

4.27. $\vec{H}_2=(1/\mu_0)(8\vec{x}_0+5{,}33\vec{y}_0+40\vec{z}_0)\cdot10^{-2}$; $\alpha_1=74{,}5^\circ$; $\alpha_2=13{,}5^\circ$;

4.28. $\varphi_2=\operatorname{arctg}[(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\operatorname{tg}\varphi]$.

Глава 5. Теорема Пойнтинга

5.4. $r=2$ м; 5.5. $\omega^{\text{м}}=\mu_0\delta^2a^2/32$; 5.17. $\vec{H}=-3\vec{x}_0+2\vec{z}_0$;

5.18. $\Pi=9{,}95\cdot10^{-6}$ Вт/м^2;

5.19. $\dot{\vec{\Pi}}=-2{,}73\cdot10^{-3}e^{j0{,}5}\vec{x}_0-1{,}785\cdot10^{-3}e^{j1{,}8}\vec{y}_0$;

$\dot{\vec{\Pi}}_{ср}=-2{,}397\cdot10^{-3}\vec{x}_0+0{,}405\cdot10^{-3}\vec{y}_0$; 5.23. $E=1940$ В/м;

$H=5{,}15$ А/м.

Глава 6. Электростатическое поле

6.3. $r=9\cdot10^9$ м; 6.4. $\vec{E}_1=\rho_0 r^2\vec{r}_0/4a\varepsilon_a$; $\vec{D}_1=\rho_0 r^2\vec{r}_0/4a$;

$\vec{E}_2=\rho_0 a^3\vec{r}_0/4r^2\varepsilon_0$; $\vec{D}_2=\rho_0 a^3\vec{r}_0/4r^2$;

6.6. $C = \dfrac{2\pi}{\dfrac{1}{\varepsilon_{a1}}\ln\dfrac{r_2}{r_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_{a2}}\ln\dfrac{r_3}{r_2}}$; 6.7. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_a\sqrt{a^2+z^2}}$;

$\vec{E} = \dfrac{qz\vec{z}_0}{4\pi\varepsilon_a\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$; 6.8. $E = \dfrac{q}{2\pi a^2\varepsilon_a}\left[1 - \dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]$;

$\varphi = \dfrac{q}{2\pi a^2\varepsilon_a}\left[\sqrt{a^2+z^2} - z\right]$;

6.12. $\varphi = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\sqrt{d^2+(l-b)^2}+(l-b)}{\sqrt{d^2+b^2}-b}$; 6.13. $\rho_s = -\dfrac{qh}{2\pi r^3}$;

6.15. W = 27 Дж; 6.16. $\rho = -\dfrac{qe^{-r/a}\varepsilon_0}{ra^2}$; 6.17. $W = \dfrac{q^2}{8\pi a}\left[\dfrac{1}{5\varepsilon_a} + \dfrac{1}{\varepsilon_0}\right]$;

6.19. φ = 35,6 В; 6.20. φ_1 = 49,7 В; φ_2 = 60 В; 6.21. $W = 147\cdot10^{-12}$ Дж;

6.22. W = 0,224 Дж; 6.23. $E_1 = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_a}$; $\varphi_1 = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_a} + const$;

$E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2}$; $\varphi_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_a r} + const$; 6.25. $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$;

6.26. $W = 2\pi\varepsilon_0\varphi_0^2 a$; $Q = 4\pi\varepsilon_0\varphi_0 a$; 6.27. $\vec{E} = \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec{z}_0$;

6.28. $\vec{D} = \dfrac{798\cdot10^{-12}}{r}\vec{r}_0$ К/м^2; 6.29. φ = 100 В;

6.30. φ = 50,1 ln r + 345,9 В; $\vec{E} = \dfrac{50{,}1}{r}\left(-\vec{r}_0\right)$ В/м; 6.31. φ = 200 В;

$\rho_s = 266\cdot10^{-9}$ К/м^2; 6.32. φ = –250 В; 6.33. $\vec{E} = -10{,}53\vec{r}_0/r^2$ В/м;

$\vec{D} = -9{,}32\cdot10^{-11}\vec{r}_0/r^3$; 6.34. $\vec{D} = \dfrac{2{,}5}{r}\left[\dfrac{1}{2} - e^{-2r}\left(r^2+r+\dfrac{1}{2}\right)\right]\vec{r}_0$ Кл/м^2;

6.35. $\varphi_2 - \varphi_1$ = 125,5 В; 6.36. $\varphi = -\left(\rho r^2/4\varepsilon_a\right) + A\ln r + B$;

6.37. $\vec{E} = -3{,}71\vec{r}_0/r^2$ В/м; $\vec{D} = -0{,}103\vec{r}_0/r^2$ нКл/м^2;

6.38. A = –0,392 Дж; 6.39. $W = 10^{-8}/(36\cdot\pi)$ Дж; 6.40. $W = 1{,}51\cdot10^{-9}$ Дж;

6.43. $\varphi_A - \varphi_B$ = 8,25 В; 6.44. $\varphi_A - \varphi_B$ = – 4 В; $\varphi_{A\infty}$ = – 8 В;

$\varphi_{B\infty}$ = – 4 В; 6.45. $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{Q_1^2}{r_1^4} + \dfrac{2|Q_1||Q_2|}{r_1^2 r_2^2}\cos\alpha + \dfrac{Q_2^2}{r_2^4}}$;

$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_1}{r_1} + \dfrac{Q_2}{r_2}\right)$.

Глава 7. Стационарное магнитное поле

7.1. $\vec{H} = \dfrac{Ia^2\vec{z}_0}{2\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$; 7.3. а) $M_{12} = \dfrac{\mu_a\pi r_1^2}{2r_2}$; 7.7. $W = \dfrac{\mu_a I^2}{16\pi}$;

7.13. $M_{21} = \dfrac{\mu_a l g\alpha}{\pi}\left(a - b\ln\dfrac{a+b}{b}\right)$; 7.16. Φ = 6,44 Вб;

7.17. $\Phi = 1{,}61\cdot10^{-6}$ Вб; 7.19. Φ = 4,24 Вб; 7.20. $B = 178\cdot10^{-6}$ Тл;

7.22. $M = 207{,}6\cdot10^{-6}$ Н·м; 7.23. $F = 20\cdot10^{-3}$ Н; 7.24. Φ = 1,59 Вб.

Глава 8. Плоские электромагнитные волны

8.2. $\Theta = E_0 a\left[\cos(\omega t - kb) - \cos\omega t\right]$; 8.3. Π_1 = 4 Вт/м^2;

Π_2 = 16 Вт/м^2; 8.8. $\varepsilon_a = \dfrac{1}{10c}$ Ф/м; $\mu_a = \dfrac{160}{c}$ Гн/м; 8.10. z = 11,5 м;

8.19. $\vec{\Pi} = 120\pi H_0^2\cos^2(\omega t - ky)\vec{y}_0$; $\vec{\Pi}_{cp} = \dfrac{1}{2}H_0^2 z_c\vec{y}_0$;

8.20. $d = 204\cdot10^{-6}$ м; $\lambda = 1{,}28\cdot10^{-3}$ м; v_ϕ = 128 м/с; $\alpha = \beta = 49\cdot10^2$ 1/м;

8.21. 1,085 раза; 8.25. $\vec{H} = -\dfrac{E_m}{z_c}\sin(\omega t - kz)\vec{x}_0$;

8.28. $\vec{\Pi}_{cp} = \dfrac{20}{3\pi}\vec{z}_0$ Вт/м^2; $\int\vec{\Pi}_{cp}d\vec{s}$ = 60 Вт; 8.29. v_ϕ = 647 м/с;

$k = 2{,}2\cdot10^4 e^{j45}$ 1/м; $d = 64{,}4\cdot10^{-4}$ м;

8.30. $\dot{\vec{H}} = \left(-1{,}061\vec{x}_0 + 2{,}65\vec{y}_0\right)\cdot 10^{-3}$ А/м; 8.31. $k = j9.48\cdot 10^{-2}$ 1/м;

8.32. 36,8 %; 0,67 %; 8.33. $\lambda = 3$ м; $v_\phi = 3\cdot 10^7$ м/с;

8.34. $v_\phi = 1{,}414\cdot 10^3$ м/с; $a = 44{,}43\cdot 10^3$ 1/м; $d = 22{,}5\cdot 10^{-6}$ м;

8.35. $f = 1.43$ ГГц; $\lambda = \pi/15$ м.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. – М.: Радио и связь, 2000. – 536 с.

2. Семенов И.А. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1973. – 480 с.

3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Издательство физико-математической литературы, 1958. – 783 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Принятые обозначения 1
1. Векторы 3
2. Основные характеристики электромагнитного поля: заряды, электрические токи, векторы 14
3. Система уравнений Максвелла 22
4. Граничные условия 29
5. Теорема Пойнтинга 36
6. Электростатическое поле 40
7. Стационарное магнитное поле 49
8. Плоские электромагнитные волны 54
Ответы 62